30. března 2006

Pracovní text ke cvičení PMSTII ESF MU 2005/2006. Autor S.F., D.H. Určeno pro skupiny 9, 11, 15. Je docela dobře možné, že zde jsou chyby, pozor na to – předem děkuji za upozornění na ně.

1 Integrace na trojúhelníku

Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{pro } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X,Y)$.

Tato úloha by neměla dělat žádné problémy, snad až na určení mezí integrálů. V tomto případě jsou $0 < x < 1$ a $x < y < 1$ nebo $0 < y < 1$ a $0 < x < y$. Zkuste stejné zadání pro hustotu definovanou na různých trojúhelnících, např. $[0,0][1,0][1,-1]$ a $[-3,2][-3,7][-5,2]$. Doporučuji si trojúhelníky nakreslit. U posledního je třeba najít rovnici přímky. Vzhledem k tomu, že jsou známy dva body ležící na přímce a obecná rovnice přímky $y = ax + b$, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tu vyřešíme a dostaneme hodnoty a a b.

2 Integrace na eliptické oblasti

Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X,Y)$.

2.1 Výpočet c a $E(XY)$

U výpočtu c je velmi vhodné použít transformaci do polárních souřadnic. Vše je ukázáno na výpočtu $E(XY)$, který je komplexnější.

Množina, přes kterou integrujeme, je tvořena body $[x,y]$, které vyhovují nerovnosti $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$, tj.

$$E(XY) = \int_{-a}^{a} \left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy \frac{1}{\pi ab}\, dy \right] dx$$

Tento integrál je možné spočítat přímo, ale výhodnější bude použití tzv. transformace do zobecněných polárních souřadnic r, φ definovaných vztahy

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi,$$

kde $r \ge 0$ udává vzdálenost bodů $[\frac{x}{a}, \frac{y}{a}]$ a $[0,0]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x. Pokud provedeme takovou transformaci, musíme přidat Jakobián

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = \ldots = abr.$$

Dále musíme transformovat meze. Proměnná φ nabývá hodnot od 0 do 2π, protože elipsa leží ve všech kvadrantech. Dolní mez pro r je 0 a horní mez je tvořena body na elipse. Tyto body splňují

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Použitím výše uvedené substituce

$$\frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2}=1,$$

tj.

$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1.$$

Protože $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ a vzhledem k nezápornosti r, bude horní mez rovna 1. (Pozn.: Elipsa je v podstatě jednotková kružnice s proměnnými $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$.)

Integrál bude nyní roven

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (ar\cos\varphi)(br\sin\varphi)\frac{1}{\pi ab}(abr)\,dr\right]\,d\varphi\\
&=\frac{ab}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\int_0^1 r^3dr\,d\varphi\\
&=\frac{ab}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\\
&=\frac{ab}{8\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\,d\varphi=0.
\end{aligned}$$

2.2 Výpočet $E(X)$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-a}^{a} x\frac{2\sqrt{1-x^2/a^2}}{\pi a}\,dx\\
&\quad \text{použijeme substituci} \left|\begin{array}{rcl} 1-\frac{x^2}{a^2} &=& t^2\\ -\frac{2x}{a^2}\,dx &=& 2t\,dt\end{array}\right|\\
&= \int_0^0 -\frac{\sqrt{t^2}a2t}{\pi}\,dt=0
\end{aligned}$$

2.3 Výpočet $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-a}^{a} x^2\frac{2\sqrt{1-x^2/a^2}}{\pi a}\,dx\\
&\quad \text{použijeme substituci} \left|\begin{array}{rcl} \frac{x}{a} &=& \sin t\\ \frac{1}{a}\,dx &=& \cos t\,dt\end{array}\right|\\
&= \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\\
&= \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt
\end{aligned}$$

dále s využitím vzorců $\begin{aligned} \sin x \sin y &= 1/2(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= 1/2(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \end{aligned}$

(uvažte případ x = y)

$$= \frac{2a^2}{4\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t\,dt\right)$$

$$= \frac{2a^2}{8\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t\,dt\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}$$

3 Domácí úkol

1. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{na množině dané body } [-5;2], [-5;7], [-3;7] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X,Y)$.

2. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a koeficient korelace $R(X,Y)$.

3. Náhodné veličiny X a Y mají simultánní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{pro } \frac{(x-3)^2}{4{,}5} + \frac{(y+5)^2}{2} \leq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jak se změní jednotlivé charakteristiky (střední hodnoty, rozptyly, kovariance) oproti předcházejícímu příkladu? Je třeba počítat vše znova, nebo lze použít některých (kterých?) jeho výsledků?
[Aby jste mohli použít ukázaný postup, je nejprve třeba docílit toho, aby na pravé straně rovnice elipsy byla 1.]