Definice 2.4.3.1 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT)).
$\mathrm{DFT}_N^{\pm} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\boldsymbol{X} = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$ určený maticí $N \times N$:
$\mathbb{W}_N^{\pm} = \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} \pm i\sin\frac{2\pi}{N}$ je N-tá primitivní odmocnina z 1, tj. $W_N^N = 1$, ale $W_N^k \ne 1$ pro $k = 1, \dots, N-1$. Tedy

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i\frac{2\pi kn}{N}} x_n \text{ pro } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zřejmě $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = \mathbb{W}_N^{\mp}$.

Věta 2.4.3.2 (Věta o inverzi).
Platí $\mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp} = \mathbb{W}_N^{\pm}(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = NI_N$ *a tedy* $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ *a* $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{W}_N^{\pm}$ *je unitární matice.*

Důkaz. Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp}$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn} W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n,\ q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro} \quad r = s \\ \frac{q^N - 1}{q-1} = 0 & \text{pro} \quad r \ne s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \ne 1$ pro $r \ne s$ v důsledku $0 < |r-s| \le N-1$. □

Poznámka 2.4.3.3. V systému MATLAB jsou operátory $\mathrm{DFT}_N^{\pm}$ realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách `fft` a `ifft` takto:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \underline{\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}$$

a

$$\underline{\boldsymbol{x}} = (\mathbb{W}_N^{-})^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{+}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{+}(\boldsymbol{X}) = \underline{\mathtt{ifft}(\boldsymbol{X})}.$$

Důsledek 2.4.3.4. *Podle (2.4.8), věty 2.4.3.2 a poznámky 2.4.3.3 platí*

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{W}_N^{+}\widehat{\boldsymbol{c}} = \mathrm{DFT}_N^{+}(\widehat{\boldsymbol{c}}) = \underline{N\,\mathtt{ifft}(\widehat{\boldsymbol{c}})},$$

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{c}}} = (\mathbb{W}_N^{+})^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \underline{\frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}.$$

2.4.4. **Periodogram.**

Periodogram = odhad energetické spektrální hustoty (2.4.6) reálné T-periodické funkce $x(t)$, kde za c_k, $k = 1, \dots, m$, $m := \left[\frac{N-1}{2}\right]$, dosadíme odhad $\widehat{c}_k$ z (2.4.7) spočtený pomocí DFT_N^{-} dle 2.4.3.4 po ekvidistantní diskretizaci jedné periody $x(t)$:
$T = N\Delta t,\ x_n = x(n\Delta t),\ n = 0, 1, \dots, N.$

Periodogram je tedy posloupnost hodnot $\{I_k\}_{k=1}^m$, kde

$$\underline{I_k} = I(\omega_k) = 2T|\widehat{c}_k|^2 = 2N\Delta t\left|\frac{1}{N}X_k\right|^2 = \underline{\frac{2}{N}\Delta t|X_k|^2},\ k = 1, \dots, m \tag{2.4.9}$$

a

$$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i\frac{2\pi kt}{N}} = \sum_{t=1}^{N} x_t e^{-i\frac{2\pi kt}{N}}.$$

Druhá rovnost je zde důsledkem N-periodicity $x_0 = x_N$.

Z hlediska kvalitativních závěrů nezáleží na multiplikativní konstantě, proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\Delta t = 1$ a dostáváme tak **výsledný vztah pro hodnoty I_k periodogramu** ve tvaru

$$I_k = I(\omega_k) = \frac{2}{N}|X_k|^2 = \frac{2}{N}\left\{\left(\sum_{t=1}^{N} x_t \cos\frac{2\pi kt}{N}\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_t \sin\frac{2\pi kt}{N}\right)^2\right\}, \; k = 1, \dots, m. \quad (2.4.10)$$

Velká hodnota I_k indikuje velkou energii k-té harmonické komponenty, tj. silné zastoupení složky $x_k(t) = c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k} e^{-i\omega_k t} = A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)$ v rozvoji $x(t)$ do Fourierovy řady.

Věta 2.4.4.1.

$$I_k = 2\sum_{|h|<N} \widehat{\gamma}(h) e^{-i\frac{2\pi hk}{N}} \quad pro \; k = 1, 2, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right],$$

kde $\widehat{\gamma}(h)$ *je odhad autokovarianční funkce vektoru* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ *spočtený dle 1.46.*

Důkaz.

$$I_k = \frac{2}{N}|X_k|^2 = \frac{2}{N} X_k \overline{X}_k = \frac{2}{N}\left(\sum_{s=1}^{N} x_s e^{-i\frac{2\pi sk}{N}}\right)\left(\sum_{t=1}^{N} \overline{x}_t e^{i\frac{2\pi tk}{N}}\right).$$

Protože dle důkazu věty 2.4.3.2 platí

$$\sum_{s=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi sk}{N}} = \sum_{t=1}^{N} e^{i\frac{2\pi tk}{N}} = 0 \text{ pro } k \neq 0(\text{mod} N),$$

lze psát

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{2}{N}\left(\sum_{s=1}^{N}(x_s - \widehat{x}) e^{-i\frac{2\pi sk}{N}}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}(\overline{x_t - \widehat{x}}) e^{i\frac{2\pi tk}{N}}\right) = \\
&= \frac{2}{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}(x_s - \widehat{x})(\overline{x_t - \widehat{x}}) e^{-i\frac{2\pi(s-t)k}{N}} \overset{h=s-t}{=} \\
&= 2\sum_{|h|<N} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-h}(x_{t+h} - \widehat{x})(\overline{x_t - \widehat{x}})}_{\widehat{\gamma}(h)} e^{-i\frac{2\pi hk}{N}}.
\end{aligned}$$

□

2.4.5. **Fisherův test periodicity.**

Položme $m = \left[\frac{N-1}{2}\right]$ a definujme statistiku

$$W = \max_{k=1,\dots,m} Y_k, \qquad \text{kde} \qquad Y_k = \frac{I_k}{\sum_{j=1}^{m} I_j}.$$

Protože $I_j \geq 0$ pro $j = 1, 2, \dots, m$, je $0 \leq W \leq 1$.

Nechť $X_t = P_t + E_t$, $E_t \sim WN(0, \sigma^2)$ gaussovský.
Platí-li nulová hypotéza $H_0: \; X_t = E_t$, pak testová statistika W má na intervalu $[0, 1]$ rozdělení, pro nějž platí

$$P(W > x) = \sum_{\substack{j=1 \\ 1-jx>0}}^{m} (-1)^{j-1}\binom{m}{j}(1 - jx)^{m-1}, \; 0 < x < 1,$$

přičemž $P(W > x) \approx m(1-x)^{m-1}$ je dobrá aproximace pro $m \leq 50$.

Nechť $g_F(1-\alpha)$ značí $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení statistiky W (tabelováno), tj. $P(W \leq g_F(1-\alpha)) = 1 - \alpha$. Pak H_0 zamítáme s rizikem α, pokud $W > g_F(1-\alpha)$. Je-li v takovém případě $I_{k_0} = \max_{k=1,\dots,m} I_k$, pak k_0-tou harmonickou komponentu považujeme za významnou. Další významnou harmonickou komponentu zjistíme z periodogramu délky $m-1$, kde vynecháme I_{k_0}, a tak pokračujeme dále, dokud není hypotéza H_0 přijata.

2.4.6. **Siegelův test periodicity.**

Tento test je vhodnější než Fisherův v případě většího množství harmonických komponent. Siegelova statistika je tvaru

$$T_\lambda = \sum_{k=1}^{m} (Y_k - \lambda\, g_F(1-\alpha))^+,\ 0 < \lambda < 1 \text{ (doporučená hodnota je } \lambda = 0,6).$$

H_0 zamítáme s rizikem α, jestliže $T_\lambda > t_\lambda(1-\alpha)$, kde $t_\lambda(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení T_λ (tabelováno).