3 Racionální chování spotřebitele : maximalizace užitku, minimalizace výdajů

Spotřebitel si při nákupu komodit počíná tak, že svůj peněžní příjem o velikosti M rozdělí beze zbytku na nákup s komodit $(1 \le s \le n)$, a to tak, aby dosáhl svého maximálního užitku. Jinými slovy : komodity kupuje v takových množstvích (ne však nutně všechny dostupné), aby požadované hladiny užitku dosáhl co nejlevněji. Bude tedy preferovat - při variantní možnosti dosáhnout hladiny užitku u^* různými kombinacemi komodit - takovou kombinaci, při níž celkový výdaj na pořízení všech užitek mu přinášejících statků (závisející zřejmě na množstvích statků a na jejich jednotkových cenách) bude nejmenší možný. Je tedy mj. zřejmé, že při jinak stejném příspěvku několika komodit k užitku (při shodných mezních užitcích těchto komodit) bude preferovat nákup komodity nejlevnější.

3.1 Formulace maximalizačního problému

Pokud tuto situaci zformalizujeme, dostáváme optimalizační problém řešící nalezení maxima

(3.1A) $\quad Max\; u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ za podmínky

(3.1B) $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M$ a podmínek nezápornosti

(3.1C) $\quad x_i \ge 0$ pro všechna $i = 1, 2, ..., n$.

Z matematického pohledu jde tedy o úlohu nalezení vázaného extrému (maxima) obecně nelineární funkce na množině rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M$. Jak je známo, vzhledem k tomu, že omezující podmínka spolu s podmínkami nezápornosti proměnných (3.1C) představuje kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu, nabývá jakákoliv spojitá a ve všech proměnných rostoucí nelineární funkce svého maxima na hranicích takovéto množiny. Lze tedy rozpočtové omezení stejně dobře psát ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$.

Úloha uvedeného typu se standardně řeší s použitím Lagrangeova multiplikátoru. Při této reformulaci nabývá kriteriální funkce tvar

(3.2) $$Max\; u\,(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M\right),$$

kde λ je právě zmíněný Lagrangeův multiplikátor. S touto (hodnotou neznámou) veličinou se zachází obdobně jako s jinými proměnnými : v dalším ji budeme považovat za funkci implicitně závislou na „parametrech úlohy“ tzn. na cenách obsažených v cenovém vektoru $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ a na příjmu jednotlivce M.

Stejně jako v jiných extremálních úlohách postupujeme dále tak, že jednotlivé parciální derivace extremalizované funkce $u(\boldsymbol{x}) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M\right)$ ve vztahu (6) podle proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ a λ položíme rovny nule. Po přeskupení členů dostaneme

(3.3A) $\quad u_r = \lambda \cdot p_r$ pro $r = 1, 2, ..., n$ (derivace podle x_r)

(3.3B) $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ (derivace podle λ).

Rovnice (3.3A) a (3.3B) jsou nutnými podmínkami k tomu, aby pro řešený optimalizační problém existovalo řešení, tedy maximum. Povšimněme si, že těchto podmínek je právě stejný počet (tj. $n+1$) jako je neznámých veličin modelu (velikostí poptávky po jednotlivých komoditách $x_1, x_2, ..., x_n$ a λ).

V lineární situaci by se dalo očekávat, že řešení bude dáno jednoznačně. Zde však n vztahů (7A) nemusí být lineárními funkcemi, přičemž jejich tvar je závislý na specifikaci užitkové funkce u, v níž jako argumenty vystupují neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$.

Poznámka 1 Od typické úlohy matematického programování se řešený problém liší ve dvou směrech:

a) Tvar omezení (3.1B) je představován jedinou nadrovinou n-rozměrného prostoru (omezující množství komodit jen "shora")

b) Užitková funkce $u(x)$ bude mít zpravidla komplikovanější tvar, než je obvykle lineární funkce konvenčního problému lineárního programování a problém nalezení optima bude představovat zpravidla podstatně komplikovanější analytickou úlohu než tu, která může být řešena technikami matematického programování (např. simplexovou metodou).

Poznámka 2 *Jak patrno, v předchozím nerozlišujeme mezi důchodem spotřebitele a jeho výdajem vynaloženým na nákup užitek mu přinášejících komodit. V realitě se spotřebitel bude rozhodovat nejen podle příjmu aktuálního období, ale rovněž podle stavu svých úspor, možných půjček, jiných nutných výdajů v rozhodovacím období apod. V tomto smyslu je zřejmé, že příjem může být hodně vzdálen bezprostřední hotovosti v peněžence a bude silně záviset na tom, zda spotřebitel řeší „optimalizační problém“ nákupu potravin pro denní potřebu nebo nákladnějšího pořízení statku dlouhodobé spotřeby (např. campingového automobilu).*

Z podmínek (3A) tedy bezprostředně plyne, že v rovnovážné situaci (kdy se poptávka spotřebitele po jednotlivých komoditách při maximálním užitku přizpůsobí cenovým relacím) bude platit vztah

(3.4) $$\lambda = \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = ... = \frac{u_n}{p_n}$$

Vztahy (3.4) představují soustavu podmínek nutných pro dosažení rovnovážného stavu. Vyjadřují požadavek, aby podíl mezního užitku kterékoliv komodity a její jednotkové ceny byl konstantní pro všechny uvažované komodity. Sekundárně je odtud vidět, že také veličina λ (uplatňující se jako Lagrangeův multiplikátor) je rovna právě těmto podílovým hodnotám. O rovnováze lze oprávněně mluvit tehdy, jestliže je dosaženo maximálního užitku při daném příjmu a dané množině relativních cen. Jakékoliv vychýlení z rovnováhy vede vždy ke snížení hodnoty užitku spotřebitelem pociťovaného.

Jestliže tedy každé u_r představuje mezní užitek (úměrný v rovnovážné situaci ceně r-té komodity) , můžeme veličině λ přisoudit interpretaci jako „mezní užitek peněz“ (který je ovšem také funkcí cen p_i, $i = 1, 2, ..., n$ a důchodu M). Za těchto okolností pak platí pro podíl mezních užitků (tedy mezní míru substituce mezi r-tou a s-tou komoditou) vztah

(3.5A) $$m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = \frac{p_r}{p_s}$$ a podobně (3.5B) $$m_{r\lambda} = \frac{u_r}{\lambda_s} = \frac{p_r}{1}$$

Na základě tohoto zjištění můžeme říci, že mezní míra substituce mezi r-tou a s-tou komoditou je v rovnovážné situaci rovna podílu jednotkových cen obou těchto komodit. Cenu p_r lze pak interpretovat jako mezní míru substituce mezi r-tou komoditou a penězi.

Maximalizační problém, tak jak byl představen vztahy (3.1), může být ovšem formulován i duálním způsobem. Maximalizace účelové funkce (3.1A) za podmínek (3.1B-C) má svou duální formulaci následujícím tvaru

(3.6A) $$Min\, M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ za podmínky

(3.6B) $$u(\boldsymbol{x}) = u^0$$ opět při $p_i > 0$ pro libovolné i.

(3.6C) $$x_i \geq 0$$ pro všechna $i = 1, 2, ..., n$.

Maximalizuje-li spotřebitel svůj užitek z komoditní kombinace při rozpočtovém omezení (3.1B), řeší v podstatě tentýž problém, jako je minimalizace jím vynaložených výdajů spojených pořízením komodit v množstvích, která zaručují dosažení užitku na požadované hladině u^0. V tomto smyslu lze s plnou oprávněností mluvit o dvojici duálních úloh.

Dále, protože maximalizace užitku a minimalizace s tím souvisejících nákladů vedou k téže (optimální) volbě komoditních množství x_i (parametry úlohy jsou $\boldsymbol{p}$ a M), výdaj při prvé z úloh se musí rovnat minimálním nákladům v duálním problému. V původním problému představuje řešení soustava Marshallových poptávkových funkcí $g_i(M, p)$, zatímco v duálním problému jsou determinujícími veličinami - argumenty poptávkových funkcí - úroveň užitku u^0 a cenový vektor $\boldsymbol{p}$. Tyto poptávkové funkce minimalizující výdaje označíme $h_i(u, \boldsymbol{p})$ a jsou známy jako Hicksovy (také kompenzované) poptávkové funkce. Z interpretačního hlediska jsou charakteristické tím, že informují o tom, jak jsou poptávky x_i ovlivněny/kompenzovány cenami $\boldsymbol{p}$ (při pevném u).

Obě řešení dvou výše uvedených problémů musí být, přirozeně, táž. Proto lze psát

(3.7) $$x_i = g_i(M, \boldsymbol{p}) = h_i(u, \boldsymbol{p})$$ pro $i = 1, 2, ..., n$.

Každé z těchto řešení přitom můžeme zpět dosadit do výchozího příslušného problému. V prvém případě obdržíme nejvyšší dosažitelný užitek, ve druhém případě nejmenší dosažitelné náklady. Lze tedy psát

(3.8) $$u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = u[g_1(M, \boldsymbol{p}), g_2(M, \boldsymbol{p}), ..., g_n(M, \boldsymbol{p})] = \psi(M, \boldsymbol{p})$$

(3.9) $$M = \sum_{k=1}^{n} p_k h_k(u, \boldsymbol{p}) = E(u, \boldsymbol{p})$$

Funkce $\psi(M, \boldsymbol{p})$ v (3.8) vyjadřuje maximální dosažitelný užitek (při pevně daném příjmu M a cenovém vektoru $\boldsymbol{p}$). Nazývá se ***nepřímá užitková funkce*** a může být definována vztahem

(3.10) $$\psi(M, \boldsymbol{p}) = \underset{\boldsymbol{x}}{Max}\left[u(\boldsymbol{x}); \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = M \right]$$

Funkce $E(u,\boldsymbol{p})$ v (3.9) vyjadřuje minimální dosažitelný výdaj (při požadované úrovni užitku u^0 a vektoru cen $\boldsymbol{p}$). Nazývá se ***výdajová funkce*** a lze ji definovat vztahem

(3.11) $$E(u^0,\boldsymbol{p}) = \underset{\boldsymbol{x}}{Min}\left[\sum_{k=1}^{n} p_k x_k ; u(\boldsymbol{x}) = u^0\right]$$

Nepřímá užitková a výdajová funkce jsou vzájemně velmi úzce propojeny. Protože platí $E(u,\boldsymbol{p}) = M$, můžeme invertovat argument u , abychom dostali u jako funkci M a $\boldsymbol{p}$, což nám dá $u = \psi(M,\boldsymbol{p})$. Úplně obdobně inverze vztahu $u = \psi(M,\boldsymbol{p})$ povede přímo k relaci $E(u,\boldsymbol{p}) = M$. Obě funkce tedy obsahují v podstatě tutéž informaci (zapsanou jen pomocí jiných argumentů, byť $\boldsymbol{p}$ zůstává v obou).

Jsme tedy plně oprávněni rovnocenně užít v dalším těchto zápisů

(3.12A) $$x_i = g_i(M,\boldsymbol{p}) = g_i(E(u,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}) = h_i(u,\boldsymbol{p}) \qquad \text{pro } \boldsymbol{i} = 1,2,\dots,n \,.$$

(3.12B) $$x_i = h_i(u,\boldsymbol{p}) = h_i(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}) = g_i(M,\boldsymbol{p}) \qquad \text{pro } \boldsymbol{i} = 1,2,\dots,n \,.$$

Přejděme nyní k otázce, jak v reálné úloze, kdy máme specifikován tvar přímé užitkové funkce $\boldsymbol{u}(x)$ a dány parametry rozpočtového omezení (ceny $p_k, \boldsymbol{k} = 1,2,\dots,n$ a příjem M .) nalezneme rovnovážný bod. Základním vodítkem k jeho nalezení jsou nutné podmínky rovnováhy (3.4). Předem uveďme, že řešení $n+1$ rovnic (3.3A), (3.3B) nemusí být nijak jednoduché, a to nejen vzhledem k jejich obecně velkému počtu; v části [2.5], kde nalezneme několik příkladů, je většina z nich omezena jen na nejjednodušší dvoukomoditní situaci, ale i vzhledem k často značné „technické“ obtížnosti výpočtu řešení (poptávek x_k a λ) $n+1$ (obecně nelineárních) rovnic. Pro úplnost dodejme, že nalezení poptávkových rovnic v explicitním tvaru (tj. kdy jsme schopni zapsat vždy přímo $x_i = f_i(M,\boldsymbol{p})$ není obecně (aniž připojíme nějaká dodatečná a třeba málo realistická omezení) ničím zajištěno.

Přesto však zmiňme dva postupy, které se při hledání tvarů poptávek někdy účinně uplatní:

Postup A

Postupuje se takovým způsobem, že ze vztahu (3.4) určíme $\dfrac{u_j}{u_k} = \dfrac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}} = \dfrac{p_j}{p_k}$, čímž eliminujeme λ a následně využijeme tyto podmínky spolu s rozpočtovým omezením. Takto lze vyvodit poptávky např. u obecné $n-$ komoditní Cobb-Douglasovy funkce, viz [ ].

Postup B

Základní vztah $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \lambda..p_j$ vynásobíme x_j a poté těchto n vztahů sečteme přes všechna j. Tím dostaneme, protože $\sum p_j x_j = M$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.x_j = \lambda M \quad \text{neboli} \quad \lambda = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.x_j}{M} \quad \text{a následně} \quad \frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.x_j} = \frac{p_k}{M}$$

Na levé straně nyní máme jen funkce $\boldsymbol{x}$ (již bez p_j, M, λ, pouze s parametry užitkové funkce $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$), které můžeme, přinejmenším v principu, řešit jako funkce podílů ($\frac{p_k}{M}$).

Vraťme se ještě k zápisu Sluckého rovnice: Vedle zápisu

(6.18A) $$\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} - x_r . \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M}$$

se uplatňuje ještě ekvivalentní zápis

(6.18B) $$\frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} + x_r . \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M}$$

Poznámka 11

Všimněme si, že důchodový člen je vyjádřen důsledně v *Marshallovském* zápisu (jinak to ostatně ani nemůže být, protože obsahuje derivaci poptávky x_s podle příjmu M). Substituční člen je naopak reprezentován *Hicksovským* zápisem. Sluckého rovnice tedy vyjadřuje – ať u v podobách (6.18A) nebo (6.18B) - propojení obou těchto zápisů.

Poznámka 12

Ve dvou možných zápisech výrazu $X_{rs} = \lambda . . \frac{U_{rs}}{U}$ (obecně nezávislého na kompenzaci změny ceny změnou příjmu) a $X_{rs} = \frac{\partial x_s}{\partial p_r}$ (platného při kompenzované změně poptávky) je jeden možná málo postřehnutelný rozdíl: V prvním případě se v něm prolínají prvky *Marshallovského* i *Hicksovského* pojetí: protože podíl determinantů je funkcí pouze *Hicksovského* $\boldsymbol{u}$, výchozí vztah pro λ je naopak psán v *Marshallovských* argumentech $M, \boldsymbol{p}$. Kompenzace poptávky však vede k toliko *Hicksovskému* pojetí, takže má oprávnění jen zápis $X_{rs}(u, p)$, neobsahující M. Člen X_{rs} zde představuje změnu poptávky $h_s(u, p)$ při změně ceny p_r.

Zajímavé je, že vyjdeme-li z výsledků uvedených v části [4], můžeme dospět ke Sluckého rovnici (a to jednodušeji, než při vyvozování z přímé užitkové funkce $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$) dvěma dalšími cestami. Užijeme přitom poznatků, které máme o výdajové a nepřímé užitkové funkci.

První z postupů je vychází z rozpisu (3.12A), podle něhož platí

$$h_s(u,\boldsymbol{p}) = x_s(E(u,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}) = x_s(M,\boldsymbol{p}) \quad .$$

Pokud nyní tento vztah derivujeme podle p_r, dostaneme

(3.13) $$\frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_m} . \frac{\partial p_m}{\partial p_r} + \frac{\partial x_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial E(u,\boldsymbol{p})} . \frac{\partial E(u,p)}{\partial p_r} = \frac{\partial x_s}{\partial p_r} .1 + \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M} . \frac{\partial E(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r}$$

a dále, aplikujeme-li na něj *Shephardovo lemma* (4.12), na základě kterého platí

$$\frac{\partial E(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = x_r(u,\boldsymbol{p}) \quad ,$$

máme

(3.14) $$\frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} + x_r(M,\boldsymbol{p}).\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M}$$

a následně po přeskupení dostáváme přesnou korespondenci s (6.18):

$$\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} - x_r(M,\boldsymbol{p}).\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M} \quad \text{pro libovolná } \boldsymbol{r},\boldsymbol{s} = 1,2,....,\boldsymbol{n}\,.$$ □.

Ve druhém případě vyjdeme z analogického zápisu (3.12B),

(3.15) $$g_s(M,\boldsymbol{p}) = x_s(u,\boldsymbol{p}) = x_s(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})\ .$$

uplatníme však přitom poznatky o nepřímé užitkové funkci. Derivací podle dostaneme

(3.16) $$\frac{\partial g_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_m}.\frac{\partial p_m}{\partial p_r} + \frac{\partial x_s(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})}{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}.\frac{\partial \Psi(M,p)}{\partial p_r}$$

Z prvního členu zůstane opět jen výraz $\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r}$, protože $\frac{\partial p_m}{\partial p_r} = 0$ pro všechna $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{r}$, zatímco u druhého podle Royovy identity (4.20) máme $\frac{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = -\frac{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}{\partial M}.x_r$ a tudíž

(3.17) $$\frac{\partial g_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} + \frac{\partial x_s(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})}{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}.(-x_r).\frac{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}{\partial M}$$, přičemž ale

$$\frac{\partial x_s(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})}{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}.\frac{\partial \Psi(M,\boldsymbol{p})}{\partial M} = \frac{\partial x_s(\Psi(M,\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})}{\partial M}$$, protože všechna $\frac{\partial p_j}{\partial M} = 0$.

Protože platí (3.12A,B), musí pro derivace (podle argumentů p_i) též platit

$$\frac{\partial g_i(M,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(u,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_i}$$

I zde v tomto případě tedy máme

$$\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} = \frac{\partial h_s(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_r} - x_r(M,\boldsymbol{p}).\frac{\partial x_s(M,\boldsymbol{p})}{\partial M} \quad \text{pro libovolná } \boldsymbol{r},\boldsymbol{s} = 1,2,....,\boldsymbol{n}\,.$$ □.