4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dánu spojitou užitkovou funkci $u(x)$, cenový vektor p a mějme dále určenu konkrétní velikost užitku u^0 (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

(4.1) $$E(u^0,p)=\mathrm{Min}\lfloor px;u(x)\geq u^0\rfloor$$

nazveme **výdajovou funkcí** ***[expenditure function]*** ve vztahu k užitkové funkci $u(x)$.

Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvýš n statků při exogenně stanovených cenách p) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek přinejmenším o velikosti u^0. Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

Definice 13A Výdajová funkce $E(u,p)$ příslušná užitkové funkci $u(x)$ s přijatými vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti :

(V1) $E(u,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $E(u^0,p)>0$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0>0$.

(V2) $E(u,p^0)$ je **rostoucí v u** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0>0$. $E(u^0,p)$ je **neklesající v p a rostoucí alespoň v jedné z cen p_i** pro libovolnou úroveň užitku u^0.

(V3) $E(u,p^0)$ je **spojitá v u** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0>0$. $E(u,p^0)$ je **spojitá v p** pro libovolnou úroveň užitku u^0.

(V4) $E(u^0,p)$ je **lineárně homogenní v p** pro libovolnou úroveň užitku u^0. Znamená to, že platí $E(u^0,\lambda p)=\lambda.E(u^0,p)$ pro libovolné $\lambda\in(0,+\infty)$

(V5) $E(u^0,p)$ je **konkávní v cenách p** pro libovolnou úroveň užitku u^0.
Znamená to, že platí $E(u^0,\mu p+(1-\mu)p^*)\geq\mu.E(u^0,p)+(1-\mu).E(u^0,p^*)$ pro libovolné dva cenové vektory $p,p^*>0$ a libovolné $\mu\in\langle 0,1\rangle$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) roste i výdaj na pořízení komodit. Tatáž vlastnost ve vztahu k p připouští, že růst některých cen (zpravidla těch, které právě nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytujících užitek u^0) **nemusí nutně vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný (=úměrný) vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) obrazně charakterizuje „ne vyšší než lineární" tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen $p_i, i=1,2,....,n$. Vlastnost (V1) zahrnuje matematická omezení funkce $n+1$ proměnných v kontextu ekonomického významu $E(u,p)$ a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma. Spojitost (V3) v užitku i cenách konstatuje, že náklady nemohou skokovitě růst (ani klesat) tehdy, jestliže se jen nepatrně změní některá z cen nebo úroveň užitku u^0.**

Jestliže máme definovánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností (V2)), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.
Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý systém poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. Shephardova lemmatu. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

(4.2) $$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} = \mathbf{h}_i(\mathbf{u},\mathbf{p})$$, kde

funkce na pravé straně vyjadřuje poptávku po komoditě $\mathbf{x}_j$.

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme dánu výdajovou funkci $\mathbf{M} = \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ s cenovým vektorem p a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů $\mathbf{M}$. Potom funkci

(4.3) $$\psi(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \mathbf{Max}[\mathbf{u}(\mathbf{x}); \mathbf{px} = \mathbf{M}]$$

nazveme **nepřímá užitková funkce** ***[indirect utility function]*** ve vztahu k výdajové funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$. Argumenty této funkce jsou tedy cenový vektor a velikost příjmu spotřebitele použitelná na nákup komodit v množstvích $\mathbf{x}$.

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\psi(\mathbf{M},\mathbf{p})$ příslušná k výdajové funkci $\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{u}^0)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi:

(W1) $\psi(\mathbf{M},\mathbf{p})$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(\mathbf{0},\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.
(W2) $\psi(\mathbf{M},\mathbf{p}^0)$ je **rostoucí v M** **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$. Dále $\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p})$ je **nerostoucí v p** (**pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** $\mathbf{M}^0$).
(W3) **spojitá v M** **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$ **a spojitá v p** **pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** $\mathbf{M}^0$.

(W4) $\psi(\mathbf{M},\mathbf{p})$ je **homogenní funkce stupně** 0 **současně v cenách p a výdajích M**. Znamená to, že platí $\psi(\lambda\mathbf{M},\lambda\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{M},\mathbf{p})$ **pro libovolné** $\lambda \in (0,+\infty)$

(W5) $\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p})$ je **konkávní funkce v p** **pro jakoukoliv úroveň výdajů** $\mathbf{M}^0$. Znamená to, že platí $\psi(\mathbf{M}^0,\mu\mathbf{p} + (1-\mu)\mathbf{p}^*) \geq \mu.\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p}) + (1-\mu).\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p}^*)$ pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$.

(W5*) $\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p})$ je **kvazikonvexní funkce v p** **pro jakoukoliv úroveň výdajů** $\mathbf{M}^0$. Znamená to, že platí pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$

$$\psi(\mathbf{M}^0,\mu\mathbf{p} + (1-\mu)\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{Max}[\psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p}); \psi(\mathbf{M}^0,\mathbf{p}^*)]$$

Prvá z vlastností (W1) konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme: při kladných cenách statků nejsme bez peněz prostě žádné statky schopni zakoupit.

(W2) Ve vztahu k M se předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokován do neužitečných komodit. Dle téže (W2), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení může dojít u nenakupovaných statků).[1]

Spojitost (W3) v cenách i příjmu zřejmě odpovídá reálné situaci, že „nepatrná změna" kterékoliv z cen p_i ani příjem M nemůže vyvolat skokovitou (nespojitou) změnu užitku plynoucího z nakupovaného spotřebního koše.

Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny $p_1, p_2, ..., p_n$ i příjem M změnily v témže poměru (např. λ-násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech p_i / M není ze strany spotřebitele důvod ke změně poptávkového chování po potenciálně dostupných komoditách. (Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

Konečně poslední z vlastností (W5) interpretována v první verzi *(konkávnost)* **obrazně znamená, že při** libovolné **změně cen bude užitek z „lineární směsi" obou cenových vektorů přinejmenším roven „lineární směsi" dílčích užitků získaných s jedním, resp. druhým cenovým vektorem. Ve vlastnosti se nepřímo odráží „zisk v užitku" plynoucí z toho, že při cenových změnách lze aspoň něco „ušetřit" tím, že při substitučních možnostech lze kupovat méně z více zdražených statků a více z méně zdražených (či zlevněných nebo těch, u kterých se cena nezměnila). Druhá interpretace** *(kvazikonvexnost)* **pak určuje horní mez, kterou užitek ze směsi nemůže přesáhnout (ta je dána velikostí užitku z „užitkově příznivější" cenové situace.**

[1] **Již jsme zmínili, že výdaj υ ztotožňujeme s příjmem spotřebitele M**

Doplněk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ (definovaná na konvexní množině X) je pro dva body $x, z \in X$ (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

(A1) ryze **konvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(B1) ryze **konkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(C1) ryze **kvazikonvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < \mathrm{Max}[G(x), G(z)]$$

(D1) ryze **kvazikonkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > \mathrm{Min}[G(x), G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární $\lambda \in (0,1)$.**

(A2) konvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(B2) konkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(C2) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le \mathrm{Max}[G(x), G(z)]$$

(D2) kvazikonkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge \mathrm{Min}[G(x), G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.**

Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(.)$ větší, např. platí-li $G(x) < G(z)$, pak lze předchozí definice modifikovat např. takto:

(A3) konvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

(B3) konkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

(C3) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le G(z)$$

(D3) kvazikonkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge G(x) \quad .$$

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 Poptávkovou funkci po i-té komoditě *[commodity demand function]* *v Marshalovském tvaru [in the Marshallian form]*, zapsatelnou ve tvaru

(4.4) $$x_i = g_i(M, p_1, p_2, ..., p_n) \ ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru p a příjmu spotřebitele M.

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $x_i = g_i(M, p)$ $n+1$ proměnných M a p, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $g_1, ..., g_n$ má následující vlastnosti :

(D1M) $g_i(M, p)$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $g_i(0, p) = 0$.

(D2M) $g_i(M, p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v příjmu M**.

(D3M) $g_i(M, p)$ je **spojitá v příjmu M a spojitá v p_i** $(i = 1, 2, ..., n)$.

(D4M) **Marshallovské poptávkové funkce $x_i = g_i(M, p)$ jsou homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu.** Platí tedy $g_i(\lambda M, \lambda p) = g_i(M, p)$.

(D5HM) Úplná **soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná.** Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(M, p) = M$.

(D6M) **"Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické**, tzn. platí

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i} + x_i . \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M} \qquad \text{pro všechna } i, j$$

(D7M) **Matice S rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků** $s_{ij} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti S jsou podmínky $s_{ii} \le 0, i = 1, 2, ..., n.$). Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.

4.4 Hicksovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.6A) s podmínkou (3.6B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu μ obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 **Poptávkovou funkci po i-té komoditě** ***(commodity demand function)*** *v Hicksovském tvaru [in the Hicksian form]*, zapsatelnou ve tvaru

(4.5) $$x_i = h_i(u, p_1, p_2, ..., p_n),$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru $\mathbf{p}$ a na spotřebitelem žádané hladině užitku $\mathbf{u}$.

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(u, p)$ $n+1$ proměnných $\mathbf{u}$ a $\mathbf{p}$, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $h_1, ..., h_n$ má následující vlastnosti :

(D1H) $h_i(u, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(0, p) = 0$.

(D2H) $h_i(u, p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity** p_i **a neklesající v užitku** $\mathbf{u}$.

(D3H) $h_i(u, p)$ je **spojitá v užitku** $\mathbf{u}$ **a spojitá v** p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

(D4H) **Hicksovské poptávkové funkce** $x_i = h_i(u, p)$ **jsou homogenní stupně 0 v cenách** $\mathbf{p}$[2]. Znamená to, že platí $h_i(u, \lambda p) = h_i(u, p)$

(D5H) Úplná **soustava Hicksovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i h_i(u, p) = M$

(D6H) **"Křížové" derivace hicksovských poptávek** (podle jednotlivých cen) **jsou symetrické**, tzn. platí $\dfrac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i}$ pro všechna i, j

(D7H) **Matice** S^* **rozměrů** $[n \times n]$ **sestávající z prvků** $s_{ij}^* = \dfrac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S^* podmínku

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}\right]\cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

S^* je tvořena prvky s_{ij}^*, kde $s_{ij}^* = \dfrac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$.

Důsledkem negativní semidefinitnosti S^* jsou podmínky $s_{ii}^* \le 0$.

[2] Je-li výchozí (*výdajová*) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (*poptávková*) funkce homogenní stupně 0.

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny p_i a příjmu M, přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po i-tém statku. Spojitost ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozložení disponibilního příjmu M na nákup (ne však nutně všech) n komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5) a homogenita nultého stupně (D4) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí). Z ***podmínky součtovatelnosti*** (D5) takto vyplývají vztahy (platné pro $i = 1, 2, \ldots, n$) :

(4.6A,B) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_i} + g_i(M,p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ podle příjmu , resp. podle ceny p_i.

Identity (4.6A) a (4.6B) se nazývají ***Engelova*** resp. ***Cournotova agregační podmínka***. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4) Marshallovských poptávek obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

(4.7) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 0$$

Ověření **Z podmínky homogenity 0-stupně vyplývá $g_k(\lambda M, \lambda p) = g_k(M,p)$ a tedy též**

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = 0.$$

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda M} . \frac{\partial \lambda M}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda p} . \frac{\partial \lambda p}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda M} .M + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda p} .p$$

Speciální volbou pro $\lambda = 1$ dostaneme

$$0 = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} .M + \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p} .p = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} .M + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k} .p_k$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak udávají

4.5 Engelovy křivky

Určíme-li ceny $\mathbf{p} = (p_1, p_2, .., p_n)$ v Marshallovské poptávkové funkci (4.4) pevně, získáme

Definice 17 Engelovu křivku pro i-tou komoditu *[Engel curve]* zapsatelnou ve tvaru

(4.8) $$x_i = f_i(M) \ ,$$

která je charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu M a odvoditelné z poptávkových funkcí $g_i(M, \mathbf{p})$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit $p_1, p_2, ..., p_n$.

Definice 17A Máme-li poptávku po i-té komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenou zápisem (4.8) s nějakou ***Engelovou křivkou*** $f_i(M)$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) **Engelova křivka $f_i(M)$ je reálná, konečná nezáporná funkce** a platí $f_i(0) = 0$.

(E2) **Engelova křivka $f_i(M)$ je neklesající v příjmu M**.

(E3) **Engelova křivka $f_i(M)$ je spojitá v M.**

(E4) **Engelova křivka $f_i(M)$ je konkávní v M.**

(E5) Úplná **soustava Engelových křivek $f_i(M)$ je součtovatelná**, tzn. platí

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(M) = M \ .$$

(E6) Platí **Engelova agregační podmínka** $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial f_k(M)}{\partial M} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(M), i = 1, 2, ..., n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $g_i(M, \mathbf{p})$, pokud při pevném $\mathbf{p}$ omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost (E4) $f_i(M)$ jako funkce jedné proměnné M a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni M. ***Engelova křivka*** je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i-té komoditě.

Tečna k ***Engelově křivce*** vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a změnou důchodu M tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že výraz

$$s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} \Big/ \frac{\partial M}{M}$$ nazýváme **příjmová pružnost poptávky**.

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

a) je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek* .

b) je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu $(0,1)$, jde o *normální statek.*

c) je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o *příjmově inertní statek*

d) je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek.*

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou Hicksovských poptávkových funkcemi v rovnovážné situaci, je ***Shephardovo lemma***. Ronald W.Shephard je formuloval původně pro vztah mezi nákladovou funkcí (jako obdobou výdajové funkce) a poptávkovými funkcemi (po výrobních faktorech) v teorii produkce.

Tvrzení 6 *Shephardovo lemma* *[Shephard lemma]*

Máme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom jednotlivé ze soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.9)
$$\mathbf{x_i} = \frac{\partial \mathbf{E}\left(\mathbf{u^0},\mathbf{p}\right)}{\partial \mathbf{p_i}}$$

což znamená, že tvar poptávkové funkce po komoditě ζ_i je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí po užitek přinášejících statcích z výdajové funkce.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor $\mathbf{p^0}$, hladinu užitku $\mathbf{u^0}$ a příslušný vektor optimálních (ve vztahu $\mathbf{p^0}$) ***n*** komoditních množství $\mathbf{x^0}$. Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor $\mathbf{p}$ definujme funkci $\chi(\mathbf{p})$ vztahem

(4.10)
$$\chi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p_k x_k^0} - \mathbf{E}\left(\mathbf{u^0},\mathbf{p}\right)$$

Protože $\mathbf{x^0}$ není nutně optimální ve vztahu k $\mathbf{p}$, výdaje na pořízení množství $\mathbf{x^0}$ při cenách $\mathbf{p}$ musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k $\mathbf{p}^0$ - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$. Tedy $\chi(.)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi\left(\mathbf{p^0}\right)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud $\mathbf{p}$ je rovno $\mathbf{p}^0$. Proto všude tam, kde existují derivace $\dfrac{\partial \chi(.)}{\partial \mathbf{p_i}}$ musí platit v komoditní kombinaci $\mathbf{p}^0$

(4.10)
$$\frac{\partial \chi(\mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{x}_i^0 - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{0}$$

Protože jsme pevnou hodnotu $\mathbf{p}^0$ volili libovolně, je vztah (4.10) dokázán. □ .

Poznámka 1 I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze obecně zaručit, že *pomocí* ***Shephardova lemmatu*** odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí deklarovaných jako poptávkové, tj. (D1),... , (D6).

Poznámka 2 Opačný postup - tzn. sestrojení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí (aniž trváme na splnění vlastností (D1),... , (D6)) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0)$ existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. Pokud lze takovou výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. ***"podmínku integrability"***.

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost“ struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 ***Symetrie poptávkových funkcí*** ***[symmetry of the demand functions]***

Mějme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2),(V3),(V4),(V5), která má navíc spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí *Shephardova lemmatu* (4.10) platí:

(4.11)
$$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě vyplývá z tzv. *Youngovy věty známé z matematické analýzy* deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité. Pak platí:

(4.12)
$$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j \partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k \partial \mathbf{p}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. □.

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jit však o principiálně odlišný funkční typ. *(např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů)*. Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje „pestrost“ v možných vzájemných odlišností jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit ***Marshallovy poptávkové funkce***, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi(.)$, která má argumenty $\mathbf{p}$ a $\mathbf{M}$. Dostaneme

(4.13) $$\mathbf{x_i} = \mathbf{h_i}(\mathbf{u},\mathbf{p}) = \mathbf{h_i}(\psi(\mathbf{M},\mathbf{p}),\mathbf{p}) = \mathbf{g_i}(\mathbf{M},\mathbf{p})$$

tzn. ***soustavu poptávkových funkcí (pro*** $i = 1,2,....,n$ ***) v Marshallově tvaru.***

Pokud bychom byli postaveni před opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $\mathbf{g_i}(\mathbf{M},\mathbf{p}), \mathbf{i} = 1,2,....,\mathbf{n}$, dosadíme za argument $\mathbf{M}$-výdaj je plně vynaložen na nákup $\boldsymbol{x}$ - hodnotu výdajové funkce $E(u,\boldsymbol{p})$.

(4.14) $$\mathbf{x_i} = \mathbf{g_i}(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \mathbf{h_i}(\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}),\mathbf{p}) = \mathbf{h_i}(\mathbf{u},\mathbf{p})$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

(4.15) $$\psi(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}),\mathbf{p}) \equiv \mathbf{u}$$

Obdobou *Shephardova lemmatu* formulovaného ve vztahu k výdajové funkci pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v Marshallově tvaru) z nepřímé užitkové funkce $\psi(\mathbf{p},M)$je vztah známý jako Royova identita. Je pojmenována po svém objeviteli, francouzském ekonomu a matematikovi *René Royovi* [1943]. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik *Jean Villé* [1941].

Tvrzení 8 ***Royova identita*** ***[Roy-Villé identity]***

Máme dánu nepřímou užitkovou funkci $\psi(\mathbf{p},\mathbf{M})$ příslušnou užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.16) $$\mathbf{x_i}(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \frac{-\dfrac{\partial\psi(\mathbf{M},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p_i}}}{\dfrac{\partial\psi(\mathbf{M},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{M}}}$$

To znamená, že poptávkovou funkci po i-té komoditě obdržíme jako (záporně vzatý) podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$, a to jednak podle ceny $\mathbf{i}$-té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu M .

Důkaz tvrzení 8

Vztahem (4.7) jsme zapsali, že výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

$$\psi[E(u,p),p] = u . \tag{4.17}$$

Jestliže tuto identitu (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot p a u) derivujeme podle pevně zvolené ceny p_i, dostaneme *při uplatnění řetězového pravidla pro derivaci složené funkce* vztah

$$\frac{\partial\psi[E(u,p),p]}{\partial p_i} = \frac{\partial\psi(E(u,p))}{\partial E(u,p)}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(E(u,p))}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i} = 0 \tag{4.18}$$

, neboť při pevném u je $\frac{\partial u}{\partial p_i} = 0$ a dále $\frac{\partial p}{\partial p_i} = (0,0,....,1,...,0)'$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \partial_{ij}$ (*Kroneckerovo* ∂), $i,j = 1,2,....,n$ a dále $E(u,p) = M$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.18) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i} = 0 \tag{4.19}$$

Z *Shephardova lemmatu* víme, že $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} = x_i$ (tj.Hicksova poptávka po i-tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

$$x_i = g_i(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}} \tag{4.16}$$

□ .

Poznámka 3 Jestliže nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. s argumenty představujícími jednotkové ceny statků (dělené příjmem) $\psi\left(\frac{p_1}{M},\frac{p_2}{M},....,\frac{p_n}{M},1\right) = \psi^*(r_1,r_2,....,r_n)$, kde pracujeme s n-členným vektorem normovaných cen $(r_1,r_2,....,r_n)$, pak lze *Royovu identitu* zapsat jako

$$\frac{p_i x_i}{M} = \frac{\dfrac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}} \tag{4.20}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast i-té komodity na celkovém příjmu M jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi *přímou užitkovou*, *nepřímou užitkovou* a *výdajovou funkcí* a *soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru*

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M}$$

spotřebitel

užitková funkce

$$\boxed{u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Minimalizační úloha

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

za podmínky

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge u^0$$

Maximalizační úloha

$$\text{Max } u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M, \; x_i \ge 0$$

substituce

$$x_i = h_i\left(u^0, p\right)$$

substituce

$$x_i = g_i(M, p)$$

VÝDAJOVÁ FUNKCE

$$E\left(u^0, p\right)$$

← **inverze** →

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$\psi(M, p)$$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E\left(u^0, p\right)}{\partial p_i}$$

Royova identita

$$x_i = -\frac{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial M}}$$

derivace E podle p_i

záporný podíl derivací ψ podle p_i, M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V HICKSOVĚ TVARU

$$x_i = h_i\left(u^0, p\right)$$

←**substituce**→

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH v MARSHALLOVĚ TVARU

$$x_i = g_i(M, p)$$

*/ Podrobněji R.W. Shephard: Cost and Production Functions (1953) nebo tentýž autor: Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P. 1970.

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru lze získat v podstatě třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením maximalizačního problému (1A) při rozpočtovém omezení (1B).

(B) Z nepřímé užitkové funkce pomocí Royovy identity (4.16)

(C) Z Hicksovských poptávkových funkcí (4.5) substitucí (4.14)

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. *Cesta řešením maximalizačního problému nemusí vést k vyjádření marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a pokud je toto možné, bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani v případě (C) nemusíme vždy získat explicitní tvar poptávek (Problém je ale méně vážný než v případě (A).

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru lze získat rovněž třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením minimalizačního problému (6A) při užitkovém omezení (6B).

(B) Z výdajové funkce pomocí Shephardova lemmatu (4.9)

(C) Z Marshallovských poptávkových funkcí (4.4) substitucí (4.13)

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. *Cesta řešením minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a i když by toto bylo možné, bude zpravidla v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani zde v případě (C) nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek (byť problém je méně vážný než v (A)

Vztah (11) $\mathbf{x_i(E(u^0,p)) = h_i(u^0,p)}$ a *Shephardovo lemma* (4.9) dovolují psát obě soustavy (hicksovských i marshallovských) poptávkových funkcí vyjádřeními v parciálních diferenciálních rovnicích

(4.21A,B) $$\mathbf{x_i(E(u^0),p) = \frac{\partial E(u^0,p)}{\partial p_i}} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{x_i(M,p) = \frac{\partial E(\Psi(M,p),p)}{\partial p_i}}\ .$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.21) pro $\mathbf{E(u,p)}$, resp. $\mathbf{\Psi(M,p)}$ bychom tedy mohli – *aspoň v principu* – získat výdajovou, resp. přímou užitkovou funkci.

Sestavení/vytvoření výdajové funkce $E(u,p)$ z úplné soustavy hicksovských poptávkových funkcí $h_i(u,p)$ z (4.5) je však možné jen za předpokladů (D6H) a (D7H), tzn., že matice S^* musí být symetrická a pozitivně semidefinitní.

Podobně, **zpětné vytvoření/rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$ z úplné soustavy marshallovských poptávkových funkcí $g_i(M,p)$ z (4.4) je možné jen (mj.) za předpokladů (D6M), (D7M), tzn. že Sluckého substituční matice S bude symetrická a pozitivně semidefinitní.**

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 přímo můžeme vyvodit také jiným způsobem, ve kterém využijeme *Shephardova lemmatu.*

Vyjdeme přitom z identity

$$h_i(u,p) = x_i(E(u,p),p) \;,$$

kterou derivujeme podle ceny j-tého statku p_j. Dostaneme tak

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} \;,$$

Protože však zřejmě $E(u,p) = M$, $\frac{\partial p}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle *Shephardova lemmatu* (4.9) platí $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = x_j$, dostáváme z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} \;, \quad \text{neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} \;,$$

Poznámka 1 **Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme *Sluckého rovnici* v obvyklém zápisu**

$$\frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} = -x_j . \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} + \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} \qquad \textbf{, resp.}$$

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = -\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(u,p)}{\partial p_j} \;, \qquad .$$

Zaznamenejme, že důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco substituční člen (obecně definovaný jako $X_{ij} = \lambda . \frac{|U_{ij}|}{|U|} = \frac{u_j}{p_j} . \frac{|U_{ij}|}{|U|}$) je vyjádřen v Hicksovské notaci (s nepřítomností M) .

Poznámka 2 **Vzhledem k symetrii Hicksovských poptávkových funkcí**

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i}$$

platí pro Marshallovské poptávkové funkce tato symetrie

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M} . x_i + \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i} \qquad .$$