Cviceni k predmetu PMMAT2
Cviceni 2 - Funkce vicepromennych

Osnova: pojem okoli a pojem vzdalenosti (priklady), pojem limity (srovnani s pristupem v $\mathbb{R}$ - priklady), spojitost, parcialni derivace

Pojem okoli a vzdalenosti
V prostorech vyssich dimenzi jiz neni mozne vysetrovat okoli bodu x_0, ve kterem chceme zjistovat chovani funkce (to je vlastne definice limity), zleva nebo zprava. Musime tudiz zavest pojem okoli bodu. To chapeme jako mnozinu bodu x, ktere maji od bodu x_0 vzdalenost stejnou nebo mensi jak nejake realne cislo. Vsimnete si take, ze nas vubec nezajima chovani funkce primo v bode x_0.
Pojem okoli ale vyzaduje zavedeni pojmu vzdalenosti. Vzdalenost je nejaky funkcni predpis prirazujici dvema bodum prostoru realne cislo (vzdalenost). Toto prirazeni musi byt nezaporne (vzdalenost bodu je vzdy kladna nebo nula, pokud merime vzdalenost bodu od sebe sameho), symetricke (vzdalenost z bodu x do y je stejna jako z y do x), a take musi splnovat trojuhelnikovou nerovnost (prima vzdalenost bodu x a y je mensi nez soucet vzdalenosti z bodu x do y pres nejaky treti bod z). Opet jsem si ukazali, ze vzdalenosti mohou byt zavedeny ruzne (na nasi planete - casti kruznic , v New Yorku - tzv. taxikarska metrika, Euklidovska vzdalenost bodu od primky probirana na stredni skole a zjistovana pomoci kruzitka atd). Da se ukazat, ze vsechny tyto vzdalenosti jsou "stejne dobre", hlavne vsechny splnuji vyse zminene pozadavky.

Pojem limity
Definici limity ve vicerozmernych prostorech chapeme tak, ze chovani funkce v okoli bodu x_0 nezavisi na ceste, po ktere se k danemu bodu x_0 blizime.

Priklad 1
Vypoctete $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$. Vsimnete si opet, ze vetsinou chceme znat chovani funkce v okoli tech bodu, ve kterych funkce neni definovana. Priblizujme se tedy k bodu $(2,3)$ po vsech moznych primkach, ktere prochazeji bodem $(2,3)$. Jejich obecne vyjadreni $y - y_0 = k(x - x_0)$ odpovida svazku primek $y = k(x - 2) + 3$. Pokud limita vyjde zavisla na smernici primky k mame jistotu, ze limita neexistuje, protoze zalezi na ceste, po ktere se blizime bodu $(2,3)$. Naopak pokud vyjde nezavisla, nemuzeme uz tvrdit, ze limita existuje, protoze jsme samozrejme neproverili vsechny cesty (napr. priblizovani se po parabolach). Tedy pocitejme:
$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{k(x-2)+3-3}{x+k(x-2)+3-5} = \frac{k}{k+1}$. Limita tedy neexistuje.

Priklad 2
Vypoctete $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+3}{2x-y+7}$. Limitu muzeme spocitat primo dosazenim, vyjde tedy $\frac{1}{2}$. Vyzkousejte si ale ze v tomto pripade, kdy vime, ze limita existuje, skutecne nezalezi na cestach, pro kterych se blizime bodu $(2,1)$. Proverte vsechny primky $y - y_0 = k(x - x_0)$ i paraboly $y - y_0 = k(x - x_0)^2$.

Poznamka: Doporucuji vsem si funkce znazornit v programu MAPLE. Zapis je napr.
$f := (x,y) \to (y-3)/(x+y-5);$
plot3d(f, 1.5..2.5, 2.5..3.5);

V pripade funkci dvou promennych mame take nastroje, ktere nam umozni si o funkci udelat predstavu v pripade, ze nemame k dispozici pocitac. Uvazme napr. funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$. Prostrednicvim tzv. vrstevnic, kdy $f(x, y)$ pokladam rovno konstante c, dostavam vlastne pruniky funkce a roviny rovnobezne s rovinou x, y. Vsimnete si, ze to jsou vlastne hyperboly. Viz. obr.:

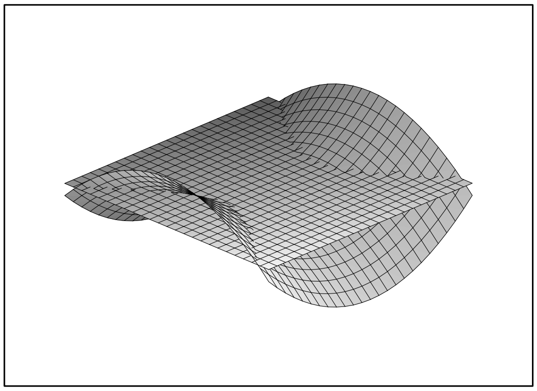

Figure 1: Funkce $c = (x^2 - y^2)$

Pokud polozim $y = 0$, dostavam $f(x, y) = x^2$, tedy vlastne prunik funkce a roviny x, z, vsimnete si opet ze to jsou paraboly otocene nahoru, na druhou stranu pro $x = 0$, dostavam $f(x, y) = -y^2$, tedy vlastne prunik funkce a roviny y, z, tedy paraboly, ale otocene dolu. Vse je videt z obrazku.

Spojitost funkce

Spojitost funkce v bode (x_0, y_0) je definovana stejne jako v jednorozmernem pripade prostrednictvim limity, a vlastne znamena, ze pokud se blizim k bodu (x_0, y_0) v jakemkoli smeru, tak funkci hodnota se priblizuje funkci hodnote v bode (x_0, y_0), tedy
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Napr. funkce z prikladu 2 je spojita v bode $(2, 1)$.

Parcialni derivace

Pojem parcialnich derivaci je velmi uzitecni zvlaste ve spojeni s pojmem totalniho diferencialu. Existuje veta, ktera je dava do souvislosti. Parcialni derivace je vlastne jednorozmerna derivace ve smeru bud osy x nebo y. Geometricky vlastne definuje tecnu k "jednorozmerne" funkci, ktera vznikne jako prusecik funkce a roviny prochazejici osou x nebo y a kolmou k rovine x, y. Podrobneji viz. cviceni. Pocitani parcialnich derivaci je velmi jednoduche. Pokud derivujeme podle x, pak na x pohlizime jako na promennou, vsechno ostatni povazujeme za konstantu, tedy:

Priklad 3:

Spoctete parcialni derivace funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -x\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 2x\frac{1}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f_{xy} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = f_{yx} = -\frac{1}{y^2}$.

Procvicte si sami na prikladech z ucebnice.