

a) Rostoucí: $\alpha = 1, \beta = 1,02$

b) Klesající: $\alpha = 5, \beta = 0,95$

OBRÁZEK 3.6.1. Exponenciální trend

3.6.8. Metody pro odhad trendu.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$... ekvidistantní pozorování náhodného procesu $X = \{X_t | t \in \mathbb{Z}\}$
 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$... pozorované chyby
 $t \in \{1, 2, \dots, n\}$

Následují metody pro odhad růstového trendu v ekonomických časových řadách [1, str. 34–41].

3.6.8.1. Exponenciální trend

Model:

$$Tr_t = \alpha\beta^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Tento model je vhodný pro popis trendu s **konstantním koeficientem růstu**

$$\frac{Tr_{t+2} - Tr_{t+1}}{Tr_{t+1} - Tr_t} = \frac{\alpha\beta^{t+2} - \alpha\beta^{t+1}}{\alpha\beta^{t+1} - \alpha\beta^t} = \beta,$$

kde při $\alpha > 0$ dostáváme pro $\beta > 1$ růst a pro $0 < \beta < 1$ pokles (obr. 3.6.1). V případě $\alpha < 0$ je tomu naopak.

Algoritmus:

Zlogaritmováním provedeme transformaci na aditivní model s lineárním trendem:

$$\ln Tr_t = \ln \alpha + t \ln \beta, \quad \beta = (\ln \beta, \ln \alpha)^T.$$

Odhad β spočteme metodou lineární regrese dle odst. 2.5.1.1. Odlogaritmováním hodnot získaných podle vztahů (2.5.1)-(2.5.3) pak dostaneme výsledky pro původní model.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} \approx \beta, \quad \text{resp. } \Delta \ln x_t = \ln x_{t+1} - \ln x_t \approx \ln \beta.$$

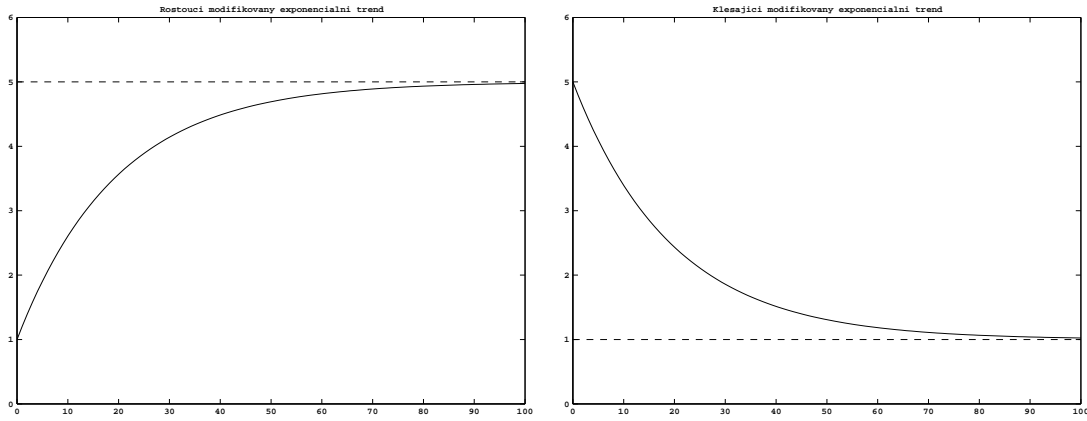
Kontrolujeme tedy, zda tato veličina osciluje náhodně kolem konstantní úrovně.

3.6.8.2. Modifikovaný exponenciální trend

Model:

$$Tr_t = \gamma + \alpha\beta^t, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Jedná se o tříparametrické zobecnění předchozího modelu. Používá se především v případě, kdy trend má konstantní koeficient růstu, resp. poklesu a přitom je shora, resp. zdola asymptoticky omezen. Tehdy volíme $0 < \beta < 1$, přičemž γ pak odpovídá asymptotické úrovni, ke které trend roste ($\alpha < 0$), resp. klesá ($\alpha > 0$). Viz obr. 3.6.2.



a) Rostoucí: $\alpha = -4$, $\beta = 0,95$, $\gamma = 5$

b) Klesající: $\alpha = 4$, $\beta = 0,95$, $\gamma = 1$

OBRÁZEK 3.6.2. Modifikovaný exponenciální trend

Algoritmus:

- Soubor pozorování x rozdělíme na stejně velké třetiny délky m (pokud $n \neq 3m$, vynecháme ze začátku řady $n \bmod 3$ pozorovaných hodnot).
- Pozorování v jednotlivých třetinách sečteme. Užitím vzorce pro součet m členů geometrické řady $S := \sum_{t=1}^m \beta^t = \beta(\beta^m - 1)/(\beta - 1)$ pak obdržíme tři rovnice o třech neznámých α, β, γ :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \sum_{t=1}^m x_t &\approx \sum_{t=1}^m Tr_t &= m\gamma + \alpha S \\ \Sigma_2 &:= \sum_{t=m+1}^{2m} x_t &\approx \sum_{t=m+1}^{2m} Tr_t &= m\gamma + \alpha\beta^m S \\ \Sigma_3 &:= \sum_{t=2m+1}^{3m} x_t &\approx \sum_{t=2m+1}^{3m} Tr_t &= m\gamma + \alpha\beta^{2m} S.\end{aligned}$$

- Systém rovnic vyřešíme postupnou eliminací jednotlivých neznámých:

$$\left. \begin{aligned}\Sigma_3 - \Sigma_2 &= \alpha\beta^m S(\beta^m - 1) \\ \Sigma_2 - \Sigma_1 &= \alpha S(\beta^m - 1)\end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta^m = \frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}.$$

Pak

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 = \alpha S(\beta^m - 1) \Rightarrow \alpha = \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{S(\beta^m - 1)} \quad \text{a} \quad \Sigma_1 = m\gamma + \alpha S \Rightarrow \gamma = \frac{\Sigma_1 - \alpha S}{m}.$$

- Obdrželi jsme tak přibližné vztahy pro výpočet neznámých parametrů α, β, γ :

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left(\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1} \right)^{\frac{1}{m}} \\ \hat{S} &= \hat{\beta} \frac{\hat{\beta}^m - 1}{\hat{\beta} - 1} \\ \hat{\alpha} &= \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{\hat{S}(\hat{\beta}^m - 1)} \\ \hat{\gamma} &= \frac{\Sigma_1 - \hat{\alpha}\hat{S}}{m}.\end{aligned}$$

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$$\frac{\Delta Tr_{t+1}}{\Delta Tr_t} = \frac{\gamma + \alpha\beta^{t+2} - (\gamma + \alpha\beta^{t+1})}{\gamma + \alpha\beta^{t+1} - (\gamma + \alpha\beta^t)} = \frac{\alpha\beta^{t+1}(\beta - 1)}{\alpha\beta^t(\beta - 1)} = \beta.$$

Kontrolujeme tedy, zda veličina $\Delta x_{t+1}/\Delta x_t = (x_{t+2} - x_{t+1})/(x_{t+1} - x_t)$ osciluje náhodně kolem konstantní úrovně.

3.6.8.3. Logistický trend

Model:

$$Tr_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha\beta^t}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Tento model dále rozšiřuje možnosti modifikovaného exponenciálního trendu, neboť má inflexní bod v $t = -\ln \alpha / \ln \beta$, který zachycuje změnu akcelerace růstu (obr. 3.6.3).

Toto tvrzení nyní ověříme:

$$Tr'_t = -\frac{\gamma \alpha (\ln \beta) \beta^t}{(1 + \alpha \beta^t)^2} = -(\ln \beta) Tr_t \frac{\alpha \beta^t}{1 + \alpha \beta^t} = -\frac{\ln \beta}{\gamma} Tr_t (\gamma - Tr_t),$$

kde jsme použili $\gamma - Tr_t = \gamma - \frac{\gamma}{1 + \alpha \beta^t} = \frac{\alpha \beta^t \gamma}{1 + \alpha \beta^t}$. Oba členy Tr_t a $\gamma - Tr_t$ působí proti sobě a příslušný lokální extrém odpovídající inflexnímu bodu nalezneme řešením rovnice $Tr''_t = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= Tr''_t = -\frac{\ln \beta}{\gamma} [Tr'_t (\gamma - Tr_t) - Tr_t Tr'_t] = -\frac{\ln \beta}{\gamma} Tr'_t (\gamma - 2Tr_t) \\ &\Leftrightarrow \gamma = 2Tr_t = \frac{2\gamma}{1 + \alpha \beta^t} \Leftrightarrow 1 + \alpha \beta^t = 2 \Leftrightarrow \alpha \beta^t = 1 \Leftrightarrow \ln \alpha + t \ln \beta = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}. \end{aligned}$$

Algoritmus:

- Transformace časové řady: $z_t = \frac{\Delta x_t}{x_t}$, kde $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$.
Označíme-li $y_t := Tr_t$, pak $\Delta y_t \approx Tr'_t = -\frac{\ln \beta}{\gamma} y_t (\gamma - y_t)$ a tedy $\frac{\Delta y_t}{y_t} \approx -\ln \beta + \frac{\ln \beta}{\gamma} y_t$.
Protože $x_t = y_t + e_t \Rightarrow \frac{1}{x_t} = \frac{1}{y_t} + e_t^{(1)}$ a $\Delta x_t = \Delta y_t + \Delta e_t$, dostáváme

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{\Delta x_t}{x_t} = \frac{\Delta y_t}{y_t} + \underbrace{\Delta y_t e_t^{(1)} + \Delta e_t \frac{1}{y_t} + \Delta e_t e_t^{(1)}}_{e_t^{(2)}} \\ &= -\ln \beta + \frac{\ln \beta}{\gamma} (x_t - e_t) + e_t^{(2)} \\ &= -\ln \beta + \frac{\ln \beta}{\gamma} x_t + e_t^{(3)}, \text{ kde } e_t^{(3)} = e_t^{(2)} - \frac{\ln \beta}{\gamma} e_t. \end{aligned}$$

- Odhad parametrů β a γ :
Parametry odhadneme v lineárním modelu

$$z_t = \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + e_t^{(3)}, \text{ kde } \beta_1 := \ln \beta, \beta_2 = \frac{\ln \beta}{\gamma} = \frac{\beta_1}{\gamma}.$$

Pak $\hat{\beta} = e^{\hat{\beta}_1}$ a $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$.

- Odhad parametru α :
Odhad $\hat{\alpha}$ nalezneme z $x_t \approx \gamma / (1 + \alpha \beta^t)$, odkud

$$\alpha \beta^t \approx \frac{\gamma}{x_t} - 1 \Leftrightarrow \ln \alpha + t \ln \beta \approx \ln \left(\frac{\gamma}{x_t} - 1 \right).$$

Chybu této aproximace potlačíme zprůměrováním pro $t = 1, 2, \dots, n$:

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\ln \alpha + t \ln \beta) = \ln \alpha + \frac{1}{n} (\ln \beta) \frac{n(n+1)}{2} \doteq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{\gamma}{x_t} - 1 \right).$$

Odtud po dosazení odhadů $\hat{\beta}_1 = \ln \hat{\beta}$ a $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$ dostáváme výsledný odhad pro $\ln \hat{\alpha}$:

$$\ln \hat{\alpha} = -\frac{(n+1)\hat{\beta}_1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2 x_t} - 1 \right) \dots \text{ tzv. Rhodesův vztah.}$$

Tedy pak $\hat{\alpha} = e^{\ln \hat{\alpha}}$.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

Křivka 1. diferencí $x_{t+1} - x_t \approx Tr'_t$ osciluje kolem křivky podobné normální hustotě (obr. 3.6.3b)). Navíc $1/Tr_t$ se zřejmě chová jako modifikovaný exponenciální trend, takže kontrolujeme, zda

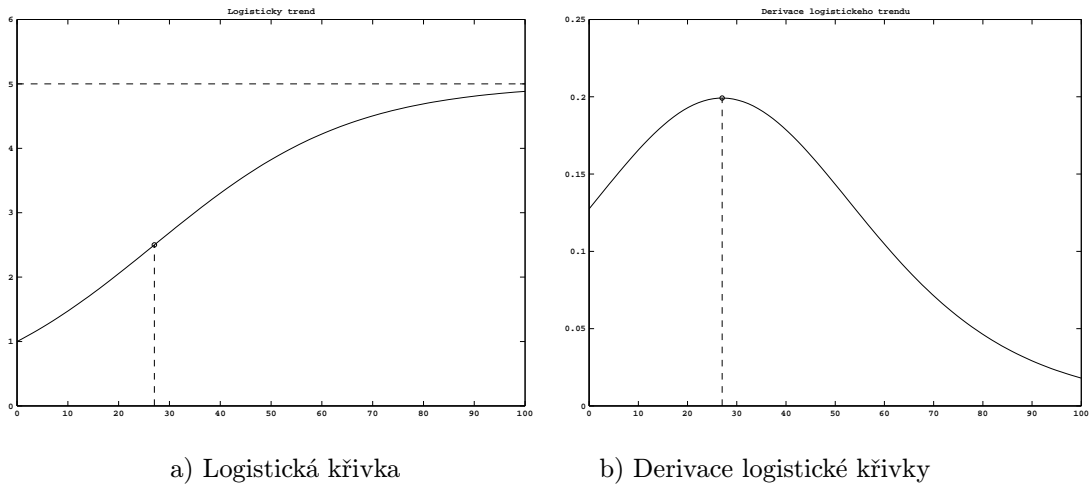
$$\left(\frac{1}{x_{t+2}} - \frac{1}{x_{t+1}} \right) / \left(\frac{1}{x_{t+1}} - \frac{1}{x_t} \right)$$

osciluje kolem konstantní hodnoty.

3.6.8.4. Gompertzova křivka

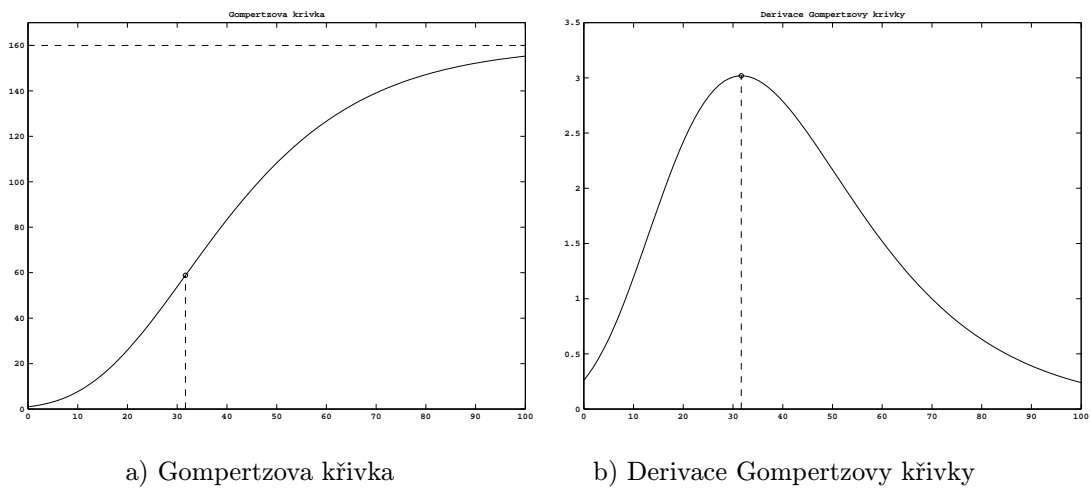
Model:

$$Tr_t = e^{\gamma + \alpha \beta^t}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0, t = 1, 2, \dots, n.$$



a) Logistická křivka

b) Derivace logistické křivky

OBRÁZEK 3.6.3. Logistický trend: $\alpha = 4$, $\beta = 0,95$, $\gamma = 5$ 

a) Gompertzova křivka

b) Derivace Gompertzovy křivky

OBRÁZEK 3.6.4. Logistický trend: $\alpha = -\ln 160$, $\beta = 0,95$, $\gamma = \ln 160$

Má podobné vlastnosti jako logistický trend, tj. opět je možno modelovat inflexi — tentokrát pro $\alpha < -1$ v bodě $t = -\ln(-\alpha)/\ln \beta$. V tomto případě však 1. derivace Tr'_t není symetrická kolem bodu inflexe, ale je zešikmena doleva (obr. 3.6.4).

Algoritmus:

Zlogaritmováním převedeme úlohu na modifikovaný exponenciální trend.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$\ln Tr_t$ se chová jako modifikovaný exponenciální trend, takže stačí kontrolovat, zda

$$(\ln x_{t+2} - \ln x_{t+1}) / (\ln x_{t+1} - \ln x_t)$$

osciluje kolem konstantní hodnoty.

LITERATURA

1. Tomáš Cipra, *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, SNTL, Praha, 1986. 3.6.8