2.1 Axiomaticko-testový přístup Irvinga Fishera a jeho současníků

Axiomatická/testová teorie indexních čísel[1], jejímž iniciátorem byl *Irving Fisher* na počátku 20. století, sestává z několika logicky odůvodněných předpokladů, jejichž splnění - lze vyžadovat od každého dostatečně "rozumného" indexního čísla. Výčet ani přesné formulace těchto axiomů/testů nejsou však všemi problémem se zabývajícími autory přijímány jednotně. Zde se přidržíme původních formulací, kategorizace a uspořádání testů zastávaných *Irvingem Fisherem* a jeho současníky. Ve druhé polovině 20.století byly formulovány další testy, které původní *Fisherovu axiomatickou soustavu* svým způsobem „doplňují". Z nich uvádíme jen ty, které jsou četněji komentovány v literatuře a které mohou být elegantně interpretovány. S ohledem na některá pojednání z nedávné doby lze do budoucna již sotva očekávat, že se na této „sestavě" něco ještě podstatněji změní. Zde uvedené axiomy/testy budeme značit **(F1) - (F12)**, přičemž jako prvních 8 axiomů uvádíme ty, které pocházejí z *Fisherova, Walshova, Bowleyho či Frischova období*.

Dobré indexní číslo by mělo vyhovovat co největšímu počtu z těchto požadavků.

(F1w**) test** (*slabé*) **identity** [weak identity test]**:**

Jestliže platí $p(0)=p(1)$ **a** současně $q(0)=q(1)$ **,pak** $\widetilde{P}_{01}=1$**,**což lze psát $P_{00}=1$**.**

(F1s**) test** (*silné*) **identity** [strong identity test]**:**

Jestliže platí $\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}(1)$ **pak** $\widetilde{P}_{01}=1$

říká, že "neutrální" hodnota indexního čísla (vzatého jako podílový ukazatel) je rovna jedné. Shodu cen (příp. i kvantit) v obou obdobích lze pokládat též za "nedostatek času" ke změně komplexu. Test **(F1w)** je splněn všemi uvedenými indexními čísly.

(F2w**) test záměny faktorů** [factor reversal test]**:** $P_{01}\cdot\widetilde{P}_{01}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}$ resp.

(F2s**) „součinový" test**[2] [product test]**:** $$P_{01}\cdot Q_{01}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

požadují, aby hodnota součinu P_{01} a indexního čísla $\widetilde{P}_{01}$ téže konstrukce získaného záměnou cen za kvantity a obráceně (interpretovatelného obvykle jako kvantový index) dávala podíl peněžních agregátů, tj. vynaložených výdajů na komodity v běžném a základním období"[3].

[1] Není podstatné, zda používáme pojem test či axiom. Jde tak či onak o podmínku, kterou určitý konstrukt tj. indexní číslo testujeme z toho hlediska, zda jej splňuje nebo ne, či se na ni díváme jako na postulát vyvozený z elementární ekonomicko-matematické podstaty věci.

[2] Možná ne zcela zřetelně postřehnutelný rozdíl mezi tímto a předchozím testem (F2w) spočívá v tom, že ne vždy je kvantové indexní číslo vytvořeno mechanickou záměnou cen a kvantit z cenového a naopak.

[3] Výraz na pravé straně (F2) by mohl být považován také za určitý typ indexního čísla, avšak při bližším zkoumání zjistíme, že jeho konstrukce není vhodná - viz dále komentář k (F11).

(F3) test záměny období (míst) [time reversal test]: $P_{01} \cdot P_{10} = 1$

znamená požadavek, aby při “inverzním” pohledu na změnu komplexu v čase (návrat do výchozího období) bylo “časově převrácené” indexní číslo reciprokou hodnotou původního. Tentýž požadavek lze analogicky vyslovit při prostorovém srovnání, kde ovšem zpravidla máme libovůli při přiřazení "0" a "1" srovnávaným územním celkům.

(F4s) test okružnosti (též **cirkularity** či **tranzitivity)** [circularity test]: $P_{02} = P_{01}.P_{12}$

požaduje, aby se přechod ze základního období “0” do běžného období “2” (přes meziobdobí “1”) odehrál bez tranzitivního zkreslení (a to při libovolném meziobdobí). Při územním srovnání půjde o analogický požadavek, ať volíme "přestupný" územní celek jakkoliv.

Slabší vyjádření předchozího testu představuje

(F4w) bazický test [base test]:

výraz $P_{01} = \dfrac{P_{02}}{P_{12}}$ **je nezávislý na volbě období „2“.**

Ten (pouze) požaduje, aby podíl P_{02} / P_{12} byl nezávislý na hodnotách $\mathrm{p}(2), \mathrm{q}(2)$ neboli, aby srovnání vývoje spotřeb a cen základního období vůči spotřebám a cenám běžného období prováděné přes třetí časový bod nebylo závislé na hodnotách výchozího období.

(F5) test určenosti [determinateness test]:

P_{01} **je vždy určité, konečné a ne identicky nulové reálné číslo.**

představuje požadavek, aby indexní číslo bylo vždy definováno a mělo konečnou, ne identicky nulovou hodnotu v jakékoliv situaci (např. při nepřítomnosti některé z komodit v základním nebo v běžném období). Zesílenou verzí tohoto testu je níže uvedený axiom **(F12)**.

Další dvojici představují

(F6w) test (*slabé*) **souměřitelnosti** [commensurability test] konstatující toto

Jestliže provedeme *stejnou* proporční změnu měrových jednotek kvantit, tj. $q_1^*(1) = d \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d \cdot q_i(0)$ pro nějaké reálné d >0 a adekvátní změnu cen $p_i^*(1) = d^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d^{-1} . p_i(0)$, potom musí vždy platit $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$, neboli

$\boldsymbol{P}_{01}$ **nezávisí na měrové jednotce komodit** ,

popř.

(F6s) test (*silné*) **souměřitelnosti** konstatující totéž , ovšem za volnější podmínky

pokud ceny i kvantity změníme vzájemně konformně (*každou však v obecně jiném poměru*)

Jestliže platí $q_1^*(1) = d_i . q_i(1)$, $q_i^*(0) = d_i \cdot q_i(0)$ pro nějaký vektor d *s kladnými složkami* a podobně $p_i^*(1) = d_i^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d_i^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$.

Slabá i silná verze testu vyjadřují očekávání, že indexní číslo nesmí být ovlivněno změnou velikosti měrových jednotek komodit analyzovaného souboru: např. v situaci, kdy se mění měrové jednotky, ve kterých uvádíme množství komodit, musí být zachována hodnota indexního čísla vyčíslená před touto změnou a po ní. Jako příklad vezměme situaci, kdy přecházíme z kg na tuny: jednotková cena komodity se 1000-násobně zvětší, avšak současně se také 1000-násobně zmenší původní množství komodity vyjádřené v nové jednotce (kg = 0,001t). Konstrukce indexního čísla musí být vůči těmto změnám invariantní.

(F7w) test (slabé) **úměrnosti** [weak proportionality test]**:**

> **Jestliže platí** $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ **a též** $q_i(1) = q_i(0)$ **pro všechna** i
>
> **a pro nějakou konstantu** $c > 0$**, pak musí platit** $\widetilde{\mathrm{P}}_{01} = \mathrm{c}$ **.**

Upuštěním od druhé podmínky získáme

(F7s) test (silné) **úměrnosti** [strong proportionality test]**:**

> **Jestliže platí** $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ **pro všechna** i (nezávisle na hodnotách kvantit)
>
> **a pro nějakou kladnou konstantu** c**, pak musí platit** $\widetilde{\mathrm{P}}_{01} = \mathrm{c}$ **.**

Axiom **(F7s)** vyžaduje, aby v “ideálním” případě, kdy by ceny všech komodit vzrostly ve stejném poměru (např. c-násobně), bylo cenové indexní číslo rovno příslušné konstantě úměrnosti c. Jiná hodnota by zřejmě signalizovala nekorektnost konstruktu. K platnosti slabé verze tohoto testu postačuje, platí-li tento závěr tehdy, nedojde-li mezi základním a běžným obdobím k žádným změnám v kvantitách..

Dále máme

(F8) test symetrie [symmetry test] vyslovuje požadavek, že

> **Indexní číslo je invariantní vůči jakékoliv permutaci** (záměně) **pořadí** cen **komodit** (při analogické záměně pořadí příslušných kvantit).[4]

Je zřejmé, že závislost hodnoty indexního čísla na pořadí komodit nelze připustit, neboť bychom nemohli přistupovat ke všem statkům v příslušném konstruktu rovnocenně.

Axiom **(F8)** splňují zřejmě všechny v části [2.1] uvedené návrhy "inteligentních" indexních čísel. Protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (jinými slovy jak při aritmetickém, tak geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

---

[4] Z uvedených 8 testů je **Irvingu Fisherovi [1911], [1922]** přímo přisuzováno autorství axiomů **(F1), (F3), (F6), (F8)** a spolu s **C.M.Walshem [1901]** test **(F7)**, zatímco axiom okružnosti **(F4)** formuloval Dán **Harald Ludwig Westergaard [1890]**. Důraz na význam axiomu záměny faktorů **(F2)** kladl zejména holandský ekonom **Ragnar Frisch [1930]**. Test **(F6)** údajně poprvé navrhl již holandský ekonom **N.G.Pierson [1896]** pod názvem **test invariance vůči změnám v jednotkách měření** . Tentýž autor vyslovil poprvé podnět pro test **(F3)**. **E.Laspeyres {1871]** se mj. zasloužil o uvedení testu **(F1s)** představované požadavkem, aby hodnota cenového indexního čísla byla rovna 1, kdykoliv za $\boldsymbol{p(0)}$ a $\boldsymbol{p(1)}$ dosadíme shodné vektory.

(F9) axiom monotónnosti: [monotonicity test]

Jestliže platí $p_i(1) \leq p_i^*(1)$ **pro všechna i** při nezměněných $p(0), q(0), q(1)$,

potom vždy platí $P_{01} \leq P_{01}^*$.

Axiom říká, že taková změna cen všech komodit mezi základním a běžným obdobím, při které jsou alternativně vzaté hodnoty cen $p_i{}^*(1)$ u všech komodit nejméně rovné původním cenám $p_i(1)$ běžného období, musí vést k indexnímu číslu, které je hodnotou aspoň stejně velké jako původní indexní číslo.

(F10) axiom střední hodnoty [mean value test] **[W.Eichhorn – J.Voeller 1976]**

$$\underset{I=1,\dots,N}{Min} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq P_{01} \leq \underset{I=1,\dots,N}{Max} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

požaduje, aby se velikost (cenového) indexního čísla nacházela mezi hodnotami nejmenší a největší individuální poměrové cenové změny.

(F11) axiom invariance vůči změnám v měřítkách [**] **[Y.Vartia [1985].**

Změníme-li peněžní jednotku shodně u všech cen v obou obdobích "0" a "1", tzn. položíme-li $\mathrm{p}^*(0) = d.\mathrm{p}(0)$ **a** $\mathrm{p}^*(1) = d.\mathrm{p}(1)$,

pak při libovolných proporčních změnách měrových jednotek kvantit v základním i běžném období, **přičemž v každém období může jít o jinou proporční změnu v jednotkách měření kvantit, tzn.** $\mathrm{q}^*(0) = b.\mathrm{q}^*(0)$ **a** $\mathrm{q}^*(1) = c.\mathrm{q}^*(1)$, **musíme dospět k původní hodnotě indexního čísla.**

Jestliže tedy změněné indexní číslo (s ohvězdičkovanými veličinami) **označíme** $P_{01}{}^*$,

musí platit $P_{01}{}^* = P_{01}$.

Smyslem testu je, aby "vážení" spotřebami probíhalo vždy srovnatelným způsobem (tedy buď spotřebami vždy ze základního nebo vždy z běžného období). Tomuto testu nevyhovuje např. konstrukt objevující se na pravé straně testu záměny faktorů **(F2)**, pokud bychom uvažovali o jeho použití též jako jistého "indexního čísla".

(F12) axiom konzistence při mizející komoditě [**]**[Erwin Diewert [1992]**,

vyjádřený následovně

$$\lim_{q_N(0) \to 0,\, q_N(1) \to 0} P_{01}{}^{(N)} = P_{01}{}^{(N-1)},$$

kde **výrazy** $P_{01}{}^{(N)}, P_{01}{}^{(N-1)}$ **označují totéž indexní číslo, jednou spočtené včetně, podruhé bez určité (pro jednoduchost zápisu řekněme N-té) komodity**:

Pokud se množství kterékoliv komodity neomezeně zmenšuje, musí být limitním výrazem indexní číslo vytvořené pouze ze zbývajících $N-1$ **komodit.**

2.2 Nekonzistence a neúplnost Fisherovy axiomatické soustavy

Rozsáhlý „sortiment“ v úvahu přicházejících indexních čísel a početný okruh testů spojených s vyšetřováním teoretických vlastnosti vede k položení tří základních otázek:

a) **Je** (přinejmenším všech prvních **8 testů** **(F1)** - **(F8)**) **vzájemně nezávislých ?**

b) **Je daná soustava testů/axiomů vzájemně konzistentní, resp. jinými slovy: existuje indexní číslo splňující všechny testy ?**

c) **Vede splnění všech testů, případně omezení se na nějakou vybranou podskupinu z nich, k určení konkrétního tvaru indexního čísla ?**

Pokud jde o **soustavu původních 8 Fisherových testů**, **je** (bohužel) **odpověď** na každou z těchto otázek **záporná**.

Poznámka 1 **Ne všechny z původní soustavy testů jsou nezávislé, jak je snadno vidět např. ze dvou následujících protipříkladů:**

Tvrzení 1. **Z axiomu úměrnosti vyplývá splnění axiomu** (silné i slabé) **identity.**
Ověření: Platí-li v **(F5)** $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ pro nějakou konstantu $c > 0$, pak volbou této konstanty $c = 1$, dostáváme $p_i(1) = p_i(0)$**.** Pak ovšem implikace spojená s platností implikace v **(F5):** $\widetilde{P}_{01} = c.P_{01}$ znamená $\widetilde{P}_{01} = P_{01}$**.** Uvedené platí nezávisle na tom, co se děje s kvantitami.

Tvrzení 2 **Z axiomů okružnosti a identity vyplývá splnění axiomu záměny období.**
Ověření: Platí-li podle **(F4s)** $P_{02} = P_{01}.P_{12}$**,** resp. $P_{01} = \dfrac{P_{02}}{P_{12}}$ při nenulovosti P_{12} , pak speciální volbou meziobdobí „2“ situovanou do období „0“ (to je přípustné) dostaneme

$P_{01} = \dfrac{P_{00}}{P_{10}}$, což spolu s **(F1w)** dává implikaci v **(F3)**. Ztotožníme-li u bazického testu **(F4w)** období „2“ se základním obdobím „0“,.pak se s podmínky $P_{01} = \dfrac{P_{02}}{P_{12}}$ stane identita $P_{01} = \dfrac{P_{00}}{P_{10}}$ a využitím platnosti **(F1)** dostáváme ihned **(F3).**

Poznámka 2
Soustava původních 8 Fisherových testů (F1)-F(8), tím spíše pak se zahrnutím dalších (T9)-(T12) **není vzájemně konzistentní.** Na **neslučitelnost současného splnění testů okružnosti (F4w)**, **určenosti (F5)** a **souměřitelnosti (F6w)** poukázal již **Ragnar Frisch**. Jím podaný důkaz však nebyl dostatečně obecný. O něco později se obdobným problémem zabýval **Abraham Wald**[1]**[1937],** který nalezl vzájemný rozpor v trojici testů **(F7s)**, **(F4s)** a **(F2w)**. Oba autoři přitom předpokládali, že indexní čísla (cenová i kvantová) jsou derivovatelná podle cen p_i i kvantit.q_i. Jimi podané důkazy však nebyly později shledány za plně korektní.

První exaktní důkazy o rozpornosti některých testů podali matematičtí ekonom Ind **Subramanian Swamy** a Japonec **K.Mizutani**[1]. Uplatnili přitom poznatky z teorie funkcionálních a parciálních diferenciálních rovnic. O něco později (za slabších předpokladů položených na indexní číslo a bez potřeby diferencovatelnosti indexního konstruktu podle argumentů) provedl zevrubnou analýzu problému **Wolfgang Eichhorn**. Důkazy jím podané jsou ryze analytické a nevyžadují žádné předpoklady ve vztahu k diferencovatelnosti indexního čísla (dle cen resp. kvantit) Na další nekonzistence (případně zahrnující i některé níže uvedené testy) upozornili a příslušné věty vyslovili **P.Samuelson [1974],W.Eichhorn [1976]** a **Eichhorn a Voeller [1976].**

Poznámka 3

Není znám (a patrně neexistuje) **případ, kdy by z** jakékoliv konzistentní **podsoustavy testů (F1)-F(8) bylo možno přímo vyvodit konkrétní tvar indexního čísla.**

W.Eichhorn [1976] ale ukázal, že indexní číslo splňující současně bazický test **(F4w),** test souměřitelnosti **(F6w)**, popř. ještě test záměny faktorů **(F2w)** musí mít dosti speciální tvar.

Poznámka 4

Pokud jde o **modifikovanou soustavu 20 Diewertových testů (zahrnujících s výjimkou (F2) a (F4) zbývající testy Fischerovy, je odpověď** na první otázku **kladná**, neboť právě **ideální Fisherův index splňuje všech 20 testů.**[5]

---

[5] Je ovšem třeba dodat, že, aniž je tím autor podezírán, že volba testů je do určité míra podřízena indexu Fischerova typu.

2.3 Poznámky k podmínkám splnění některých testů

Účelem testu **(F12)** je, podobně jako u **(F5)**, ošetřit situace, kdy není přítomna některá komodita a zabránit, aby při její nepřítomnosti došlo ke zhroucení hodnoty indexního čísla. Lze ho považovat za určité zpřesnění axiomu určenosti **(F5)**; ten sám o sobě nespecifikuje, jak má vypadat výraz při výpadku jedné nebo více komodit.

Požadavku vyžadovanému testem **(F12)** zpravidla nevyhovují indexní čísla založená na geometrickém průměrování.

Testu okružnosti **(F4)** vyhovuje jen relativně malý počet indexních čísel. Stojí za zmínku, že v r.1979 dokázali **Funke, Hacker a Voeller**, že indexní číslo, které má tento axiom splňovat a současně vyhovuje určitým podmínkám regularity zaručujícím, že i z jiných hledisek půjde o „rozumné“ indexní číslo, musí mít tvar vyjádřitelný obecným (váženým) geometrickým průměrem, u kterého budou váhy splňovat podmínky

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \quad \text{a} \quad \alpha_i > 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,N\,.$$

Z uvedených tedy tento axiom **splňují** pouze **Jevonsův a Törnquistův index**.

Pokud jde o axiom **(F4)**, ukázalo se, že jeho přesnou platnost lze oželet, pokud zkoumané indexní číslo vyhovuje tomuto testu aspoň s určitou přibližností. Již Irving Fisher v tomto směru shledal, že v praktických situacích, kdy pracujeme s reálnými ekonomickými daty, jsou odchylky u P_{02}^{F} od součinu $P_{01}^{F}.P_{12}^{F}$ obvykle velmi malé. Podobná zkušenost byla získána i u dalších indexních čísel, které zacházejí symetricky v vahami, jako je Walshovo indexní číslo P_{01}^{W}, případně i jiná.

Pouhý počet splněných testů však není jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž záměr objektivizovat či neutralizovat vliv volby období, která se objevuje v konstrukcích Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu staví tato indexní čísla nad "nesymetricky formulovanými" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

2.4 Rozšíření Fisherovy axiomatické soustavy

Stanovit, které z uvedených 12 testů jsou více "fundamentální" než jiné, není dost dobře možné a názory jednotlivých autorů se v hodnocení dosti liší. Přece však lze vyslovit názor, že **axiomy záměny faktorů (F2) okružnosti (F4)** a snad i **(F11)** lze považovat za ty, jejichž nesplnění lze bez větší újmy tolerovat. Pokud jde o „samozřejmý“ požadavek vyjádřený testem **(F8)**, lze říci, že jeho splnění je nutné; protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (tj. slovy při aritmetickém i při geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Patrně nejpodrobnější rozvedení axiomaticko-testového přístupu lze nalézt v nedávné **Diewert**ově práci **[1992]**, kde autor **dospívá k systému** celkem **20 testů**, které člení do 5 následujících skupin :

- **4 „samozřejmé“ testy**, mezi něž patří ***spojitost*** a ***nezápornost*** kteréhokoliv indexního čísla ve všech prvcích vektorů $\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)$, dále *test silné identity* požadující, aby $P_{01} = 1$ vždy, když platí $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0)$ [6], a též symetrický požadavek ve vztahu k neměnícím se kvantitám, kde je vyžadováno, aby $P_{01} = \sum p_i(1)q_i \big/ \sum p_i(0)q_i$ vždy, když platí $\boldsymbol{q}(1) = \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}$.
- **4 testy „homogenity“**, mezi které náleží mj. ***silnější verze testu úměrnosti* (F7)** požadující, aby platilo $P_{01}{*} = \lambda.P_{01}$, jestliže v indexním čísle $P_{01}{*}$ operujeme s $\lambda -$násobkem cenového vektoru $\boldsymbol{p}(1)$, dále obdobný ***test inverzní úměrnosti v cenách základního období* a dva *testy invariance vůči proporčním změnám v kvantitách základního a běžného období*** požadující, aby se cenové indexní číslo nezměnilo, jestliže se proporčně změní kvantity v základním resp. v běžném období.
- **5 testů invariance a symetrie** ; Je sem řazen ***test symetrie při záměně pořadí komodit* (F8), dále *test souměřitelnosti* (F6)** - zde nazýván *testem invariance vůči změnám měrových jednotek*, dále ***test záměny období* (F3) a dvojice testů** nazvaných ***testy záměny cen,*** resp. ***kvantit*** vyjadřující požadavky na neměnnost cenového indexního čísla při prohození kvantit základního a běžného období a stejně tak *vice versa* ve vztahu ke kvantovému indexnímu číslu.
- **3 testy střední hodnoty**; Kromě (F10) sem patří též analogický test střední hodnoty formulovaný pro Q_{01} a dále striktní **požadavek na to, aby indexní číslo vždy leželo mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem**, tzn. aby pro cenové platila nerovnost $P_{01}{}^{P} \leq P_{01} \leq P_{01}{}^{L}$.
- **4 testy monotónnosti**, z nichž jedním je právě **test (F9)**. Další 3 požadavky na monotónnost jsou zde vysloveny nejen ve vztahu ke změně cen v $p(1)$, ale též vůči změnám v $p(0), q(1), q(0)$.

V uvedeném **Diewertově souhrnu 20 testů** nejsou zahrnuty zde formulované testy určenosti **(F5)**, dále test **(F12)**, který je jeho zesílením, ani **axiom okružnosti (F4)**, který autor posuzuje mimo kontext bilaterálních indexů. Samostatně jako 21.test je uvažován **(F2)**.

[6] Za zmínku stojí, že **z testu silné identity (F1s) plyne (F1w)** , přičemž tato vlastnost plyne též z **(F7)**,
což ostatně ukázal již **C.M. Walsh [1901]**.