

Pracovní text ke cvičení PMSTII ESF MU 2005/2006. Autor S.F., D.H. Určeno pro skupiny 9, 11, 15. Je docela dobře možné, že zde jsou chyby, pozor na to – předem děkuji za upozornění na ně.

1 Integrace na trojúhelníku

Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{pro } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X, Y)$.

Tato úloha by neměla dělat žádné problémy, snad až na určení mezí integrálů. V tomto případě jsou $0 < x < 1$ a $x < y < 1$ nebo $0 < y < 1$ a $0 < x < y$. Zkuste stejné zadání pro hustotu definovanou na různých trojúhelnících, např. $[0, 0][1, 0][1, -1]$ a $[-3, 2][-3, 7][-5, 2]$. Doporučuji si trojúhelníky nakreslit. U posledního je třeba najít rovnici přímky. Vzhledem k tomu, že jsou známy dva body ležící na přímce a obecná rovnice přímky $y = ax + b$, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tu vyřešíme a dostaneme hodnoty a a b .

2 Integrace na eliptické oblasti

Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X, Y)$.

2.1 Výpočet c a $E(XY)$

U výpočtu c je velmi vhodné použít transformaci do polárních souřadnic. Vše je ukázáno na výpočtu $E(XY)$, který je komplexnější.

Množina, přes kterou integrujeme, je tvořena body $[x, y]$, které vyhovují nerovnosti $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, tj.

$$E(XY) = \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy \frac{1}{\pi ab} dy \right] dx$$

Tento integrál je možné spočítat přímo, ale výhodnější bude použití tzv. transformace do zobecněných polárních souřadnic r, φ definovaných vztahy

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

kde $r \geq 0$ udává vzdálenost bodů $[\frac{x}{a}, \frac{y}{a}]$ a $[0, 0]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x . Pokud provedeme takovou transformaci, musíme přidat Jakobián

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = \dots = abr.$$

Dále musíme transformovat meze. Proměnná φ nabývá hodnot od 0 do 2π , protože elipsa leží ve všech kvadrantech. Dolní mez pro r je 0 a horní mez je tvořena body na elipse. Tyto body splňují

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Použitím výše uvedené substituce

$$\frac{a^2 r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1,$$

tj.

$$r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1.$$

Protože $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ a vzhledem k nezápornosti r , bude horní mez rovna 1. (Pozn.: Elipsa je v podstatě jednotková kružnice s proměnnými $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$.)

Integrál bude nyní roven

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (ar \cos \varphi)(br \sin \varphi) \frac{1}{\pi ab} (abr) dr \right] d\varphi \\ &= \frac{ab}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \int_0^1 r^3 dr d\varphi \\ &= \frac{ab}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{ab}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

2.2 Výpočet $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-a}^a x \frac{2\sqrt{1-x^2/a^2}}{\pi a} dx \\ & \text{použijeme substituci } \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{x^2}{a^2} = t^2 \\ -\frac{2x}{a^2} dx = 2t dt \end{array} \right| \\ &= \int_0^0 -\frac{\sqrt{t^2} a 2t}{\pi} dt = 0 \end{aligned}$$

2.3 Výpočet $E(X^2)$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-a}^a x^2 \frac{2\sqrt{1-x^2/a^2}}{\pi a} dx \\ & \text{použijeme substituci } \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \\ \frac{1}{a} dx = \cos t dt \end{array} \right| \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dále s využitím vzorců} \quad \sin x \sin y &= 1/2(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= 1/2(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \end{aligned}$$

(uvažte případ $x = y$)

$$\begin{aligned} &= \frac{2a^2}{4\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t \, dt \right) \\ &= \frac{2a^2}{8\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \, dt \right) \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

3 Domácí úkol

1. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{na množině dané body } [-5; 2], [-5; 7], [-3; 7] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X, Y)$.

2. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X, Y)$.

3. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{(x-3)^2}{4,5} + \frac{(y+5)^2}{2} \leq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jak se změjí jednotlivé charakteristiky (střední hodnoty, rozptyly, kovariance) oproti předcházejícímu příkladu? Je třeba počítat vše znova, nebo lze použít některých (kterých?) jeho výsledků? [Aby jste mohli použít ukázaný postup, je nejprve třeba docílit toho, aby na pravé straně rovnice elipsy byla 1.]