

## 5 Příklady dvoukomoditních užitkových funkcí

V této části uvedeme několik příkladů z oblasti běžných analytických tvarů, které vyšetříme z hlediska vhodnosti jejich použití jako užitková funkce. Odvodíme dále u nich analytické tvary pro nepřímou užitkovou funkci, výdajovou funkci a pro poptávkové funkce po komoditách, a to jak v Hicksově, tak v Marshallově tvaru. Odvození poptávkových funkcí provedeme buď přímou cestou (na základě využití nutných podmínek pro nalezení rovnovážného bodu), nebo nepřímou z nepřímé užitkové funkce (pomocí Royovy identity) popř. výdajové funkce (pomocí Shephardova lemmatu). Poznamenejme, že z každého jednoduchého funkčního tvaru lze odvodit řadu dalších, uplatníme-li na tento tvar spojitou rostoucí transformaci s vědomím, že (přímá) užitková funkce je určena pouze s ordinální přesností ve smyslu vlastnosti (U5) obecné užitkové funkce.

### 5.1 Lineární užitková funkce

Nejjednodušší možnou specifikací užitkové funkce je lineární funkce tvaru

$$(5.1) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

s těmito omezeními na parametry : konstantní člen = 0 (nutné pro platnost  $u(\mathbf{0}) = 0$ ) a  $\alpha_i > 0$   $i = 1, 2, \dots, n$  (vzhledem k požadavku kladných mezních užitků). Jak se lze ihned přesvědčit, při těchto omezeních vyhovuje lineární tvar všem požadavkům (U1)-(U4),(U6) kladeným na užitkovou funkci. Zřejmě dále  $u_r(\mathbf{x}) = \alpha_r$  pro všechna  $r$  nezávisle na  $\mathbf{x}$ ,  $m_{rs} = \frac{\alpha_r}{\alpha_s}$  (tedy rovněž nezávisle na  $\mathbf{x}$ ) a  $u_{rs}(\mathbf{x}) = 0$  pro všechna  $r, s = 1, 2, \dots, n$ . Jak mezní užitky, tak mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma statky jsou tedy nezávislé na poloze kombinace statků v komoditním prostoru.

Přesto lineární tvar není jako užitková funkce vhodný a v aplikacích se lineární užitková funkce neužívá. Proč tomu tak je, napoví obrázek [2A], který vystihuje situaci pro dvě komodity  $x_1, x_2$  : Na něm jsou zakresleny tři indifferenční křivky odpovídající hladinám užitku  $u^1, u^2, u^3$  při  $u^1 < u^2 < u^3$ . Výdajové omezení tvaru  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  je představováno úsečkou  $AB$  spojující body  $A \equiv \left[ \frac{M}{p_1}; 0 \right]$ ,  $B \equiv \left[ 0; \frac{M}{p_2} \right]$ . Rovnovážný bod je charakterizován stavem, v němž se některá z indifferenčních křivek (při konstantní úrovni příjmu  $M$  a daných cenách  $p_1, p_2$ ) při přibližování zprava shora k počátku poprvé dotkne výdajového omezení. V zakresleném případě je to indifferenční křivka na hladině  $u^1$  dotýkající se výdajového omezení v bodě  $A$ .

Mezní míra substituce je u dvoukomoditní lineární funkce rovna podílu  $m_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  a je tedy

konstantní v celém komoditním prostoru. Dále je patrné, že bod  $A$  bude rovnovážným bodem právě tehdy, jestliže mezní míra substituce bude větší než poměr relativních cen, tedy při  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{p_1}{p_2}$ . Pokud bude tento poměr opačný, nastane rovnováha (ustálení poptávky na

rovnovážné úrovni) v bodě  $B$ . Ve výjimečné situaci, kdy platí  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p_1}{p_2}$ , existuje nekonečná množina rovnovážných bodů představovaných celou úsečkou  $AB$ . Jestliže relativní cenový poměr  $\frac{p_1}{p_2}$  bude vykazovat hodnotu blízkou  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ , potom to bude znamenat, že kolísání kolem

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  povede ke skokovým přesunům rovnovážného bodu z  $A$  do  $B$  a naopak.

Nevhodnost uplatnění lineární funkce jako užtkové vyplývá tedy z následujícího :

a) Substitute mezi komoditami probíhá zpravidla obtížněji, než jak udává konstantní poměr  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ . Zpravidla při dosažení určité (kriticky malé) hodnoty jedné z komodit množství druhé, která ji má nahradit, výrazně vzrůstá, čímž se substitute stává stále obtížnější.

b) Není typické, aby - až na výjimku  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  - bylo rovnovážné řešení charakterizováno stavem, kdy je poptávána jen jedna komodita ( $x_1$  v případě, že rovnováha nastane v  $A$ , resp.  $x_2$ , pokud je rovnováha v  $B$ ).

c) Podobně nepřirozené je alternování (přeskakování) polohy rovnovážného bodu (z  $A$  do  $B$  a naopak) při malé změně poměru  $\frac{p_1}{p_2}$  v okolí hodnoty  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ . Odporuje to pozorovaným setrvačností v chování spotřebitelů ve vztahu k nakupovaným statkům. Navíc, rovnováha je při uvedeném poměru relativních cen vysoce nestabilní.

Nepřímou užtkovou funkci příslušnou k lineární užtkové funkci nelze odvodit z nutných podmínek pro polohu rovnovážného bodu, protože mezní užtky neobsahují jako argumenty příslušné souřadnice (ani pro  $x_1$  ani pro  $x_2$ ). Můžeme však vyjít přímo ze souřadnic, kterými je definován rovnovážný bod (viz též obrázek). Je však třeba přitom rozlišit dva případy :

a) je-li nakupován pouze první statek, pak je rovnováha určena bodem  $A \equiv \left[ \frac{M}{p_1}; 0 \right]$ ,

Poptávková funkce v Marshallově vyjádření má tedy tvar

$$(5.2) \quad {}^M x_1 = \frac{M}{p_1}$$

Nepřímou užtkovou funkci obdržíme snadno dosazením této poptávky do (přímé) užtkové funkce. Dostaneme :

$$(5.3) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 M}{p_1}$$

Výdajovou funkci pak získáme substitucí, při níž zapíšeme levou stranu (5.3) jako  ${}^0 u$  a kde na pravé straně téhož výrazu nahradíme výdaj  $M$  výrazem  $M = E({}^0 u, p)$ . Odtud snadno získáme výraz

$$(5.4) \quad E({}^0 u, p) = \frac{p_1}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

b) je-li nakupován pouze druhý statek, pak je rovnováha určena bodem  $B \equiv \left[ 0; \frac{M}{P_2} \right]$ .

Poptávková funkce v Marshallově vyjádření má nyní tvar

$$(5.5) \quad {}^M x_2 = \frac{M}{P_2}$$

Nepřímou užitkovou funkci a výdajovou funkci obdržíme stejným postupem jako dříve :

$$(5.6A,B) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_2 M}{P_2} \quad E({}^0 u, p) = \frac{P_2}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

Poznámka : Třetí případ představovaný situací, kdy je rovnovážný „bod“ tvořen celou úsečkou AB, není třeba uvažovat zvlášť , neboť jde o jistý „průnik“ obou předchozích. V něm platí  $\alpha_1 p_2 = \alpha_2 p_1$  .

Odvození poptávkových funkcí je možné provést též nepřímo, vyjdeme-li z již známé nepřímé užitkové nebo výdajové funkce. Protože platí

$$(5.7) \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{P_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i M}{P_i^2} \quad \text{pro } i = 1, 2$$

obdržíme výrazy (5.2) resp. (5.5) též aplikací Royovy identity, obdobně jako bychom uplatněním Shephardova lemmatu na (5.4) resp. (5.6B) dostali vztahy

$$(5.8) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0 u}{\alpha_i}, \quad \text{z nichž po dosazení za } {}^0 u = \frac{\alpha_i M}{P_i} \quad \text{máme ihned (5.2), (5.5).}$$

## 5.2 Kvadratická užitková funkce

Ani tento funkční tvar není, jak níže ukážeme, jako užitková funkce vhodný:  $n$ -komoditní ryze kvadratická užitková funkce může být zapsána ve tvaru

$$(5.9) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

při  $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  zajišťujících kladné mezní užitky. Absence konstantního členu vyplývá opět z podmínky  $u(\mathbf{0}) = 0$ . Ryze kvadratická funkce s kladnými koeficienty je konečná, nezáporná, rostoucí ve všech komoditách, spojitá a neomezeně diferencovatelná, není však kvazikonkávní. K přiblížení negativního důsledku nesplnění posledně jmenované vlastnosti stačí uvažovat dvoukomoditní případ

$$(5.10) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

jehož geometrickým vyjádřením je elipsa tvaru

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = u^0 \quad \text{resp.}$$

$$(5.11) \quad \frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2} = 1$$

tedy se středem v počátku a s poloosami  $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}$  resp.  $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}$ . Na obrázku [2B] je zakreslena

situace se třemi indifferenčními křivkami na hladinách užitku  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$  při  $u^1 < u^2 < u^3$ . Výdajové omezení je opět znázorněno úsečkou  $AB$  s rovnicí  $p_1x_1 + p_2x_2 = M$  spojující body

$A \equiv \left[\frac{M}{p_1}; 0\right]$ ,  $B \equiv \left[0; \frac{M}{p_2}\right]$ . Bod  $Q$ , v němž se indifferenční křivka  $u^1$  dotýká výdajového

omezení, však není rovnovážným bodem v plnohodnotném slova smyslu. Naopak, posun z něj po výdajovém omezení v obou možných směrech vede k dosažení bodů (komoditních kombinací), které leží na indifferenčních křivkách o vyšších hladinách užitku, což je v protikladu s požadavkem na vlastnost rovnovážného bodu. Lze pozorovat pouze to, že jsou-li vybrány komodity v množstvích odpovídajících souřadnicím bodu  $Q$ , potom úbytek množství jednoho či druhého statku bude znamenat vždy přechod na nižší indifferenční křivku. To však nemá žádný vztah ke kritériu požadovanému pro rovnovážný bod, aby se komodity nakupovaly v poměrech, které zajišťují nejlevnější možný výdaj (pro danou hladinu užitku).

Na uvedeném obrázku lze též dobře ilustrovat rozdíl mezi rostoucí a kvazikonkávní funkcí. Uvažovaná ryze kvadratická funkce s kladnými  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  je neklesající (je dokonce rostoucí) v každé proměnné, není však kvazikonkávní. Množině dvoukomoditních rostoucích funkcí odpovídá třída indifferenčních křivek, u kterých průběh (zleva shora) po kterékoliv z nich je charakterizován klesající hodnotou  $x_2$  a rostoucí hodnotou  $x_1$ , zatímco kvazikonkávnost navíc mj. vyžaduje, aby mezní míra substituce při tomto pohybu kontinuálně klesala (což u kvadratické funkce splněno není) a aby všechny indifferenční křivky byly pro danou užitkovou funkci vždy "vyklenuty směrem k počátku".

Mezní užitky u ryze kvadratické funkce jsou  $u_1 = 2\alpha_1x_1$ ,  $u_2 = 2\alpha_2x_2$  (a jsou tedy závislé na bodu komoditního prostoru, v němž jsou vyčísleny), mezní míra substituce je rovna  $\frac{\alpha_1x_1}{\alpha_2x_2}$  (a je

tedy rostoucí při snižování  $x_2$  a zvyšování  $x_1$ ).

**Poznámka 1** Je zřejmé, že ke zlepšení vlastností ryze kvadratické funkce nepovede specifikace se zápornými koeficienty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Při nich bude sice tato funkce kvazikonkávní, ale funkce sama bude záporná a klesající, oba mezní užitky budou tedy záporné. Jako užitková funkce je tedy nepoužitelná.

Odvození poptávkových funkcí po komoditách provedeme na základě maximalizace výrazu

$$W = \text{Max}[u(\mathbf{x}) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)] = \text{Max}[\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)]$$

Parciálními derivacemi podle  $x_1$ ,  $x_2$  a  $\lambda$  a jejich anulováním dostaneme tři podmínky:

$$u_1 = 2\alpha_1x_1 - \lambda p_1 = 0 \quad u_2 = 2\alpha_2x_2 - \lambda p_2 = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - M = 0$$

tzn.

$$2\alpha_1 x_1 = \lambda p_1 \qquad 2\alpha_2 x_2 = \lambda p_2 \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

z nichž odvodíme (řešením tří rovnic pro neznámé  $x_1, x_2, \lambda$ ) v závislosti na parametrech úlohy, tj.

$\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2$  a  $M$  poptávkové funkce po obou komoditách jako

$$(5.12) \quad x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \qquad x_2 = \frac{\alpha_1 p_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \qquad \lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)}$$

V obou případech roste poptávka přímo úměrně příjmu  $M$  a nepřímo úměrně s cenou této komodity.

Přístupme nyní k odvození nepřímé užitkové funkce. K tomu stačí dosadit  $x_1, x_2$  z (5.12) do (5.10). Po drobných úpravách dostaneme

$$(5.13) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M^2}{p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1}$$

Nepřímá užitková funkce je tedy rovněž kvadratická v  $M$  a klesající se čtvercem každé z cen  $p_1, p_2$ .

Výdajovou funkci získáme standardně nahrazením levé strany (5.13) pevnou hodnotou  ${}^0 u$  a položením  $M = E({}^0 u, p)$ . Pak již snadno z (5.13) získáme výraz

$$(5.14) \quad E({}^0 u, p) = \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0 u}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Výdajová funkce je tedy odmocninná ve vztahu k hladině užitku

Marshallův tvar poptávkových funkcí lze odvodit též pomocí Royovy identity, přičemž z (5.13) máme

$$(5.15) \quad \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} \qquad \text{a též} \qquad \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} = -\frac{2\alpha_i \alpha_j M^2 p_i p_j}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)^2}$$

zatímco k vyjádření v Hicksově tvaru musíme použít Shephardovo lemma, na základě něhož

$$(5.16) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = 0,5 \cdot \left( \frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0 u}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_i p_i {}^0 u}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_i^2 {}^0 u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}} \quad ,$$

Shodu obou výrazů prověříme např. dosazením výdajové funkce  $E({}^0 u, p)$  za  $M$

$${}^M x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0 u}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_1^2 {}^0 u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}} = {}^H x_1$$

### 5.3 Leontiefova užitková funkce

Tento typ užitkové funkce (též užitková funkce s pevnými koeficienty) lze zapsat ve tvaru

$$(5.17) \quad u(\mathbf{x}) = \text{Min}[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2; \dots; \beta_n x_n]$$

kde  $\beta_i = 1, 2, \dots, n$  jsou nějaké kladné konstanty. Tato užitková funkce je charakterizována indifferenční mapou sestávající z indifferenčních křivek, které mají podobu „rohů“ (vrcholů a hran) neomezených  $n$ -rozměrných kvádrů. Vrcholy přitom leží na polopřímce vycházející z počátku souřadnic.

Pro případ dvou komodit má tato polopřímka rovnici  $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$  a celou situaci lze vyjádřit

obrázkem [2C], který opět obsahuje indifferenční křivky pro tři úrovně užitku  $u^1, u^2, u^3$ . Jako oblast  $X^D$  označíme množinu všech  $[x_1, x_2]$ , pro které platí  $x_1 \geq x_2$  a jako  $X^H$  oblast, v níž platí  $x_2 \geq x_1$ . Hranici obou množin tvaru  $x_1 = x_2$  tvoří polopřímka vycházející z počátku souřadnic pod úhlem  $\phi$ , pro který platí  $\text{tg}\phi = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ .

Jinak je patrné, že Leontiefovská funkce splňuje vlastnosti užitkové funkce, neboť je :

(U1) : reálná konečná a platí  $u(\mathbf{0}) = 0$ , (U2) : neklesající v celé definičním oboru, přesněji rostoucí ve směru přírůstku každé komodity až do hodnoty  $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$ , poté je konstantní,

(U3) spojitá v celém definičním oboru a (U4) kvazikonkávní, neboť funkční hodnota v bodě ležícím na spojnici libovolných dvou bodů komoditního prostoru nikdy neklesne (jak plyne z konvexnosti množin) pod menší z obou hodnot užitku v krajních bodech. Aplikace (U5) pak vede k obecnějším strukturám komplementárních užitkových funkcí.

Pokud jde o hodnoty mezních užitků, musíme rozlišit oblasti  $X_d$  a  $X_h$  vyznačené na obrázku [2C] :

v oblasti  $X^H$  platí  $u_1 = \beta_1$ , resp.  $u_2 = 0$ .

zatímco

v oblasti  $X^D$  platí  $u_1 = 0$ , resp.  $u_2 = \beta_2$ .

Dále zřejmě v celém komoditním prostoru platí  $u_{11} = u_{12} = u_{22} = 0$  a pro mezní míry substituce platí :

v oblasti  $X^H$  :  $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = +\infty$ , zatímco v oblasti  $X^D$  :

$$m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = 0.$$

Abychom odvodili u této funkce poptávkové funkce po komoditách, musíme - při neexistenci parciálních derivací na „hřebeni“ zvolit poněkud modifikovaný postup : Je zřejmé, že při jakýchkoliv kladných cenách  $p_1, p_2$  a příjmu  $M$  vzájemně propojených rovnosti  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  bude maxima užitku dosaženo na „hřebeni“. Bod maxima tedy získáme jako průsečík úsečky  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  a polopřímky  $\beta_1 x_1 = \beta_2 x_2$  procházející počátkem souřadnic. Řešením pro  $x_1, x_2$  dostaneme poptávkové funkce ve tvaru :

$$(5.18) \quad x_1 = \frac{\beta_2 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1} \quad x_2 = \frac{\beta_1 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1}$$

Odtud je vidět, že poptávka po každé komoditě je přímo úměrná příjmu  $M$  a nepřímo úměrná ceně vlastní (ale stejně tak i cizí) komodity. Povšimněme si přitom, že z tohoto hlediska jsou komodity  $x_1, x_2$  v typicky komplementárním vztahu.

Uveďme dále, že Leontiefova užitková funkce je (pro libovolné konečné  $n$ ) lineárně homogenní, neboť pro ni platí :

$$(5.19) \quad u(\lambda \mathbf{x}) = \text{Min}[\beta_1 \lambda x_1 + \beta_2 \lambda x_2 \dots \beta_n \lambda x_n] = \lambda \cdot \text{Min}[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots \beta_n x_n] = \lambda \cdot u(\mathbf{x})$$

pro libovolné kladné  $\lambda$  .

Leontiefova užitková funkce je pro určitý typ vzájemného vztahu komodit (jsou-li tyto vzájemně komplementární) výstižným analytickým nástrojem. Naopak, pro situace charakterizované vzájemnou substituibilitou komodit není adekvátně použitelná.

Rovněž u Leontiefovy užitkové funkce lze snadno odvodit nepřímou užitkovou funkci : stačí dosadit nalezené poptávkové funkce ( 5.18 ) do přímé užitkové funkce. Dostaneme

$$(5.20) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \text{Min} \left[ \frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} ; \frac{\beta_2 \beta_1 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \right] = \frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}$$

a vidíme, že oba výrazy v závorce jsou shodné – minima se tedy nabývá v obou bodech současně. V souladu s očekáváním roste nepřímá užitková funkce přímo úměrně s příjmem a nepřímo úměrně s cenou vlastní i nevlastní komodity (opět zaznamenáváme komplementaritu ve vztahu mezi oběma).

Nyní můžeme odvodit poptávkové funkce také alternativně odvodit pomocí Royovy identity. Protože

$$\frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M} = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \quad \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} = - \frac{\beta_1 \beta_2 M}{(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)^2} \cdot \beta_i$$

vede výraz  $\frac{-\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} / \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M}$  přesně ke tvaru poptávkové funkce v Marshallově tvaru, jak jsme ho odvodili vztahem (5.18) .

Dále přistoupíme k určení výdajové funkce. Stačí k tomu nahradit levou stranu v (5.20) pevnou hodnotou užitku  ${}^0u$  a  $M$  nahradit zápisem výdajové funkce  $E({}^0u, p)$ . Odtud již snadno máme

$$(5.21) \quad E({}^0u, p) = \frac{{}^0u (\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)}{\beta_1 \beta_2}$$

Výdaj spojený s nákupem statků je přímo úměrný úrovni užitku a též přímo úměrný cenám komodit.

Konečně rovněž snadno ověříme shodu poptávkových funkcí pro oba tvary (Marshallův i Hicksův): Nejprve odvodíme pomocí Shephardova lemmatu Hicksův tvar poptávkových funkcí. Zřejmě

$$(5.22) \quad {}^H x_i^* = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0 u}{\beta_1 \beta_2} \cdot \beta_j = \frac{{}^0 u}{\beta_i} \quad \text{pro } i, j = 1, 2; i \neq j$$

Tento velmi jednoduchý výraz vyjadřuje lineární závislost poptávky na hodnotě užítku. Za povšimnutí stojí, že poptávková funkce není závislá na ceně žádné z komodit.

Jde o tvar korespondující s Marshallovým vyjádřením poptávek, neboť po dosazení

$$(5.23) \quad {}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \cdot \frac{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}{{}^0 u} \cdot {}^0 u = \frac{{}^0 u}{\beta_1} = {}^H x_1^*$$

#### 5.4 Odmocninná užítková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být uplatněn jako užítková funkce, je funkce tvaru

$$(5.24) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \dots + \beta_n \sqrt{x_n} \quad \beta_i > 0,$$

resp. ve zjednodušeném zápisu pro dvě komodity

$$(5.25) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Opět lze snadno ukázat, že odmocninná funkce je reálná konečná spojitá rostoucí a splňující  $u(\mathbf{0}) = 0$ . Je také kvazikonkávní (a lineárně homogenní stupně 1/2).

Mezní užitky jsou rovny  $u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} > 0$ , resp.  $u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} > 0$ , mezní míra substituce je

$$m_{12} = \frac{\beta_1 \sqrt{x_2}}{\beta_2 \sqrt{x_1}} \text{ a mění se tedy s polohou bodu v komoditním prostoru.}$$

Poptávkové funkce odvodíme obvyklým způsobem, řešením následujících tří rovnic pro  $x_1, x_2, \lambda$ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Některou z metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. komparační s porovnáním a eliminací  $\lambda$ ) získáme řešení pro  $x_1, x_2$  a  $\lambda$ :

$$(5.26) \quad x_1 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} \quad x_2 = \frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}$$

Z uvedených výrazů je patrné, že každá z obou poptávkových funkcí je lineární funkcí příjmu  $M$  a že poptávka je nepřímo závislá na její příslušné ceně. Z uvedených hledisek tedy lze odmocninnou funkci přijmout jako vhodnou pro popis (přínejmenším určité části) standardních užítkových situací.

Znázornění situace na obrázku [2D] představuje trojici indiferenčních křivek  $u^1, u^2, u^3$ , které mají tu vlastnost, že jsou kvazikonkávní a přiléhají v konečných hodnotách k souřadnicovým



osám. Každá z komodit je tedy plně substituovatelná konečným množstvím druhé komodity (stejně by tomu bylo i v  $n$ -rozměrném případě). Rovnovážný bod  $Q$  se nachází v místě dotyku výdajového omezení s indifferenční křivkou  $u^2$ . Vychýlení z něho v kterémkoliv směru úsečky výdajového omezení vede vždy k nižší hladině užitku než  $u^2$ .

Nyní vyšetříme kvazikonkávnost odmocninné užitkové funkce. K tomu stačí vypočítat determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} \\ \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & -\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} & 0 & -\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}} \end{vmatrix}, \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}}; u_2(x) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}}; u_{11}(x) = -\frac{1}{4}\beta_1 x_1^{-3/2}; u_{22}(x) = -\frac{1}{4}\beta_2 x_2^{-3/2}; u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Hodnota determinantu tedy je (pouze 2 ze 6 členů Sarusova rozvoje jsou nenulové)

$$-\frac{\beta_1^2}{4x_1} \cdot \left(-\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}}\right) - \frac{\beta_2^2}{4x_2} \cdot \left(-\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}}\right) = \frac{\beta_1\beta_2}{16x_1x_2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{\beta_2}{\sqrt{x_1}}\right] > 0 \text{ pro libovolná kladná } \beta_1, \beta_2.$$

Odmocninná užitková funkce je tedy kvazikonkávní.

Nepřímou užitkovou funkci  $\Phi(p_1, p_2, M)$  získáme prostým dosazením nalezených poptávkových funkcí (v Marshallově tvaru) do užitkové funkce. Dostáváme

$$\begin{aligned} \Phi(p_1, p_2, M) &= \beta_1 \sqrt{\frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2 \sqrt{\frac{\beta_2 p_1 M}{p_2(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\ &= \beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2 M}{p_1(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1 M}{p_2(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\ &= \sqrt{\frac{M}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} \cdot \left[ \beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right] \end{aligned}$$

nebo po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazu v závorce  $\sqrt{p_1 p_2}$  dále

$$(5.27) \quad \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \frac{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}$$

Nyní odvodíme tvar výdajové funkce příslušné odmocninné užitkové funkce. Vyjdeme z již vyvozené nepřímé užitkové funkce, kde za obecný výraz  $\Phi(p_1, p_2, M)$  dosadíme konkrétní

hodnotu užitku  ${}^0u$  a obdobně (nyní hledaný tvar výdajové funkce  $E(p_1, p_2, {}^0u)$ ) substituujeme z M. Postupně získáme

$${}^0u = \sqrt{\frac{E(p_1, p_2, {}^0u)}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}, \text{ z čehož snadno určíme}$$

$$(5.28) \quad E(p_1, p_2, {}^0u) = \frac{{}^0u^2 \cdot p_1 p_2}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}.$$

Jak patrně, tato výdajová funkce je nezáporná (pro libovolné hodnoty parametrů  $\beta_1, \beta_2$ ), nulová pouze při  ${}^0u = 0$  a rostoucí (s druhou mocninnou)  ${}^0u$ .

Nyní přistoupíme k ilustraci odvození poptávkových funkcí zprostředkovaně, z nepřímé užitkové, resp. výdajové funkce. Z nepřímé užitkové funkce spočteme poptávkové funkce pomocí Royovy identity.

Výpočtem derivací dostaneme

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{M}}{2p_1 p_2} \cdot \frac{(\beta_2^2 \sqrt{p_1 p_2} - (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}})}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{1/2}} \text{ a podobně,}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M} \sqrt{p_1 p_2}}, \text{ a tedy dosazením do Royovy identity}$$

$$x_1^{*M} = -\frac{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M}} = -\frac{\frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{1/2}}}{\frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M} \sqrt{p_1} \sqrt{p_2}}} = \frac{\beta_1^2 M p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}, \text{ což zřejmě odpovídá}$$

prvému z výrazů uvedených v (5.26). Výraz pro  $x_2^{*M}$  bychom odvodili obdobně; obdrželi bychom druhý výraz v (5.26). Jak patrně, Marshallovská poptávková funkce je přímo úměrná příjmu spotřebitele  $M$  a současně je klesající se čtvercem ceny  $p_1$  příslušné komodity.

Alternativně můžeme však získat také poptávkové funkce v Hicksově pojetí. K tomu uplatníme Shephardovo lemma. Dle něho

$$x_1^{*H} = \frac{\partial E({}^0u, \mathbf{p})}{\partial p_1} = \frac{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) {}^0u^2 p_2 - {}^0u^2 p_1 p_2 \beta_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \text{ a po úpravě}$$

$$(5.29) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 {}^0u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2}.$$

Hicksovská poptávková funkce je tedy rostoucí se čtvercem hladiny užitku  ${}^0u$  a klesající s růstem ceny  $p_1$ .

Abychom mohli porovnat oba tvary poptávkových funkcí (Hicksův a Marshallův), stačí např. dosadit do výrazu pro  $x_1^{*M}$  za  $M = E(u, p_1, p_2)$ : Dostaneme

$$x_1^{*M} = \frac{\beta_1^2 p_2^0 u^2 p_1 p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = \frac{\beta_1^2 u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = x_1^{*H} \quad \bar{1}$$

Obdobně bychom mohli postupovat i obráceně. Za  $u$  dosadíme výraz pro nepřímou užitkovou funkci  $\Psi(p_1, p_2, M)$ :

$$(5.30) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{M(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} = x_1^{*M}$$

### 5.5 Logaritmická užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být uplatněn jako užitková funkce, je logaritmická funkce

$$(5.31) \quad u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 \quad \text{pro } x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$$

u níž předpokládáme – za účelem dosažení kladných mezních užitků – podmínky  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ . Definiční obor  $u(x)$  omezující komoditní množství na větší než 1 vylučuje zde z uvažování podmínku  $u(0) = 0$ . Tvar (5.31) neobsahuje aditivní konstantu, která by však mohla být přítomna, pokud bychom definiční obor  $u(x)$  vymezili oblastí :  $x_1 \geq d_1 > 0, x_2 \geq d_2 > 0$  a stanovili hodnotu  $\beta_0$  rovnou  $-\beta_1 \cdot \log d_1 - \beta_2 \cdot \log d_2$ . Mezní užitky

$$\text{jsou zřejmě} \quad u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};$$

takže souřadnice rovnovážného bodu dostaneme řešením tří jednoduchých rovnic pro  $x_1, x_2, \lambda$ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{x_1} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{x_2} = \lambda p_2 \quad \text{a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Jednoduchými úpravami  $p_1 x_1 = \beta_1 / \lambda$ , resp.  $p_2 x_2 = \beta_2 / \lambda$  a dosazením do rozpočtového omezení dostaneme  $\beta_1 + \beta_2 = \lambda M$  neboli  $\beta_1 / M + \beta_2 / M = \lambda$  a odtud poptávky po obou komoditách jako

$$(5.32) \quad x_1^{*M} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \quad x_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2},$$

Ověření, zda je (dvoufaktorová) logaritmická užitková funkce kvazikonkávní, je velmi snadné. Hicksovy podmínky stability zde mají tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \quad , \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2}; \quad u_{11}(x) = -\frac{\beta_1}{x_1^2}; \quad u_{22}(x) = -\frac{\beta_2}{x_2^2}; \quad u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Výpočet determinantu vede k hodnotě

$$|D| = -\left(\frac{\beta_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta_2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{x_1^2}\right) = \frac{\beta_1 \beta_2}{x_1^2 x_2^2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{x_2} + \frac{\beta_2}{x_1}\right], \quad \text{kteřá je evidentně}$$

( při přijatých předpokladech  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$  ) pro kladná množství komodit  $x_1, x_2$  kladná.

Dále odvodíme tvar nepřímé užitkové funkce. Použijeme k tomu prosté dosazení poptávkových funkcí v Marshallově tvaru do přímé užitkové funkce  $u(x^*)$ . Tedy

$$(5.33) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 \log \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \log \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)},$$

kteřýžto výraz lze vyjádřit v několika dalších ekvivalentních tvarech, např.

$$\Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 \log \beta_1 + \beta_2 \log \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2) \log(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2}, \quad \text{neboli}$$

$$(5.34) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = C + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2},$$

kde konstanta  $C$  závisí jen na parametrech (přímé) užitkové funkce.

Všimněme si, že nepřímá užitková funkce je (nehledě na aditivní konstantu  $C$ ) rovněž logaritmická (v argumentech  $\frac{M}{p_1}$  a  $\frac{M}{p_2}$ ). Je dle očekávání rostoucí při rostoucím příjmu  $M$  a naopak klesající v obou cenách  $p_1, p_2$ . Její derivace použijeme níže při výpočtech poptávek pomocí Royovy identity:

Derivace nepřímé užitkové funkce podle ceny  $p_1$  má tvar

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)(-p_1^2)} = -\frac{\beta_1}{p_1}; \quad \text{stejně tak} \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_2} = -\frac{\beta_2}{p_2},$$

Derivace podle příjmu  $M$  obdržíme jako

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \frac{p_2(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 M} \cdot \frac{\beta_2}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{M}.$$

Odtud je mj. patrné, že derivace podle cen jsou obě záporné, zatímco derivace dle příjmu  $M$  nabývá kladné hodnoty. Můžeme spočítat ještě druhé derivace

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1^2} = \frac{\beta_1}{p_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M^2} = -\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{M^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_2^2} = \frac{\beta_2}{p_2^2},$$

z nichž je vidět, že 2. derivace podle cen jsou kladné, zatímco druhá derivace dle příjmu je záporná.

Získané hodnoty 1. parciálních derivací můžeme použít k výpočtu Marshallovských poptávek pomocí Royovy identity. Máme

$$(5.35) \quad X_1^{*M} = \frac{-\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M}} = -\frac{\frac{\beta_1}{p_1}}{\frac{\beta_1 + \beta_2}{M}} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \quad \text{ve shodě s prvním z výrazů v}$$

(5.36).

Analogicky obdržíme  $X_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}$ , opět ve shodě s druhou poptávkovou funkcí v

(5.16).

Nyní můžeme přistoupit k vyvození výdajové funkce  $E(p_1, p_2, {}^0u)$ : Nejprve přepíšeme nepřímou užitkovou funkci do tvaru

$$(5.37) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = C + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \log M - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}.$$

Nyní provedeme substituce  $\Phi(p_1, p_2, M) = {}^0u$  (pevná hodnota) a naopak  $M = E(p_1, p_2, {}^0u)$  (výdajová funkce s argumenty ceny a hladina užitku) neboli

$${}^0u = C + (\beta_1 + \beta_2) \log E(\mathbf{p}, {}^0u) - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}, \quad \text{což dává}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u - C + \log p_1^{\beta_1} + \log p_2^{\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \quad \text{a dále po úpravách}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}) - \log\left(\frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}}\right)}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log\left[\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} (\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}$$

a po odlogaritmování obdržíme

$$(5.38) \quad E(\mathbf{p}, {}^0u) = \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\frac{1}{\beta_1 + \beta_2}}\right\}$$

$$E(\mathbf{p}, {}^0u) = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}$$

Povšimněme si, že výdajová funkce (příslušná logaritmické uživatelské funkci) vykazuje exponenciální růst ve vztahu k užítku  $^0u$  a má mocninný tvar vzhledem k cenám  $p_1, p_2$ .

Hicksův tvar poptávkových funkcí získáme prostřednictvím Shephardova lemmatu následovně:

$$(5.39) \quad x_1^{*H} = \frac{\partial E(p_1, p_2, {}^0u)}{\partial p_1} = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}} (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{p_2}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{p_1}{\beta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} - 1} \frac{\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)}$$

$$= \frac{E(p_1, p_2, {}^0u) \beta_1}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}$$

resp. po dosazení  $E(\mathbf{p}, {}^0u) = M$  je  $x_1^{*H} = \frac{M \beta_1}{(\beta_1 + \beta_2) p_1} = x_1^{*M}$ , což dokumentuje formální shodu s již vyvozenými Marshallovskými poptávkovými funkcemi.

V Hicksově tvaru zaznamenáváme dle očekávání růst poptávky po dané komoditě s růstem hladiny užítku – závislost je exponenciální, intenzita růstu pak nepřímo úměrná součtu parametrů  $\beta_1 + \beta_2$ . Tatož poptávka klesá s růstem ceny  $p_1$ : mocnina u  $p_1$  je (s ohledem na přítomnost této ceny též ve výdajové funkci) rovna  $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} - 1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} < 0$ .

Analogicky bychom dostali poptávku po druhém statku jako

$$(5.40) \quad X_2^{*H} = \frac{E(p_1, p_2, {}^0u) \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}.$$

Ukážeme ještě odvození poptávkových funkcí u logaritmické funkce jako řešení duální úlohy

$$\text{Min} \left[ \sum_{i=1}^n p_i x_i \right] \quad \text{za podmínky} \quad u(\mathbf{x}) \geq {}^0u$$

Ta má v našem případě tvar

$$(5.41) \quad \text{Min} [ p_1 x_1 + p_2 x_2 ] \quad \text{za podmínky} \quad \beta_1 \log\{x_1\} + \beta_2 \log\{x_2\} \geq {}^0u$$

K řešení této úlohy použijeme úpravu na funkcionál obsahující Lagrangeův multiplikátor

$$(5.42) \quad H(x, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda \cdot [\beta_1 \cdot \log\{x_1\} + \beta_2 \cdot \log\{x_2\}],$$

který derivujeme podle  $\lambda, x_1, x_2$ . Dostaneme soustavu tří rovnic, které anulujeme, abychom získali nutné podmínky pro nalezení minima spotřebitelských výdajů:

$$(5.43a) \quad \frac{\partial H(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = \beta_1 \cdot \log(x_1) + \beta_2 \cdot \log(x_2) - {}^0u = 0$$

$$(5.43b) \quad \frac{\partial H(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \beta_1 \cdot x_1^{-1} = 0$$

$$(5.43c) \quad \frac{\partial H(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \beta_2 \cdot x_2^{-1} = 0$$

Porovnáním  $\lambda$  z druhé a třetí rovnice dostaneme vztah  $\frac{p_1 x_1}{\beta_1} = \frac{p_2 x_2}{\beta_2}$  a odtud  $x_2 = \frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} x_1$ .

Dosadíme do první rovnice a máme :

$$(5.44) \quad \log(x_1^{\beta_1}) + \log \left[ \frac{p_1 x_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} \right]^{\beta_2} = {}^0 u$$

Odtud po úpravách

$$\log \left[ x_1^{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{(p_1 \beta_2)^{\beta_2}}{(p_2 \beta_1)^{\beta_2}} \right] = {}^0 u$$

$$\left[ x_1^{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{(p_1 \beta_2)^{\beta_2}}{(p_2 \beta_1)^{\beta_2}} \right] = \exp({}^0 u)$$

dostaneme poptávkovou funkci po první komoditě jako

$$(5.45) \quad x_1^* = \sqrt[\beta_1 + \beta_2]{e^{{}^0 u} \cdot \frac{(p_2 \beta_1)^{\beta_2}}{p_1 \beta_2}}, \text{ jinak také } x_1^* = e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}$$

Následně obdržíme také poptávku po druhém statku

$$x_2^* = x_1^* \cdot \frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} = e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \frac{p_1 \beta_2}{p_2 \beta_1} \text{ neboli}$$

$$x_2^* = e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} - 1} \cdot \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} - 1}$$

$$x_2^* = e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{-\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \text{ neboli}$$

$$(5.46) \quad x_2^* = e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}},$$

což odpovídá Hicksovským poptávkám (5.39) odvozeným již výše z výdajové funkce (5.38).

## 5.6 Mocnná (Cobb-Douglasova) užítková funkce

je představována zápisem ve tvaru

$$(5.47) \quad u(x_1, x_2) = \gamma \cdot x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \quad \text{při omezeních } \gamma > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Mezní užítky získáme snadno jako  $u_i = \beta_i \cdot \frac{u(x)}{x_i}$   $i = 1, 2$ . Uplatníme-li nutné podmínky pro

rovnovážný bod, dostaneme  $\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}$  neboli  $\beta_1 \cdot \frac{u(x)}{p_1 x_1} = \beta_2 \cdot \frac{u(x)}{p_2 x_2}$ , což zapsáno ještě jinak dává

$$(5.48) \quad \beta_1 \cdot p_2 x_2 = \beta_2 \cdot p_1 x_1.$$

Přičteme-li k oběma stranám (5.48) výraz  $\beta_2 \cdot p_2 x_2 = \beta_2 \cdot p_1 x_1$ , dostaneme

$$(5.49) \quad \beta_1 \cdot p_2 x_2 + \beta_2 \cdot p_2 x_2 = \beta_2 \cdot p_1 x_1 + \beta_2 \cdot p_2 x_2 = \beta_2 \cdot M.$$

Odtud již snadno získáme poptávkovou funkci po druhém statku jako

$$(5.50) \quad x_2 = \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} \quad \text{a následně též} \quad x_1 = \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)}$$

Tento tvar Marshallovských poptávkových funkcí pro Cobb-Douglasův funkční tvar lze ještě dále zjednodušit, pokud předpokládáme lineárně homogenní mocninnou funkci (tj. když  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ):

Pak

$$(5.51) \quad x_2 = \frac{\beta_2 M}{p_2} \quad \text{a následně též} \quad x_1 = \frac{\beta_1 M}{p_1}$$

Z obou verzí (5.50) i (5.51) plyne, že poptávky  $x_i$  jsou přímo úměrné důchodu  $M$ , vlastní elasticitě  $\beta_i$  a nepřímo úměrné ceně vlastní komodity  $p_i$ . Vzájemný vztah obou komodit (které jsou substituční) nelze z poptávek přímo vyvodit, protože  $\partial x_i / \partial p_j = 0$ ,  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

Nepřímá užitková funkce je snadno vyvoditelná dosazením (5.50) do (5.47):

$$(5.52) \quad u(x_1(p, M), x_2(p, M)) = \gamma \left( \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} \right)^{\beta_2}$$

$$(5.53) \quad \Psi\left(\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}\right) = \gamma \frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{M}{p_1} \right)^{\beta_1} \left( \frac{M}{p_2} \right)^{\beta_2}$$

a má tedy opět Cobb-Douglasův tvar v argumentech  $M/p_1, M/p_2$ .

Výdajovou funkci dostaneme zpětnou substitucí z nepřímé užitkové funkce. Dostaneme:

$$(5.53) \quad {}^0 u = \gamma \frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}} \cdot p_1^{-\beta_1} p_2^{-\beta_2} M^{\beta_1 + \beta_2}$$

$$(5.54) \quad E(p_1, p_2, {}^0 u) = (\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \sqrt{\frac{{}^0 u \cdot p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}}{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}}.$$

Výdaj dle funkce (5.54) tedy roste se stupněm úměrnosti  $(\beta_1 + \beta_2)^{-1}$  s hladinou užitku a se stupni úměrnosti  $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$  resp.  $\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}$  vůči cenám  $p_1, p_2$ .