2.4 Příklady dvoukomoditních užitkových funkcí

V této části uvedeme několik příkladů z oblasti běžných analytických tvarů, které vyšetříme z hlediska vhodnosti jejich použití jako užitkové funkce. Odvodíme dále u nich analytické tvary pro nepřímou užitkovou funkci, výdajovou funkci a pro poptávkové funkce po komoditách, a to jak v *Hicksově*, tak v *Marshallově tvaru*. Odvození poptávkových funkcí provedeme buď přímou cestou (na základě využití nutných podmínek pro nalezení rovnovážného bodu), nebo nepřímo z nepřímé užitkové funkce (pomocí *Royovy identity*) popř. výdajové funkce (pomocí *Shephardova lemmatu*). Poznamenejme, že z každého jednoduchého funkčního tvaru lze odvodit řadu dalších, uplatníme-li na tento tvar spojitou rostoucí transformaci s vědomím, že (přímá) užitková funkce je určena pouze s ordinální přesností ve smyslu vlastnosti (U5) obecné užitkové funkce.

4.1 Lineární užitková funkce

Nejjednodušší možnou specifikací užitkové funkce je lineární funkce tvaru

(4.1) $$u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

s těmito omezeními na parametry : konstantní člen = 0 (nutné pro platnost $u(\boldsymbol{0}) = 0$) a $\alpha_i > 0$ $i = 1, 2, ..., n$ (vzhledem k požadavku kladných mezních užitků). Jak se lze ihned přesvědčit, při těchto omezeních vyhovuje lineární tvar všem požadavkům (U1)-(U4),(U6) kladeným na užitkovou funkci. Zřejmě dále $u_r(\boldsymbol{x}) = \alpha_r$ pro všechna r nezávisle na $\boldsymbol{x}$, $m_{rs} = \dfrac{\alpha_r}{\alpha_s}$ (tedy rovněž nezávisle na $\boldsymbol{x}$) a $u_{rs}(\boldsymbol{x}) = 0$ pro všechna $r, s = 1, 2, ..., n$. Jak mezní užitky, tak mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma statky jsou tedy nezávislé na poloze kombinace statků v komoditním prostoru.

Přesto lineární tvar není jako užitková funkce vhodný a v aplikacích se lineární užitková funkce neužívá. Proč tomu tak je, napoví obrázek [2A], který vystihuje situaci pro dvě komodity x_1, x_2 : Na něm jsou zakresleny tři indiferenční křivky odpovídající hladinám užitku u^1, u^2, u^3 při $u^1 < u^2 < u^3$. Výdajové omezení tvaru $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ je představováno úsečkou AB spojující body $A \equiv \left[\dfrac{M}{p_1};0\right]$, $B \equiv \left[0;\dfrac{M}{p_2}\right]$. Rovnovážný bod je charakterizován stavem, v němž se některá z indiferenčních křivek (při konstantní úrovni příjmu M a daných cenách p_1, p_2) při přibližování zprava shora k počátku poprvé dotkne výdajového omezení. V zakresleném případě je to indiferenční křivka na hladině u^1 dotýkající se výdajového omezení v bodě A.

Mezní míra substituce je u dvoukomoditní lineární funkce rovna podílu $m_{12} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ a je tedy konstantní v celém komoditním prostoru. Dále je patrné, že bod A bude rovnovážným bodem právě tehdy, jestliže mezní míra substituce bude větší než poměr relativních cen, tedy při $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} > \dfrac{p_1}{p_2}$. Pokud bude tento poměr opačný, nastane rovnováha (ustálení poptávky na rovnovážné úrovni) v bodě B. Ve výjimečné situaci, kdy platí $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, existuje nekonečná množina rovnovážných bodů představovaných celou úsečkou AB. Jestliže relativní cenový poměr $\dfrac{p_1}{p_2}$ bude vykazovat hodnotu

blízkou $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, potom to bude znamenat, že kolísání kolem $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ povede ke skokovým přesunům rovnovážného bodu z A do B a naopak.
Nevhodnost uplatnění lineární funkce jako užitkové vyplývá tedy ***z následujícího*** :

a) **Substituce mezi komoditami probíhá zpravidla obtížněji, než jak udává konstantní poměr** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.
Zpravidla při dosažení určité (kriticky malé) hodnoty jedné z komodit množství druhé, která ji má nahradit, výrazně vzrůstá, čímž se substituce stává stále obtížnější.

b) **Není typické, aby** - až na výjimku $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ - **bylo rovnovážné řešení** charakterizováno **stavem, kdy je poptávána jen jedna komodita** (x_1 v případě, že rovnováha nastane v A, resp. x_2, pokud je rovnováha v B).
c) Podobně **nepřirozené je alternování** (přeskakování) **polohy rovnovážného bodu** (z A do B a naopak) **při malé změně poměru** $\frac{p_1}{p_2}$ **v okolí hodnoty** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Odporuje to pozorovaným setrvačnostem v chování spotřebitelů ve vztahu k nakupovaným statkům. Navíc, rovnováha je při uvedeném poměru relativních cen vysoce nestabilní.

Nepřímou užitkovou funkci příslušnou k lineární užitkové funkci nelze odvodit z nutných podmínek pro polohu rovnovážného bodu, protože mezní užitky neobsahují jako argumenty příslušné souřadnice (ani pro x_1 ani pro x_2). Můžeme však vyjít přímo ze souřadnic, kterými je definován rovnovážný bod (viz též obrázek). Je však třeba přitom rozlišit dva případy:

a) je-li nakupován pouze první statek, pak je rovnováha určena bodem $A \equiv \left[\frac{M}{p_1};0\right]$,

Poptávková funkce v ***Marshallově vyjádření*** má tedy tvar

(4.2)
$$^{M}x_1 = \frac{M}{p_1}$$

Nepřímou užitkovou funkci obdržíme snadno dosazením této poptávky do (přímé) užitkové funkce. Dostaneme :

(4.3)
$$\Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 M}{p_1}$$

Výdajovou funkci pak získáme substitucí, při níž zapíšeme levou stranu (4.3) jako ^{0}u a kde na pravé straně téhož výrazu nahradíme výdaj M výrazem $M = E(^{0}u, p)$. Odtud snadno získáme výraz

(4.4)
$$E(^{0}u, p) = \frac{p_1}{\alpha_2}.^{0}u$$

b) je-li nakupován pouze druhý statek, pak je rovnováha určena bodem $B \equiv \left[0;\frac{M}{p_2}\right]$.

Poptávková funkce v Marshallově vyjádření má nyní tvar

(4.5)
$$^{M}x_2 = \frac{M}{p_2}$$

Nepřímou užitkovou funkci a výdajovou funkci obdržíme stejným postupem jako dříve :

(4.6A,B) $$\Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_2 M}{p_2} \qquad E(^0u, p) = \frac{p_2}{\alpha_2} . ^0u$$

Poznámka 1 Třetí případ představovaný situací, kdy je rovnovážný „bod“ tvořen celou úsečkou AB, není třeba uvažovat zvlášť , neboť jde o jistý „průnik“ obou předchozích. V něm platí $\alpha_1 p_2 = \alpha_2 p_1$.

Odvození poptávkových funkcí je možné provést též nepřímo, vyjdeme-li z již známé nepřímé užitkové nebo výdajové funkce. Protože platí

(4.7) $$\frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i M}{p_i^{\ 2}} \quad \text{pro } i = 1,2$$

obdržíme výrazy (4.2) resp. (4.5) též aplikací *Royovy identity*, obdobně jako bychom uplatněním *Shephardova lemma*tu na (4.4) resp. (4.6B) dostali vztahy

(4.8) $^H x_i = \dfrac{\partial E(^0u, p)}{\partial p_i} = \dfrac{^0u}{\alpha_i}$, z nichž po dosazení za $^0u = \dfrac{\alpha_i M}{p_i}$ máme ihned (4.2), (4.5).

4.2 Kvadratická užitková funkce

Ani tento funkční tvar není, jak níže ukážeme, jako užitková funkce vhodný : n-komoditní ryze kvadratická užitková funkce může být zapsána ve tvaru

(4.9) $$u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + ... + \alpha_n x_n^2$$

při $\alpha_i > 0$, $i = 1,2,....,n$ zajišťujících kladné mezní užitky. Absence konstantního členu vyplývá opět z podmínky $u(\boldsymbol{0}) = 0$. Ryze kvadratická funkce s kladnými koeficienty je konečná, nezáporná, rostoucí ve všech komoditách, spojitá a neomezeně diferencovatelná, není však kvazikonkávní. K přiblížení negativního důsledku nesplnění posledně jmenované vlastnosti stačí uvažovat dvoukomoditní případ

(4.10) $$u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \ ,$$

jehož geometrickým vyjádřením je elipsa tvaru

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = u^0 \qquad \text{resp.}$$

(4.11) $$\frac{x_1^2}{\left(\dfrac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\dfrac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2} = 1$$

tedy se středem v počátku a s poloosami $\dfrac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}$ resp. $\dfrac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}$. Na obrázku [2B] je zakreslena situace se třemi indiferenčními křivkami na hladinách užitku u^1, u^2, u^3 při $u^1 < u^2 < u^3$. Výdajové omezení je opět znázorněno úsečkou AB s rovnicí $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ spojující body $A \equiv \left[\dfrac{M}{p_1};0\right]$, $B \equiv \left[0;\dfrac{M}{p_2}\right]$. Bod Q, v němž se indiferenční křivka u^1 dotýká výdajového omezení, však není rovnovážným bodem v plnohodnotném slova smyslu. Naopak, posun z něj po výdajovém omezení v obou možných směrech vede k dosažení bodů (komoditních kombinací), které leží na indiferenčních křivkách o vyšších hladinách užitku, což je v protikladu s požadavkem na vlastnost rovnovážného bodu. Lze pozorovat pouze to, že jsou-li vybrány komodity v množstvích odpovídajících souřadnicím bodu Q, potom úbytek množství jednoho či druhého statku bude znamenat vždy přechod na nižší indiferenční křivku. To však nemá žádný vztah ke kritériu požadovanému pro rovnovážný bod, aby se komodity nakupovaly v poměrech, které zajišťují nejlevnější možný výdaj (pro danou hladinu užitku).

Na uvedeném obrázku lze též dobře ilustrovat rozdílnost mezi rostoucí a kvazikonkávní funkcí. Uvažovaná ryze kvadratická funkce s kladnými α_i, $i = 1,2$ je neklesající (je dokonce rostoucí) v každé proměnné, není však kvazikonkávní. Množině dvoukomoditních rostoucích funkcí odpovídá třída indiferenčních křivek, u kterých průběh (zleva shora) po kterékoliv z nich je charakterizován klesající hodnotou x_2 a rostoucí hodnotou x_1, zatímco *kvazikonkávnost* navíc mj. vyžaduje, aby mezní míra substituce při tomto pohybu kontinuálně klesala (což u kvadratické funkce splněno není) a aby všechny indiferenční křivky byly pro danou užitkovou funkci vždy "vyklenuty směrem k počátku".

Mezní užitky u ryze kvadratické funkce jsou $u_1 = 2\alpha_1 x_1$, $u_2 = 2\alpha_2 x_2$ (a jsou tedy závislé na bodu komoditního prostoru, v němž jsou vyčísleny), mezní míra substituce je rovna $\dfrac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2 x_2}$ (a je tedy rostoucí při snižování x_2 a zvyšování x_1).

Poznámka 2 Je zřejmé, že ke zlepšení vlastností ryze kvadratické funkce nepovede specifikace se zápornými koeficienty α_1, α_2. Při nich bude sice tato funkce kvazikonkávní, ale funkce sama bude záporná a klesající, oba mezní užitky budou tedy záporné. Jako užitková funkce je tedy nepoužitelná.

Odvození poptávkových funkcí po komoditách provedeme na základě maximalizace výrazu

$$W = Max\left[u(\boldsymbol{x}) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)\right] = Max\left[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)\right]$$

Parciálními derivacemi podle x_1, x_2 a λ a jejich anulováním dostaneme tři podmínky :

$$u_1 = 2\alpha_1 x_1 - \lambda p_1 = 0 \qquad u_2 = 2\alpha_2 x_2 - \lambda p_2 = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - M = 0 \quad \text{tzn.}$$

$$2\alpha_1 x_1 = \lambda p_1 \qquad 2\alpha_2 x_2 = \lambda p_2 \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M\ ,$$

z nichž odvodíme (řešením tří rovnic pro neznámé x_1, x_2, λ) v závislosti na parametrech úlohy, tj. α_1, α_2 , p_1, p_2 a M poptávkové funkce po obou komoditách jako

$$\text{(4.12)} \qquad x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\left(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1\right)} \qquad x_2 = \frac{\alpha_1 p_2 M}{\left(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1\right)} \qquad \lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{\left(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1\right)}$$

V obou případech roste poptávka přímo úměrně příjmu M a nepřímo úměrně s cenou této komodity.

Přistupme k odvození nepřímé užitkové funkce. K tomu stačí dosadit x_1, x_2 z (4.12) do (4.10). Po drobných úpravách dostaneme

(4.13) $$\Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M^2}{p_1{}^2 \alpha_2 + p_2{}^2 \alpha_1}$$

Nepřímá užitková funkce je tedy rovněž kvadratická v M a klesající se čtvercem každé z cen p_1, p_2.

Výdajovou funkci získáme standardně nahrazením levé strany (2.4.13) pevnou hodnotou ${}^0u$ a položením $M = E({}^0u, p)$. Pak již snadno z (2.4.13) získáme výraz

(4.14) $$E({}^0u, p) = \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)\,{}^0u}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Výdajová funkce je tedy odmocninná ve vztahu k hladině užitku.

Marshallův tvar poptávkových funkcí lze odvodit též pomocí *Royovy identity*, přičemž z (2.4.13) máme

(4.15) $$\frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 M}{\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_2 p_2{}^2} \quad \text{a též} \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial p_i} = -\frac{2.\alpha_i \alpha_2 M^2 p_1 p_2 p_i}{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_2 p_2{}^2)^2}$$

zatímco k vyjádření v Hicksově tvaru musíme použít *Shephardovo lemma*, na základě něhož

(4.16) $${}^H x_i = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = 0{,}5.\left(\frac{\dfrac{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)\,{}^0u}{\alpha_1 \alpha_2}}{2\alpha_2 p_1.{}^0u} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} . \frac{p_1{}^2\,{}^0u}{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)}}\,.$$

Shodu obou výrazů prověříme např. dosazením výdajové funkce $E({}^0u, p)$ za M

$${}^M x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2} . \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)\,{}^0u}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} . \frac{p_1{}^2\,{}^0u}{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)}} = {}^H x_1\,.$$

4.3 Leontiefova užitková funkce

Tento typ užitkové funkce (též užitková funkce s pevnými koeficienty) lze zapsat ve tvaru

(4.17) $$u(\boldsymbol{x}) = Min[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2; ....; \beta_n x_n]\,,$$

kde $\beta_i = 1, 2, ..., n$ jsou nějaké kladné konstanty. Tato užitková funkce je charakterizována indiferenční mapou sestávající z indiferenčních křivek, které mají podobu „rohů“ (vrcholů a hran) neomezených n-rozměrných kvádrů. Vrcholy přitom leží na polopřímce vycházející z počátku souřadnic.

Pro případ dvou komodit má tato polopřímka rovnici $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$ a celou situaci lze vyjádřit obrázkem [2C], který opět obsahuje indiferenční křivky pro tři úrovně užitku u^1, u^2, u^3. Jako oblast $\boldsymbol{X^D}$ označíme množinu všech $[x_1, x_2]$, pro které platí $x_1 \geq x_2$ a jako $\boldsymbol{X^H}$ oblast, v níž platí $x_2 \geq x_1$. Hranici obou množin tvaru $x_1 = x_2$ tvoří polopřímka vycházející z počátku souřadnic pod úhlem ϕ, pro který platí $tg\phi = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}$.

Jinak je patrné,že Leontiefovská funkce splňuje vlastnosti užitkové funkce, neboť je:
(U1) : reálná konečná a platí $u(\boldsymbol{0}) = 0$, (U2): neklesající v celé definičním oboru, přesněji rostoucí ve směru přírůstku každé komodity až do hodnoty $x_2 = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$, poté je konstantní, (U3) spojitá v celém definičním oboru a (U4) kvazikonkávní, neboť funkční hodnota v bodě ležícím na spojnici libovolných dvou bodů komoditního prostoru nikdy neklesne (jak plyne z konvexnosti množin) pod menší z obou hodnot užitku v krajních bodech. Aplikace (U5) pak vede k obecnějším strukturám komplementárních užitkových funkcí.

Pokud jde o hodnoty mezních užitků, musíme rozlišit oblasti X_d a X_h vyznačené na obrázku [2C] :
v oblasti X^H platí $u_1 = \beta_1$, resp. $u_2 = 0$,
zatímco
v oblasti X^D platí $u_1 = 0$, resp. $u_2 = \beta_2$.

Dále zřejmě v celém komoditním prostoru platí $u_{11} = u_{12} = u_{22} = 0$ a pro mezní míry substituce platí:

v oblasti X^H : $m_{12} = \dfrac{u_1}{u_2} = +\infty$, zatímco v oblasti X^D : $m_{12} = \dfrac{u_1}{u_2} = 0$.

Abychom odvodili u této funkce poptávkové funkce po komoditách, musíme - při neexistenci parciálních derivací na „hřebeni“ zvolit poněkud modifikovaný postup : Je zřejmé, že při jakýchkoliv kladných cenách p_1, p_2 a příjmu M vzájemně propojených rovností $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ bude maxima užitku dosaženo na „hřebeni“. Bod maxima tedy získáme jako průsečík úsečky $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ a polopřímky $\beta_1x_1 = \beta_2x_2$ procházející počátkem souřadnic. Řešením pro x_1, x_2 dostaneme poptávkové funkce ve tvaru:

(4.18)
$$x_1 = \frac{\beta_2 M}{p_1\beta_2 + p_2\beta_1} \qquad x_2 = \frac{\beta_1 M}{p_1\beta_2 + p_2\beta_1}.$$

Odtud je vidět, že poptávka po každé komoditě je přímo úměrná příjmu M a nepřímo úměrná ceně vlastní (ale stejně tak i cizí) komodity. Povšimněme si přitom, že z tohoto hlediska jsou komodity x_1, x_2 v typicky komplementárním vztahu.

Uveďme dále, že Leontiefova užitková funkce je (pro libovolné konečné n) lineárně homogenní, neboť pro ni platí:

(4.19) $$u(\lambda\boldsymbol{x}) = Min[\beta_1\lambda x_1 + \beta_2\lambda x_2 + ... + \beta_n\lambda x_n] = \lambda \cdot Min[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n] = \lambda \cdot u(\boldsymbol{x})$$

pro libovolné kladné λ .

Leontiefova užitková funkce je pro určitý typ vzájemného vztahu komodit (jsou-li tyto vzájemně komplementární) výstižným analytickým nástrojem. Naopak, pro situace charakterizované vzájemnou substitučností komodit není adekvátně použitelná.

Rovněž u Leontifeovy užitkové funkce lze snadno odvodit nepřímou užitkovou funkci : Stačí dosadit nalezené poptávkové funkce (2.4.18) do přímé užitkové funkce. Dostaneme

(4.20) $$\Psi(p_1, p_2, M) = Min\,[\frac{\beta_1\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1};\frac{\beta_2\beta_1 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}] = \frac{\beta_1\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}$$

a vidíme, že oba výrazy v závorce jsou shodné – minima se tedy nabývá v obou bodech současně. V souladu s očekáváním roste nepřímá užitková funkce přímo úměrně s příjmem a nepřímo úměrně s cenou vlastní i nevlastní komodity (opět zaznamenáváme komplementaritu ve vztahu mezi oběma).

Nyní můžeme odvodit poptávkové funkce také alternativně pomocí *Royovy identity.* Protože

$$\frac{\partial\Psi(p,M)}{\partial M} = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \qquad \frac{\partial\Psi(p,M)}{\partial p_i} = -\frac{\beta_1\beta_2 M}{(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)^2}.\beta_i$$

vede výraz $\frac{-\partial\Psi(p,M)}{\partial p_i} / \frac{\partial\Psi(p,M)}{\partial M}$ přesně ke tvaru poptávkové funkce v Marshallově tvaru, jak jsme ho odvodili vztahem (4.18).

Dále přistoupíme k určení výdajové funkce. Stačí k tomu nahradit levou stranu v (2.4.20) pevnou hodnotou užitku ${}^0u$ a M nahradit zápisem výdajové funkce $E({}^0u, p)$. Odtud již snadno máme

(4.21) $$E({}^0u, p) = \frac{{}^0u\ (\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)}{\beta_1\beta_2}.$$

Výdaj spojený s nákupem statků je přímo úměrný úrovni užitku a též přímo úměrný cenám komodit.

Konečně rovněž snadno ověříme shodu poptávkových funkcí pro oba tvary (Marshallův i Hicksův): Nejprve odvodíme pomocí Shephardova lemmatu Hicksův tvar poptávkových funkcí. Zřejmě

(4.22) $${}^H x_i{*} = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0u}{\beta_1\beta_2}.\beta_j = \frac{{}^0u}{\beta_i} \quad \text{pro } i, j = 1,2\ ; i \neq j\ .$$

Tento velmi jednoduchý výraz vyjadřuje lineární závislost poptávky na hodnotě užitku. Za povšimnutí stojí, že poptávková funkce není závislá na ceně žádné z komodit.

Jde o tvar korespondující s Marshallovým vyjádřením poptávek, neboť po dosazení

(4.23) $${}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}.\frac{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}{\beta_1\beta_2}.{}^0u = \frac{{}^0u}{\beta_1} = {}^H x_1{*}.$$

4.4 Odmocninná užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užitková funkce, je funkce tvaru

(4.24) $$u(\boldsymbol{x}) = \beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} + ... + \beta_n\sqrt{x_n} \qquad \beta_i > 0,$$

resp. ve zjednodušeném zápisu pro dvě komodity

(4.25) $$u(\boldsymbol{x}) = \beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0\,.$$

Opět lze snadno ukázat, že odmocninná funkce je reálná konečná spojitá rostoucí a splňující $u(\boldsymbol{0}) = 0$. Je také kvazikonkávní (a lineárně homogenní stupně 1/2).

Mezní užitky jsou rovny $u_1 = \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} > 0$, resp. $u_2 = \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} > 0$, mezní míra substituce je $m_{12} = \dfrac{\beta_1\sqrt{x_2}}{\beta_2\sqrt{x_1}}$ a mění se tedy s polohou bodu v komoditním prostoru.

Poptávkové funkce odvodíme obvyklým způsobem, řešením následujících tří rovnic pro x_1, x_2, λ:

$$u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 \qquad u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2 \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = M\,.$$

Některou z metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. komparační s porovnáním a eliminací λ) získáme řešení pro x_1, x_2 a λ:

(4.26) $$x_1 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1\cdot\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)} \qquad x_2 = \frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2\cdot\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)}.$$

Z uvedených výrazů je patrné, že každá z obou poptávkových funkcí je lineární funkcí příjmu M a že poptávka je nepřímo závislá na jí příslušné ceně. Z uvedených hledisek tedy lze odmocninnou funkci přijmout jako vhodnou pro popis (přinejmenším určité části) standardních užitkových situací.

Znázornění situace na obrázku [2D] představuje trojici indiferenčních křivek u^1, u^2, u^3, které mají tu vlastnost, že jsou kvazikonkávní a přiléhají v konečných hodnotách k souřadnicovým osám. Každá z komodit je tedy plně substituovatelná konečným množstvím druhé komodity (stejně by tomu bylo i v n-rozměrném případě). Rovnovážný bod Q se nachází v místě dotyku výdajového omezení s indiferenční křivkou u^2. Vychýlení z něho v kterémkoliv směru úsečky výdajového omezení vede vždy k nižší hladině užitku než u^2.

Nyní vyšetříme kvazikonkávnost odmocninné užitkové funkce. K tomu stačí vypočíst determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} \\ \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & -\dfrac{\beta_1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} & 0 & -\dfrac{\beta_2}{4x_2^{3/2}} \end{vmatrix} \qquad \text{, protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}};\ u_2(x) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}};\ u_{11}(x) = -\tfrac{1}{4}\beta_1 x_1^{-3/2};\ u_{22}(x) = -\tfrac{1}{4}\beta_2 x_2^{-3/2};\ u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Hodnota determinantu tedy je (pouze 2 ze 6 členů Sarusova rozvoje jsou nenulové)

$$-\frac{\beta_1^{\,2}}{4x_1}\cdot\left(-\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}}\right)-\frac{\beta_2^{\,2}}{4x_2}\cdot\left(-\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}}\right)=\frac{\beta_1\beta_2}{16x_1x_2}\cdot\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{x_2}}+\frac{\beta_2}{\sqrt{x_1}}\right]>0 \text{ pro libovolná kladná } \beta_1, \beta_2.$$

Odmocninná užitková funkce je tedy kvazikonkávní.

Nepřímou užitkovou funkci $\Phi(p_1, p_2, M)$ získáme prostým dosazením nalezených poptávkových funkcí (v Marshallově tvaru) do užitkové funkce. Dostáváme

$$\Phi(p_1,p_2,M)=\beta_1\sqrt{\frac{\beta_1^{\,2}p_2M}{p_1\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)}}+\beta_2\sqrt{\frac{\beta_2p_1M}{p_2\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)}}$$

$$=\beta_1^{\,2}\sqrt{\frac{p_2M}{p_1\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)}}+\beta_2^{\,2}\sqrt{\frac{p_1M}{p_2\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{M}{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}}\cdot\left[\beta_1^{\,2}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\beta_2^{\,2}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$$

nebo po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazu v závorce $\sqrt{p_1p_2}$ dále

(4.27)
$$\sqrt{\frac{M}{p_1p_2}}\cdot\frac{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}{\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}}=\sqrt{\frac{M}{p_1p_2}}\cdot\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}\,.$$

Nyní odvodíme tvar výdajové funkce příslušné odmocninné užitkové funkce. Vyjdeme z již vyvozené nepřímé užitkové funkce, kde za obecný výraz $\Phi(p_1, p_2, M)$ dosadíme konkrétní hodnotu užitku ^0u a obdobně (nyní hledaný tvar výdajové funkce $E(p_1, p_2, {}^0u)$) substituujeme z M. Postupně získáme

$${}^0u=\sqrt{\frac{E(p_1,p_2,{}^0u)}{p_1p_2}}\cdot\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}\text{ , z čehož snadno určíme}$$

(4.28)
$$E(p_1,p_2,{}^0u)=\frac{{}^0u^2\cdot p_1p_2}{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}\,.$$

Jak patrno, tato výdajová funkce je nezáporná (pro libovolné hodnoty parametrů β_1, β_2), nulová pouze při ${}^0u = 0$ a rostoucí (s druhou mocninnou) ^{0}u.

Nyní přistoupíme k ilustraci odvození poptávkových funkcí zprostředkovaně, z nepřímé užitkové, resp. výdajové funkce. Z nepřímé užitkové funkce spočteme poptávkové funkce pomocí Royovy identity.

Výpočtem derivací dostaneme

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_1}=\frac{\sqrt{M}}{2p_1p_2}\cdot\frac{\left(\beta_2^{\,2}\sqrt{p_1p_2}-\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\right)}{\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}}=\frac{-\beta_1^{\,2}p_2^{1/2}\sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}\,p_1^{3/2}}\text{ a podobně,}$$

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{p},M)}{\partial M}=\frac{\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}}{2\sqrt{M}\sqrt{p_1p_2}}$$, a tedy dosazením do Royovy identity

$$x_1^{*M}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial\Phi(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}=-\frac{\dfrac{-\beta_1^{\,2}p_2^{\,1/2}\sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}\,p_1^{\,3/2}}}{\dfrac{\sqrt{\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1}}{2\sqrt{M}\sqrt{p_1}\sqrt{p_2}}}=\frac{\beta_1^{\,2}Mp_2}{p_1\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)},$$ což zřejmě odpovídá

prvému z výrazů uvedených v (4.26). Výraz pro x_2^{*M} bychom odvodili obdobně; obdrželi bychom druhý výraz v (4.26). Jak patrno, Marshallovská poptávková funkce je přímo úměrná příjmu spotřebitele M a současně je klesající se čtvercem ceny p_1 příslušné komodity.

Alternativně můžeme však získat také poptávkové funkce v Hicksově pojetí. K tomu uplatníme Shephardovo lemma. Dle něho

$$x_1^{*H}=\frac{\partial E\left({}^0u,\boldsymbol{p}\right)}{\partial p_1}=\frac{\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right){}^0u^2p_2-{}^0u^2p_1p_2\beta_2^{\,2}}{\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)^2}$$ a po úpravě

$$x_1^{*H}=\frac{\beta_1^{\,2}\,{}^0u^2p_2^{\,2}}{\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)^2}. \tag{4.29}$$

Hicksovská poptávková funkce je tedy rostoucí se čtvercem hladiny užitku ${}^0u$ a klesající s růstem ceny p_1.

Abychom mohli porovnat oba tvary poptávkových funkcí (Hicksův a Marshallův), stačí např. dosadit do výrazu pro x_1^{*M} za $M=E\left({}^0u,p_1,p_2\right)$: Dostaneme

$$x_1^{*M}=\frac{\beta_1^{\,2}p_2\,{}^0u^2p_1p_2}{p_1\left(\beta_1^{\,2}p_2+\beta_2^{\,2}p_1\right)^2}=\frac{\beta_1^{\,2}\,{}^0u^2p_2^{\,2}}{\left(\beta_1^2p_2+\beta_2^2p_1\right)^2}=x_1^{*H}$$ Ĩ.

Obdobně bychom mohli postupovat i obráceně. Za ^{0}u dosadíme výraz pro nepřímou užitkovou funkci $\Psi(p_1,p_2,M)$:

$$x_1^{*H}=\frac{\beta_1^2p_2^2}{\left(\beta_1^2p_2+\beta_2^2p_1\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{M\left(\beta_1^2p_2+\beta_2^2p_1\right)}}{\sqrt{p_1p_2}}\right)^2=\frac{\beta_1^2p_2M}{p_1\left(\beta_1^2p_2+\beta_2^2p_1\right)}=x_1^{*M}. \tag{4.30}$$

Konečně ukážeme, že i třetí postup vyvození Hicksovských poptávkových funkcí – řešením minimalizační úlohy – vede taktéž k tvaru shodnému s oběma předchozími:

Řešíme tedy úlohu $\mathbf{MIn}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{p_i x_i}$ za podmínky $\beta_1\sqrt{\mathbf{x}_1}+\beta_2\sqrt{\mathbf{x}_2}\geq\mathbf{u}^0$ Příslušný Lagrangián má tvar

$$\mathbf{Z}(\mu,\mathbf{x})=\left[\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{p_i x_i}-\mu.\left(\beta_1\sqrt{\mathbf{x}_1}+\beta_2\sqrt{\mathbf{x}_2}-\mathbf{u}^0\right)\right]$$. Derivujeme nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(\mu,\mathbf{x})}{\mathbf{x}_1} = \mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\mu.\beta_1 \mathbf{x}_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(\mu,\mathbf{x})}{\mathbf{x}_2} = \mathbf{p}_2 - \frac{1}{2}\mu.\beta_2 \mathbf{x}_2^{-\frac{1}{2}} = 0$$

(Derivací podle μ obdržíme opět podmínku minimálního užitku).
Porovnáním výrazů pro μ z nutných podmínek získáme

$\mu = \frac{2\mathbf{p}_1\sqrt{\mathbf{x}_1}}{\beta_1} = \frac{2\mathbf{p}_2\sqrt{\mathbf{x}_2}}{\beta_2}$ a odtud dále $\sqrt{\mathbf{x}_2} = \frac{\mathbf{p}_1\beta_2\sqrt{\mathbf{x}_1}}{\mathbf{p}_2\beta_1}$, což dosadíme do

podmínky pro minimální užitek: $\beta_1\sqrt{\mathbf{x}_1} + \beta_2\frac{\mathbf{p}_1\beta_2\sqrt{\mathbf{x}_1}}{\mathbf{p}_2\beta_1} = \mathbf{u}^0$, odkud už snadno určíme

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}^0}{\beta_1 + \frac{\mathbf{p}_1\beta_2{}^2}{\mathbf{p}_2\beta_1}}\right)^2 = \frac{\beta_1{}^2\mathbf{p}_2{}^2\mathbf{u}^{0\,2}}{\left(\beta_1{}^2\mathbf{p}_2 + \beta_2{}^2\mathbf{p}_1\right)^2}$$, tedy výraz identický s (4.29).

4.5 Logaritmická užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užitková funkce je logaritmická funkce

(4.31) $$u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 ,$$

u níž předpokládáme – za účelem obou kladných mezních užitků splnění podmínky $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Funkční tvar opět neobsahuje aditivní konstantu, abychom dosáhli požadavku $u(0,0) = 0$. Mezní užitky, které použijeme k výpočtu poptávkových funkcí jsou zřejmě

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1} \;;\; u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};$$

takže souřadnice rovnovážného bodu dostaneme řešením tří jednoduchých rovnic pro x_1, x_2, λ:

$$u_1 = \frac{\beta_1}{x_1} = \lambda p_1 \qquad u_2 = \frac{\beta_2}{x_2} = \lambda p_2 \qquad \text{a} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = M .$$

Jednoduchými úpravami $p_1x_1 = \beta_1 / \lambda$, resp. $p_2x_2 = \beta_2 / \lambda$ a dosazením do rozpočtového omezení dostaneme $\beta_1 + \beta_2 = \lambda M$ neboli $\beta_1 / M + \beta_2 / M = \lambda$ a odtud již snadno poptávky po obou komoditách jako

(4.32) $$x_1^{*M} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)p_1}, \qquad x_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2)p_2}.$$

Ověření, zda je (dvoufaktorová) logaritmická užitková funkce kvazikonkávní, je velmi snadné. Hicksovy podmínky stability zde mají tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{, protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}\ ;\ u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};\ u_{11}(x) = -\frac{\beta_1}{x_1^2};\ u_{22}(x) = -\frac{\beta_2}{x_2^2};\ u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Výpočet determinantu vede k hodnotě

$$|D| = -\left(\frac{\beta_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta_2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{x_1^2}\right) = \frac{\beta_1\beta_2}{x_1x_2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{x_2} + \frac{\beta_2}{x_1}\right]$$, která je evidentně (při

přijatých předpokladech $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) pro kladné objemy komodit x_1, x_2 kladná.

Dále odvodíme tvar nepřímé užitkové funkce. Použijeme k tomu prosté dosazení poptávkových funkcí v Marshallově tvaru do přímé užitkové funkce $u(x^*)$. Tedy

(4.33) $$\Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 \log \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \log \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)},$$

kterýžto výraz lze vyjádřit v několika dalších ekvivalentních tvarech, např. $\Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 + \log\beta_1 + \beta_2 \log\beta_2 - (\beta_1 + \beta_2)\log(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1 \log\frac{M}{p_1} + \beta_2 \log\frac{M}{p_2}$, neboli

(4.34) $$\Phi(p_1, p_2, M) = C + \beta_1 \log\frac{M}{p_1} + \beta_2 \log\frac{M}{p_2},$$ kde

konstanta *C* závisí jen na parametrech (přímé) užitkové funkce.

Všimněme si, že nepřímá užitková funkce je (nehledě na aditivní konstantu *C*) rovněž logaritmická (v argumentech $\frac{M}{p_1}$ a $\frac{M}{p_2}$). Je dle očekávání rostoucí při rostoucím příjmu *M* a naopak klesající v obou cenách p_1, p_2.
Její derivace použijeme níže při výpočtech poptávek pomocí *Royovy identity*:

Derivace nepřímé užitkové funkce podle ceny p_1 má tvar

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)(-p_1^2)} = -\frac{\beta_1}{p_1}; \quad \text{stejně tak} \quad \frac{\partial\Phi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial p_2} = -\frac{\beta_2}{p_2}.$$

Derivace podle příjmu M obdržíme jako

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \frac{p_2(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 M} \cdot \frac{\beta_2}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{M}.$$

Odtud je mj. patrné, že derivace podle cen jsou obě záporné, zatímco derivace dle příjmu *M* nabývá kladné hodnoty. Můžeme spočíst ještě druhé derivace

$$\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1^2} = \frac{\beta_1}{p_1^2}, \quad \frac{\partial^2\Phi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial\ M^2} = -\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{M^2}, \qquad \frac{\partial^2\Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_2^2} = \frac{\beta_2}{p_2^2},$$

z nichž je vidět, že druhé derivace podle cen jsou kladné, zatímco druhá parciální derivace dle příjmu je záporná.

Získané hodnoty 1. parciálních derivací můžeme použít k výpočtu *Marshallovských poptávek* pomocí *Royovy identity*. Máme

(4.35) $$X_1^{*M} = \frac{-\dfrac{\partial\Phi(\mathbf{p},M)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial\Phi(\mathbf{p},M)}{\partial M}} = -\frac{-\dfrac{\beta_1}{p_1}}{\dfrac{\beta_1+\beta_2}{M}} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1+\beta_2)p_1},$$ ve shodě s prvním z výrazů v (4.36).

Analogicky obdržíme $X_2^{*M} = \dfrac{\beta_2 M}{(\beta_1+\beta_2)p_2}$, opět ve shodě s druhou poptávkovou funkcí v (4.16).

Nyní můžeme přistoupit k vyvození výdajové funkce $E(p_1, p_2, {}^0u)$: Nejprve přepíšeme nepřímou užitkovou funkci do tvaru

(4.37) $$\Phi(p_1,p_2,M) = C + \log(\beta_1+\beta_2).M - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}.$$

Nyní provedeme substituce

$\Phi(p_1,p_2,M) = {}^0u$ (pevná hodnota) a naopak $M = E(p_1,p_2,{}^0u)$ (výdajová funkce s argumenty ceny a hladina užitku) neboli

$${}^0u = C + (\beta_1+\beta_2)\log E(\mathbf{p},{}^0u) - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2},$$ což dává

$$\log E(\mathbf{p},{}^0u) = \frac{{}^0u - C + \log p_1^{\beta_1} + \log p_2^{\beta_2}}{\beta_1+\beta_2}$$ a dále po úpravách

$$\log E(\boldsymbol{p},{}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2} + \frac{\log\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\right) - \log\left(\dfrac{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}}\right)}{\beta_1+\beta_2}$$

$$\log E(\boldsymbol{p},{}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2} + \frac{\log\left[\left(\dfrac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\dfrac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\right]}{\beta_1+\beta_2}$$

a po odlogaritmování obdržíme

$$E(\boldsymbol{p},{}^0u) = \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\log\left[(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\left(\dfrac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\dfrac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\beta_1+\beta_2}\right\}$$

(4.38) $$= \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}\right\}\cdot\exp\left\{\log\left[(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{1/(\beta_1+\beta_2)}\right\}$$

$$E(\boldsymbol{p},{}^0u) = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\cdot(\beta_1+\beta_2)\cdot\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}$$

Povšimněme si, že výdajová funkce (příslušná logaritmické užitkové funkci vykazuje exponenciální růst ve vztahu k užitku ^{0}u a má mocninný tvar vzhledem k cenám p_1, p_2.

Hicksův tvar poptávkových funkcí získáme prostřednictvím *Shephardova lemmatu* následovně:

$$x_1^{*H} = \frac{\partial E\left(p_1, p_2, {}^0u\right)}{\partial p_1} = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}} \frac{\beta_1}{p_1} \tag{4.39}$$

$$= \frac{E\left(p_1, p_2, {}^0u\right)\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)p_1}$$

resp. po dosazení $E\left(\mathbf{p}, {}^0u\right) = M$ je $x_1^{*H} = \dfrac{M\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)p_1} = x_1^{*M}$, což dokumentuje formální shodu s již vyvozenými Marshallovskými poptávkovými funkcemi.

V Hicksově tvaru zaznamenáváme dle očekávání růst poptávky po dané komoditě s růstem hladiny užitku – závislost je exponenciální, intenzita růstu pak nepřímo úměrná součtu parametrů $\beta_1 + \beta_2$. Tatáž poptávka klesá s růstem ceny p_1 : mocnina u p_1 je (s ohledem na přítomnost této ceny též ve výdajové funkci) rovna $\dfrac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} - 1 = -\dfrac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} < 0.$

Analogicky bychom dostali poptávku po druhém statku jako

$$X_2^{*H} = \frac{E\left(p_1, p_2, {}^0u\right)\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)p_2}. \tag{4.40}$$

Pro úplnost i zde ukážeme, že i třetí postup vyvození Hicksovských poptávkových funkcí – řešením minimalizační úlohy – vede k tvaru shodnému s oběma předchozími:

Řešíme tedy úlohu $\mathbf{MIn} \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$ za podmínky $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 \geq u^0$ Lagrangián má zde tvar

$\mathbf{Z}(\mu, \mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^{2} p_i x_i - \mu.\left(\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 - u^0\right)\right]$. Derivujeme nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial Z(\mu, x)}{x_1} = p_1 - \mu.\frac{\beta_1}{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial Z(\mu, x)}{x_2} = p_2 - \mu.\frac{\beta_2}{x_2} = 0$$

(Derivací podle μ obdržíme zřejmě zase podmínku minimálního užitku).
Porovnáním výrazů pro μ z nutných podmínek získáme

$\mu = \dfrac{p_1 x_1}{\beta_1} = \dfrac{p_2 x_2}{\beta_2}$ a odtud dále $x_2 = \dfrac{p_1 \beta_2 x_1}{p_2 \beta_1}$, což dosadíme do

podmínky pro minimální užitek: $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log\left(\dfrac{p_1 \beta_2 x_1}{p_2 \beta_1}\right) = u^0$, odkud opět snadno určíme

$$(\beta_1+\beta_2).\log x_1 = u^0 - \beta_2.\log\left(\frac{p_1}{p_2}.\frac{\beta_2}{\beta_1}\right),$$

neboli $$x_1^{*H} = e^{\frac{u^0}{\beta_1+\beta_2}}.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}$$, kterýžto výraz je identický

s

(4.39) $$x_1^{*H} = e^{\frac{u^0}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\frac{\beta_1}{p_1}.$$

4.6 Zobecněná leontiefovská užitková funkce

$$u(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} + \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} + \beta_{11} + \frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \beta_{11} + \frac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2}x_1^{-1/2} = \beta_{11} + \frac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} + \beta_{22} + \frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \beta_{22} + \frac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2}x_2^{-1/2} = \beta_{22} + \frac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$$

Mezní míra substituce

$$m_{12} = \frac{\beta_{11} + \dfrac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}}{\beta_{22} + \dfrac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}} = \frac{\dfrac{2\beta_{11}x_1+\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{x_1}}{\dfrac{2\beta_{22}x_2+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{2\beta_{11}x_1+\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{2\beta_{22}x_2+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}\cdot\frac{2\beta_{11}\sqrt{x_1}+\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\beta_{22}\sqrt{x_2}+\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}$$

Nezápornost funkce

$$\beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}\right)\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{12} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{x_1}\\ \sqrt{x_2}\end{pmatrix} \geq 0 \quad pro\ libovolné\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \beta_{11} > 0,\ \beta_{22} > 0,\ \beta_{11}\beta_{22} > \beta_{12}^2$$

Kladnost mezních užitků

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad \beta_{11} > 0,\ \beta_{22} > 0$$

$$u_1(\mathbf{x}) = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 0 \Rightarrow \beta_{12}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > -2\beta_{11}$$

$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} < \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}}$$

$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}} \quad vždy$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > 0 \Rightarrow \beta_{12}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2\beta_{22}$$

$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < -2\frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{-\beta_{12}}{2\beta_{22}} > \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2\frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{\beta_{12}}{-2\beta_{22}} < \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad v\check{z}dy$$

Homogenita

$$u(\lambda\mathbf{x}) = \underbrace{\beta_0}_{\beta_0=0} + \underbrace{\beta_1\lambda^{1/2}x_1^{1/2}}_{\beta_1=0} + \underbrace{\beta_2\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\beta_2=0} + \underbrace{\beta_{11}\lambda x_1 + \beta_{22}\lambda x_2 + \beta_{12}\lambda^{1/2}x_1^{1/2}\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\lambda\left(\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}\right)}$$

Aby byla GL-funkce lineárně homogenní, musí platit: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, takže $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1x_2}$.

Kvazikonkávnost pro tvar $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1x_2}$

$$u_1 = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad u_2 = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{11} = \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{x_2}\left(-\frac{1}{2}\right)x_1^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$u_{22} = \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{x_1}\left(-\frac{1}{2}\right)x_2^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{12} = \frac{\beta_{12}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}$$

$$u_{21} = \frac{\beta_{12}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}$$

$$U = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \\ \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \lambda p_2 & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda p_1\frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}\cdot\lambda p_2 + \lambda p_2\lambda p_1\frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} - \lambda^2 p_1^2\left(-\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) - \lambda^2 p_2^2\left(-\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right) =$$

$$= \lambda^2\left[p_1p_2\frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} + p_1p_2\frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} + p_1^2\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right] =$$

$$= \lambda^2\left[p_1^2\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 2p_1p_2\frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}\right] =$$

$$= \underbrace{\lambda^2}_{>0}\cdot\frac{\beta_{12}}{4}\left[\underbrace{p_1^2\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} + p_2^2\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} + 2p_1p_2\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}}_{>0\ pro\ x_1>0,\ x_2>0}\right] > 0$$

Kvazikonkávnost vyžaduje, aby $\beta_{12} > 0$.

4.7 Užitková funkce typu TRANSLOG

Dvoukomoditní translog

$$\log u(\mathbf{x}) = c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2$$
$$u(\mathbf{x}) = \exp\{c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$
$$u(\mathbf{x}) = c_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \exp\{\beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$

Mezní užitky

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1} = u(\mathbf{x}) \cdot \left[\frac{\beta_1}{x_1} + 2\frac{1}{x_1}\beta_{11} \log x_1 + \frac{1}{x_1}\beta_{12} \log x_2\right] = \underbrace{\frac{u(\mathbf{x})}{x_1}}_{>0}[\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2]$$
$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2} = u(\mathbf{x}) \cdot \left[\frac{\beta_2}{x_2} + 2\frac{1}{x_2}\beta_{22} \log x_2 + \frac{1}{x_2}\beta_{12} \log x_1\right] = \underbrace{\frac{u(\mathbf{x})}{x_2}}_{>0}[\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1]$$

Nelze zaručit, aby byly mezní užitky kladné pro všechna $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ani když budou všechna β_i, β_{ij} kladná.

Mezní míra substituce

$$m_{12} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2}{\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1}$$

Nelze nijak zaručit, aby byla kladná.

Kladnost mezních užitků

$$\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_2 > -\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1$$
$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_2 < \frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}} \Rightarrow x_2 < \exp\left\{\frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}}\right\}$$
$$\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_1 > -\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2$$
$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_1 < \frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}} \Rightarrow x_1 < \exp\left\{\frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}}\right\}$$

Homogenita TRANSLOGU

$$u(\lambda \mathbf{x}) = \exp\{c_0 + \beta_1 \log(\lambda x_1) + \beta_2 \log(\lambda x_2) + \beta_{11} \log^2(\lambda x_1) + \beta_{12} \log(\lambda x_1)\log(\lambda x_2) + \beta_{22} \log^2(\lambda x_2)\} =$$
$$= \underbrace{e^{c_0} \cdot e^{\beta_1 \log(\lambda x_1)} \cdot e^{\beta_2 \log(\lambda x_2)}}_{\lambda^{\beta_1+\beta_2} \cdot c_1 \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \Rightarrow CD-funkce} \cdot e^{\beta_{11} \log^2(\lambda x_1)} \cdot e^{\beta_{12} \log(\lambda x_1)\log(\lambda x_2)} \cdot e^{\beta_{22} \log^2(\lambda x_2)}$$

CD-funkce je 1. část původního TRANSLOGU.

$$e^{\beta_{11} \log^2(\lambda x_1)} = e^{\beta_{11}(\log\lambda + \log x_1)(\log\lambda + \log x_1)} = e^{\beta_{11}(\log^2\lambda + \log^2 x_1 + 2\log\lambda \log x_1)} \quad \to A$$
$$e^{\beta_{22} \log^2(\lambda x_2)} = e^{\beta_{22}(\log\lambda + \log x_2)(\log\lambda + \log x_2)} = e^{\beta_{22}(\log^2\lambda + \log^2 x_2 + 2\log\lambda \log x_2)} \quad \to B$$
$$e^{\beta_{12} \log(\lambda x_1)\log(\lambda x_2)} = e^{\beta_{12}(\log\lambda + \log x_1)(\log\lambda + \log x_2)} = e^{\beta_{12}(\log^2\lambda + \log x_1 \log x_2 + \log\lambda \log x_1 + \log\lambda \log x_2)} \quad \to C$$
$$A + B + C = \underbrace{e^{[\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}]\log^2\lambda}}_{U} \cdot \underbrace{e^{[2\beta_{11}\log x_1 + 2\beta_{22}\log x_2 + \beta_{12}\log x_1 + \beta_{12}\log x_2]\log\lambda}}_{V} \cdot \underbrace{e^{\beta_{11}\log^2 x_1} \cdot e^{\beta_{22}\log^2 x_2} \cdot e^{\beta_{12}\log x_1 \log x_2}}_{2.\ část\ původního\ TRANSLOGU}$$

Aby byla funkce lineárně homogenní, musí být člen U roven 1, tj. musí platit $[\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{22}]\log^2 \lambda = 0$ neboli (λ libovolné > 0) $\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{22} = 0$. (1)

Dále musí platit $[2\beta_{11} \log x_1 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2]\log \lambda = 0$, nebo-li obsah závorky [ ] musí být 0. Rozepsáno = $(2\beta_{11} + \beta_{12})\log x_1 + (\beta_{12} + 2\beta_{22})\log x_2 = 0$. Jelikož jsou argumenty x_1, x_2 libovolné kladné, musí být

(2A) $2\beta_{11} + \beta_{12} = 0$ a současně také

(2B) $\beta_{12} + 2\beta_{22} = 0$.

Dohromady tedy $\sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} = 0, i = 1,2.$

Pokud tedy vezmeme $\beta_{11} > 0, \beta_{22} > 0 \Rightarrow \beta_{12} = -2\beta_{11}; \beta_{12} = -2\beta_{22}$ a TRANSLOG musí být tvaru $u(x) = c_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdot \exp\{c_2(\log x_1)\cdot(\log x_1) - c_2(\log x_1)(\log x_2) + c_2(\log x_2)(\log x_2)\}, c_2 > 0.$

To je ale v rozporu s požadavkem (1), protože pak by celá trojice β_{11}, β_{12}, β_{22} musela být nulová. Znamená to, že **dvoukomoditní TRANSLOG nemůže být homogenní**.