ČASOVÉ ŘADY

VíTĚZSLAV VESELÝ

PODPORA VÝUKY NA POČÍTAČOVÉ SÍTI

`http://www.math.muni.cz/~vesely`

Algoritmy pro časové řady v MATLABu:

`d = vesely('cas_rady')` ... připojení a výpis obsahu knihovny

`d` ... výstup=úplná cesta do adresáře knihovny.

1. Úvod

1.1. Ukázky časových řad.

Časová řada = soubor pozorování nějaké veličiny $\{x_t, t \in T\}$, kde t je zpravidla čas a $T \subseteq \mathbb{R}$.

Obr. 1.1:
Měření proudu procházejícího odporem r v obvodu se střídavým napětím,
$v(t) = a\cos(vt + \Theta)$, tj. $x_t = \frac{a}{r}\cos(vt + \Theta)$.

Obr. 1.2 (MATLAB: `getdata('brockwell.dat/uspop.dat')`):
Růst populace v USA v letech 1790–1980 sledovaný v desetiletých intervalech.

Obr. 1.3 (MATLAB: `getdata('brockwell.dat/strikes.dat')`):
Počet stávek v USA v letech 1951–1980.

Obr. 1.4: Výsledky Národní a Americké ligy v baseballu v letech 1933–1980.

Obr. 1.5 (MATLAB: `getdata('brockwell.dat/sunspots.dat')`):
Počty slunečních skvrn v letech 1770–1869.

Obr. 1.6 (MATLAB: `getdata('brockwell.dat/deaths.dat')`):
Počet úmrtí při nehodách v USA v letech 1973–1978.

1.2. Oblasti uplatnění metod analýzy časových řad.

fyzika, technika:
- seismický záznam v geofyzice.
- řada nejvyšších denních teplot v meteorologii.
- průběh výstupního signálu určitého elektrického přístroje.
- tenzometrické měření povrchového napětí v provozu namáhané strojní součástky.

biologie, ekologie: sledování různých parametrů znečištění ovzduší.
medicína: záznam EKG nebo EEG.
společenské vědy: změny v počtu a složení obyvatelstva.
sociologie: vývoj rozvodovosti.
EKONOMIE: Teorie časových řad = jedna z nejdůležitějších kvantitativních metod pro analýzu ekonomických dat, např.:
- analýza poptávky po určitém výrobku
- analýza objemu zemědělské produkce
- analýza počtu cestujících v letecké dopravě
- analýza vývoje kurzu akcií na burze

Date: 27. května 1999.

1.3. Cíl analýzy.

Porozumění mechanismu, jímž se generují sledované údaje.
Znalost modelu tohoto mechanismu $\Rightarrow$ znalost algoritmu, jímž můžeme chování tohoto mechanismu simulovat na počítači $\Rightarrow$ schopnost popsat s jistou přesností jeho chování:

- mezi časovými okamžiky měření (**interpolace**)
- v budoucnosti (**extrapolace, prognóza**)
- s cílem řídit a optimalizovat činnost určitého systému vhodnou volbou vstupních a počátečních podmínek (**regulace**), např. regulace složitých technologických procesů.

1.4. Některé specifické problémy analýzy časových řad.

a) Volba okamžiků pozorování:

- jsou přímo **diskrétní svou povahou**, např. úroda obilí za jednotlivé roky.
- vznikají **diskretizací spojité časové řady**, např. teplota v danou denní dobu na daném místě.
- vznikají **akumulací (agregací)** hodnot za určité období, např. denní množství srážek, roční výroba závodu. Místo akumulace se někdy provádí průměrování.

Je-li dána možnost volby, je třeba jí věnovat pozornost:

- **málo bodů** $\Rightarrow$ unikne charakteristický rys řady.
- **mnoho bodů** $\Rightarrow$ zvýší se výpočetní náročnost.
- **ekvidistantní diskretizace** zpravidla usnadní numerické zpracování, ale neumožňuje adaptivně měnit hustotu diskretizace v závislosti na lokálním charakteru řady.
- **při agregaci** se mohou porušit vlastnosti původní řady.

b) Problémy s kalendářem:

- různá délka kalendářních měsíců.
- 4 nebo 5 víkendů v měsíci.
- různý počet pracovních dnů v měsíci.
- pohyblivé svátky: např. svátek na začátku měsíce sníží prodej potravin za tento měsíc, ale zvýší jej za předchozí v důsledku efektu předzásobení.
  Příklad 'očištění' časové řady např. od proměnlivé délky měsíce:
  zavedeme 'standardní' měsíc o délce 30 dnů a pak údaj třebas o produkci za leden přenásobíme korekčním faktorem $\frac{30}{31}$.

c) Problémy s nekompatibilitou jednotlivých měření:

Příklad: hodnota nějakého ukazatele se jeden rok týká např. 85 podniků, další rok jen 82 apod.

d) Problémy s délkou časových řad:

- zvětšení počtu měření (např. půlením časových intervalů mezi body) nemusí vždy znamenat zvětšení množství informace.
- někdy se mohou objevit protichůdné tendence: metoda zpracování vyžaduje delší řadu, ale na druhé straně řada vzniklá dlouhodobým sledováním může měnit charakteristiky svého modelu v čase $\Rightarrow$ obtíže s konstrukcí modelu.

1.5. Označení a základy matematické statistiky.

$s := v$, resp. $v =: s$ ... označení výrazu v symbolem s.

Číselné obory:
$\mathbb{N}$ ... množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ... množina všech nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$ ... množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$ ... množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$ ... množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{C}$ ... množina všech komplexních čísel
$(\cdot)^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ... zobrazení definované předpisem $(x)^+ = \max(0, x)$
(a, b) ... otevřený interval

$[a, b]$ ... uzavřený interval
$\mathcal{I}(a, b) \quad = \quad \{x \mid \min(a, b) < x < \max(a, b)\}$
$\mathcal{I}[a, b] \quad = \quad \{x \mid \min(a, b) \leq x \leq \max(a, b)\}$.

Vektory:
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ... zpravidla sloupcové
$\boldsymbol{x} + h = (x_1 + h, \ldots, x_n + h)^T, \ h \in \mathbb{C}$
$\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in \mathbb{N}^k, \ t_i \in \{1, \ldots, n\}$ pro $i = 1, \ldots, k, \ k \leq n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_t} := (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})^T \in \mathbb{C}^k$
$1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}(i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T$
$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \ d\boldsymbol{x} = dx_1 \ldots dx_n$
$\mathbf{0}, \mathbf{0}_{n\times 1}$ ... nulový sloupcový vektor délky n.

Matice:
$A, A_{m\times n} = [a_{ij}] = [A(i, j)]$ ... matice rozměru $m \times n$
$\mathcal{R}(A) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\}$ ... obor hodnot operátoru A
$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ ... jádro operátoru A
$A^T = [a_{ji}]$ ... transponovaná matice
$A^* = [\bar{a}_{ji}]$ ... hermitovsky sdružená matice
$I, I_n = I_{n\times n} = [\delta_{ij}]$ ... jednotková matice řádu n
$|A|$ ... determinant čtvercové matice A
$0, 0_{m\times n} = [0]$ ... nulová matice rozměru $m \times n$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \ldots \text{ diagonální matice}$$

$A(i, :) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) =: r_i$ ... i-tý řádek matice A ve stylu MATLAB
$A(:, j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T =: s_j$ ... j-tý sloupec matice A ve stylu MATLAB
$A = [r_1; \ldots; r_m] = [s_1, \ldots, s_n]$ ... blokový zápis matice A ve stylu MATLAB
$A > 0$ (resp. $A \geq 0$) ... pozitivně (semi)definitní matice.

Norma a skalární součin vektorů:
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, \bar{y}_i = \boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}$, speciálně:
$\boldsymbol{y} = A^*\boldsymbol{x} \Leftrightarrow y_i = \langle \boldsymbol{x}, A(:, i)\rangle$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$
$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ ... Euklidovská norma.

Schwarzova nerovnost:
$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$, kde rovnost nastane právě když vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou lineárně závislé.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:
Ω ... základní prostor elementárních jevů
$\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ ... σ-algebra náhodných jevů
P ... pravděpodobnostní míra na $\mathcal{A}$
Všechny náhodné veličiny budeme vždy uvažovat nad týmž pravděpodobnostním prostorem. Komplexní náhodnou veličinou budeme rozumět veličinu $X = X_r + iX_i$, kde X_r a X_i jsou reálné náhodné veličiny představující po řadě reálnou a imaginární část X
$\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ... (komplexní) náhodný vektor tvořený (komplexními) náhod. veličinami X_i.

Střední hodnota:
$\mu = \mu_X = \mathrm{E}X$ ... střední hodnota náhodné veličiny X
$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbb{X}} = \mathrm{E}\mathbb{X} = (\mathrm{E}X_1, \ldots, \mathrm{E}X_n)^T$ ... střední hodnota náhodného vektoru $\mathbb{X}$.

Rozptyl a kovariance náhodných veličin:
$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathrm{var}X = \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^2 = \mathrm{E}|X|^2 - |\mathrm{E}X|^2 \geq 0$ ... rozptyl X
$\sigma_{XY} = \mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)\overline{(Y - \mathrm{E}Y)} = \mathrm{E}X\overline{Y} - (\mathrm{E}X)(\overline{\mathrm{E}Y})$ ... kovariance X a Y
$\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}X, \ \mathrm{cov}(Y, X) = \overline{\mathrm{cov}(X, Y)}$
$\mathrm{cov}(\sum_r X_r, \sum_s Y_s) = \sum_r \sum_s \mathrm{cov}(X_r, Y_s)$ a odtud speciálně:
$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}X + \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(Y, X) + \mathrm{var}Y = \mathrm{var}X + 2Re\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}Y$.

Varianční a kovarianční matice náhodných vektorů:
$\Sigma_{\mathbb{X}} = \mathrm{var}\mathbb{X} = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)] = \mathrm{E}(\mathbb{X} - \mathrm{E}\mathbb{X})(\mathbb{X} - \mathrm{E}\mathbb{X})^* = \mathrm{E}\mathbb{X}\mathbb{X}^* - (\mathrm{E}\mathbb{X})(\mathrm{E}\mathbb{X})^*$ ... varianční matice $\mathbb{X}$
$\Sigma_{\mathbb{X}\mathbb{Y}} = \mathrm{cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = [\mathrm{cov}(X_i, Y_j)] = \mathrm{E}(\mathbb{X} - \mathrm{E}\mathbb{X})(\mathbb{Y} - \mathrm{E}\mathbb{Y})^* = \mathrm{E}\mathbb{X}\mathbb{Y}^* - (\mathrm{E}\mathbb{X})(\mathrm{E}\mathbb{Y})^*$ ...
... kovarianční matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$

$\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{X}) = \mathrm{var}\mathbb{X},\ \mathrm{cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}) = \mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})^* \Rightarrow \mathrm{var}\mathbb{X} = (\mathrm{var}\mathbb{X})^* \ldots$
$\ldots$ **varianční matice $\mathbb{X}$ je hermitovská**.

Pro konstantní komplexní vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{c}$ a matice B a D odpovídajících rozměrů platí:
$\mathrm{cov}(\boldsymbol{a}+B\mathbb{X}, \boldsymbol{c}+D\mathbb{Y}) = \mathrm{cov}(B\mathbb{X}, D\mathbb{Y}) = B\,\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\,D^*$.

$$\Downarrow \mathbb{X} = \mathbb{Y}$$

$\mathrm{var}(\boldsymbol{a}+B\mathbb{X}) = \mathrm{cov}(\boldsymbol{a}+B\mathbb{X}, \boldsymbol{a}+B\mathbb{X}) = \mathrm{cov}(B\mathbb{X}, B\mathbb{X}) = B\,\mathrm{var}(\mathbb{X})\,B^*$.

$$\Downarrow \boldsymbol{b}^* = B$$

$0 \le \mathrm{var}(\boldsymbol{b}^*\mathbb{X}) = \boldsymbol{b}^*\mathrm{var}\mathbb{X}\,\boldsymbol{b} \Rightarrow \mathrm{var}\mathbb{X} \ge 0 \ldots$ **varianční matice je pozitivně semidefinitní**.
$\Sigma_{\mathbb{X}}$ je tedy celkem hermitovská a pozitivně semidefinitní a má proto reálná nezáporná vlastní čísla λ_i.
Zřejmě existuje matice $\Sigma_{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2}}$, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ a přitom platí: $\Sigma_{\mathbb{X}} = \Sigma_{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2}}$.

Dále platí
$\mathrm{cov}(\sum_r \mathbb{X}_r, \sum_s \mathbb{Y}_s) = \sum_r \sum_s \mathrm{cov}(\mathbb{X}_r, \mathbb{Y}_s)$ a odtud speciálně:
$\mathrm{var}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{var}\mathbb{X} + \mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathrm{cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}) + \mathrm{var}\mathbb{Y} = \mathrm{var}\mathbb{X} + 2Re\,\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathrm{var}\mathbb{Y}$.

1.6. **Normální rozdělení a rozdělení z něj odvozená.**

1. _Normální rozdělení:_
   $X \sim N(\mu,\sigma^2),\ \mu = \mathrm{E}X,\ \sigma^2 = \mathrm{var}X \ldots$
   $\ldots$ reálná náhodná veličina s **normálním (gaussovským) rozdělením**;
   $f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ldots$ **hustota** náhodné veličiny X;
   $\Phi(t) := \mathrm{E}e^{itX} = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \ldots$ **charakteristická funkce** náhodné veličiny X;
   $U \sim N(0,1) \ldots$ **standardizované normální rozdělení** náhodné veličiny U;
   $u_\alpha = F^{-1}(\alpha) \ldots$ α-kvantil pro U, kde $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ značí distribuční funkci U;
   $\mathbb{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, V),\ \boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}\mathbb{X},\ V = \mathrm{var}\mathbb{X} \ldots$
   $\ldots$ reálný náhodný vektor s **n-rozměrným normálním rozdělením**;
   $f(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{(2\pi)^n |V|})^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T V^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})} \ldots$ **n-rozměrná hustota** náhodného vektoru $\mathbb{X}$;
   $\Phi_n(\boldsymbol{t}) := \mathrm{E}e^{i\boldsymbol{t}^T\mathbb{X}} = e^{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T V \boldsymbol{t}} \ldots$ **charakteristická funkce** náhodného vektoru $\mathbb{X}$;
   $\mathbb{U} \sim N_n(\boldsymbol{0}, I_n) \ldots$ **standardizované normální rozdělení** náhodného vektoru $\mathbb{U}$.

   Platí

   $X \sim N(\mu,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$;
   $\mathbb{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, V) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} + B\mathbb{X} \sim N_m(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{\mu}, BVB^T)$ pro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ a matici $B = B_{m\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

2. _Rozdělení $\chi^2(n)$:_
   Nechť $U_i \sim N(0,1)$ pro $i = 1,\ldots,n$ jsou stochasticky nezávislé, pak náhodná veličina
   $C = \sum_{i=1}^n U_i^2 \sim \chi^2(n)$ má **Pearsonovo "chí kvadrát" rozdělení o n stupních volnosti**;
   $\chi_\alpha(n) \ldots$ α-kvantil pro C.

   Platí

   $C_i \sim \chi^2(n_i)$ pro $i = 1,\ldots,m$ stochasticky nezávislé $\quad \Rightarrow \quad C = \sum_{i=1}^m C_i \sim \chi^2(n_1+n_2+\cdots+n_m)$.

3. _Studentovo t rozdělení:_
   Nechť $U \sim N(0,1)$ a $C \sim \chi^2(k)$ jsou stochasticky nezávislé, pak náhodná veličina
   $T = \frac{U}{\sqrt{C/k}} \sim t(k)$ má **Studentovo t rozdělení o k stupních volnosti**;
   $t_\alpha(k) \ldots$ α-kvantil pro T.

4. _Fisher-Snedecorovo F rozdělení:_
   Nechť $C_1 \sim \chi^2(n_1)$ a $C_2 \sim \chi^2(n_2)$ jsou stochasticky nezávislé, pak náhodná veličina
   $F = \frac{C_1/n_1}{C_2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$ má **Fisher-Snedecorovo F rozdělení s n_1 a n_2 stupni volnosti**;
   $F_\alpha(n_1,n_2) \ldots$ α-kvantil pro F.

1.7. **Prostor** $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$**.**

$L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definujeme jako množinu všech (komplexních) náhodných veličin nad týmž pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, které mají konečné druhé momenty (resp. rozptyly - viz dále 1.11), tj. $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P) := \{X \mid X \text{ náhodná veličina nad } (\Omega, \mathcal{A}, P),\ \mathrm{E}|X|^2 < \infty\}$.

Poznamenejme, že do tohoto prostoru zahrnujeme také všechny konstanty z $\mathbb{C}$, které považujeme za náhodné veličiny s nulovým rozptylem.

Věta 1.8. *$L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je* **Hilbertův prostor** *se skalárním součinem $\langle X, Y\rangle = \mathrm{E}X\overline{Y}$ a normou $\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$.*

Důkaz. $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je obdobou funkcionálního prostoru $L_2(\mathcal{I})$ tvořeného funkcemi absolutně integrovatelnými v kvadrátu na intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Totiž $\mathrm{E}|X|^2 = \int_\Omega |X(\omega)|^2\, dP(\omega)$, takže namísto s Lebesgueovým integrálem pracujeme s obecnějším pojetím integrálu, kde Lebesgueova míra je nahrazena pravděpodobnostní mírou P:

- **Skalární součin** $\langle X, Y\rangle$ **existuje a je konečný** pro každé $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jak snadno nahlédneme z nerovnosti
$$4|X\overline{Y}| = (|X| + |\overline{Y}|)^2 - (|X| - |\overline{Y}|)^2 \leq (|X| + |\overline{Y}|)^2 + (|X| - |\overline{Y}|)^2 = 2(|X| + |\overline{Y}|)^2,$$
odkud užitím $|\overline{Y}| = |Y|$ dostáváme
$$|X\overline{Y}| \leq \frac{1}{2}(|X|^2 + |Y|^2),$$
takže
$$|\mathrm{E}X\overline{Y}| \leq \int_\Omega |X(\omega)\overline{Y(\omega)}|\, dP(\omega) \leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |X(\omega)|^2\, dP(\omega) + \int_\Omega |Y(\omega)|^2\, dP(\omega)\right] < \infty.$$
- $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **je vektorovým prostorem**. Je uzavřený na násobení skaláry $c \in \mathbb{C}$, neboť $\mathrm{E}|cX|^2 = |c|^2\mathrm{E}|X|^2 < \infty$. Uzavřenost vzhledem ke sčítání plyne z:
$$|X + Y|^2 \leq (|X| + |Y|)^2 = |X|^2 + 2|XY| + |Y|^2 \Rightarrow \mathrm{E}|X + Y|^2 \leq \mathrm{E}|X|^2 + 2\mathrm{E}|XY| + \mathrm{E}|Y|^2 < \infty.$$
- **Ověření, že** $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **je úplný, neboli Hilbertův prostor**, je složitější, ale provádí se opět zcela analogicky jako v případě funkcionálního prostoru $L_2(\mathcal{I})$. Podrobnosti lze nalézt například v monografii [1, §2.10].

□

Důsledek 1.9 (Schwarzova nerovnost)**.**
$$|\mathrm{E}XY|,\ |\mathrm{E}X\overline{Y}| \leq \|X\|_2\|Y\|_2 = \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}\sqrt{\mathrm{E}|Y|^2}, \quad X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

Důsledek 1.10. *$X \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P) \ \Rightarrow\ \mathrm{E}X$ existuje.*

Důkaz.
$$|\mathrm{E}X| = |E(1.X)| \leq \underbrace{\sqrt{\mathrm{E}|1|^2}}_{1}\sqrt{\mathrm{E}|X|^2} = \sqrt{|X|^2} < \infty.$$

□

Důsledek 1.11.
$$X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P) \ \Rightarrow\ X - \mathrm{E}X,\ Y - \mathrm{E}Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$
a
$$\langle X - \mathrm{E}X,\ Y - \mathrm{E}Y\rangle = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)\overline{(Y - \mathrm{E}Y)} = \mathrm{cov}(X, Y)$$
existuje a splňuje Schwarzovu nerovnost
$$|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^2}\sqrt{\mathrm{E}|Y - \mathrm{E}Y|^2} = \sigma_X\sigma_Y.$$

Důsledek 1.12.
$$\rho(X, Y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} & pro \quad \sigma_x\sigma_y \neq 0 \\ 0 & pro \quad \sigma_x\sigma_y = 0 \end{cases}$$
je tzv. **korelační koeficient náhodných veličin** X **a** Y*, pro nějž platí $|\rho(X, Y)| \leq 1$ a speciálně $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ v případě reálných náhodných veličin X a Y.*

Poznámka . Náhodné veličiny $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývají **nekorelované**, jestliže $\rho(X, Y) = 0$. Vzhledem k 1.11 je nekorelovanost ekvivalentní s $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, tj. s **ortogonalitou** centrovaných veličin $X - \mathrm{E}X$ a $Y - \mathrm{E}Y$ v $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = [\rho(X_i, Y_j)]_{i,j}$ je tzv. **vzájemná korelační matice náhodných vektorů $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$**.
$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = [\rho(X_i, X_j)]_{i,j}$ je tzv. **korelační matice náhodného vektoru $\mathbb{X}$**.

POZOR! Nekorelovanost indikuje neexistenci **stochastické závislosti pouze lineárního typu**.
Tedy platí
X, Y stochasticky nezávislé $\Rightarrow$ X, Y nekorelované, avšak nikoliv naopak:
X, Y nekorelované $\not\Rightarrow$ X, Y stochasticky nezávislé.

2.4. IDENTIFIKACE PERIODICKÝCH KOMPONENT. PERIODOGRAM.

2.4.1. Fourierova řada (FŘ).

Komplexní harmonické kmity:

$$E = \{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\frac{2\pi k t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{T}}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t),$$

kde pro $k \neq 0$ značí

$f_k = \frac{|k|}{T}$ ... frekvenci $|k|$-ho harmonického kmitu s periodou $\frac{T}{|k|}$,
$\omega_k = 2\pi f_k$ ... jeho úhlovou rychlost.

E je ortonormální systém v $L_2([0,T])$:

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int_0^T e_j(t)\overline{e_k(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi(j-k)t}{T}}\,dt = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = k \\ 0 & \text{pro} \quad j \neq k \end{cases}$$

E je dokonce úplný (báze) v $L_2([0,T])$(bez důkazu):

$$x(t) \in L_2([0,T]) \text{ libovolná a } T\text{-periodická} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t),$$

kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy $\|\,.\,\|_2$ v prostoru $L_2([0,T])$ a souřadnice x_k jsou jednoznačně určeny vztahem

$$\underline{\langle x, e_k\rangle} = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underline{x_k}.$$

Komplexní tvar rozvoje do Fourierovy řady:

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle \frac{1}{\sqrt{T}}}_{c_k(x)} e^{i\omega_k t} = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{i\omega_k t}}, \\ &\quad \text{kde} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.4.1) \\ \underline{c_k := c_k(x)} &= \frac{1}{\sqrt{T}}\langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-i\omega_k t}\,dt = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\omega_k t}\,dt}. \end{aligned}$$

c_k ... **k-tý komplexní Fourierův koeficient funkce x,**
c_0 ... **střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce x,**
$\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ... **komplexní fourierovské spektrum funkce x,**
$x_k(t)$:= $c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k}e^{-i\omega_k t}$, $k \geq 1$
... **k-tá harmonická komponenta funkce x o frekvenci f_k.**

Tvrzení 2.4.1.1 (Dirichletova věta). *Jestliže T-periodická funkce $x(t)$ má konečnou variaci na $[0,T]$, pak její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(x(t+0)+x(t-0))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce s konečnou variací je to vždy pouze konečný skok).*

Je-li $x(t)$ reálná funkce, lze (2.4.1) upravit na další dva ekvivalentní tvary:
Zřejmě $c_{-k} = \overline{c_k}$. Označíme-li

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k); \; a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

pak $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R}$, $b_0 = 0$ a dostáváme

Goniometrický tvar Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\underline{x(t)} &= c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{i\omega_k t}+\underbrace{c_{-k}e^{-i\omega_k t}}_{\overline{c_k e^{i\omega_k t}}})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}2\mathrm{Re}(c_k e^{i\omega_k t})=\\ &= \underline{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t)},\end{aligned}$$

kde (2.4.2)

$$\begin{aligned}\underline{a_k} &= 2\mathrm{Re}(c_k) = \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\cos\omega_k t\,dt},\\ \underline{b_k} &= -2\mathrm{Im}(c_k) = \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\sin\omega_k t\,dt}.\end{aligned}$$

Položíme-li $a_k = A_k\cos\varphi_k$ a $b_k = A_k\sin\varphi_k$, dostaneme

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\underline{x(t)} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\cos\varphi_k\cos\omega_k t+\sin\varphi_k\sin\omega_k t)=\underline{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{A_k\cos(\omega_k t-\varphi_k)}_{x_k(t)}}.$$

kde (2.4.3)

$$\begin{aligned}A_k &= 2|c_k| = \sqrt{a_k^2+b_k^2},\\ \varphi_k &= \arctan\frac{b_k}{a_k}.\end{aligned}$$

A_k	...	**amplituda k-té harmonické složky funkce x,**
φ_k	...	**fázový posuv k-té harmonické složky funkce x ($-\pi < \varphi_k \le \pi$),**
$c_0 = \frac{a_0}{2}$	...	**střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce x,**
$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**amplitudové spektrum funkce x,**
$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**fázové spektrum funkce x.**

2.4.2. **Parsevalova identita (PI).**

Nechť $x \in L_2([0,T])$ (tj. s konečnou energií na intervalu $[0,T]$) je T-periodická, potom

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \int_0^T |x(t)|^2\,dt = \langle x,x\rangle = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_j t}}{\sqrt{T}}}_{e_j(t)}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{T}}}_{e_k(t)}\rangle\\ &= T\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j\overline{c_k}\underbrace{\langle e_j,e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.\end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme:

Komplexní tvar Parsevalovy identity:

$$\sum_{k=\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2\,dt}_{\text{střední výkon na }[0,T]} < \infty \Rightarrow \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell_2. \qquad (2.4.4)$$

Speciálně:

$\lvert c_0\rvert^2$	...	**střední výkon stejnosměrné složky,**
$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert x_k(t)\rvert^2\,dt = \lvert c_{-k}\rvert^2+\lvert c_k\rvert^2$	...	**střední výkon k-té harmonické složky.**

Amplitudový tvar Parsevalovy identity (x reálná):

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2)}_{2|c_k|^2 = A_k^2/2} = \underline{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt}. \tag{2.4.5}$$

Speciálně:

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{4} & \ldots \textbf{ střední výkon stejnosměrné složky}, \\ \frac{A_k^2}{2} & \ldots \textbf{ střední výkon } k\textbf{-té harmonické složky}, \\ \{2|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} &= \{\frac{A_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty} \\ & \ldots \textbf{ výkonová spektrální hustota}, \\ \{2T|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} &= \{\frac{TA_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty} \\ & \ldots \textbf{ energetická spektrální hustota}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

2.4.3. **Diskretizace Fourierovy řady.**

Vypočteme hodnoty rozvoje $x(t)$ do její komplexní FŘ (2.4.1) pouze na rovnoměrné diskrétní síti N subintervalů: $T = N\Delta t,\ x_n = x(n\Delta t), n \in \mathbb{Z}$.

Obdržíme

$$\underline{x_n} \overset{(2.4.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{N\Delta t} n\Delta t} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \overbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN}\right)}^{\widehat{c}_k} e^{i\frac{2\pi(k+mN)n}{N}} = \underline{\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi k n}{N}}}. \tag{2.4.7}$$

kde $[\cdot]$ značí celou část hodnoty.

Platí

$\widehat{c}_k \approx c_k$, neboť $|c_k| \to 0$ pro $k \to \pm\infty$,
$\widehat{c}_k = c_k$, pokud $c_k = 0$ pro $|k| \geq \frac{N}{2}$ (FŘ je konečná: $f_{max} \leq \frac{N}{2}\frac{1}{T}$ udává konečný frekvenční obsah $x(t)$),
$\{\widehat{c}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je N-periodická posloupnost ($\widehat{c}_k = \widehat{c}_{k+mN},\ m \in \mathbb{Z}$).

Po úpravě:

$$\underline{x_n} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi k n}{N}} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi k n}{N}} = \underline{\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi k n}{N}}}, \tag{2.4.8}$$

kde první ze sum jsme upravili záměnou sčítacího indexu $r = k + N$ na tvar:

$$\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi k n}{N}} = \sum_{r=-\left[\frac{N-1}{2}\right]+N}^{N-1} \widehat{c}_{r-N} e^{i\frac{2\pi(r-N)n}{N}} = \sum_{r=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} \widehat{c}_r e^{i\frac{2\pi r n}{N}}$$

s využitím vztahů

$-\left[\frac{N-1}{2}\right] + N = \left[\frac{N}{2}\right] + 1$ a $\widehat{c}_r = \widehat{c}_{r-N}$ pro $r = \left[\frac{N}{2}\right] + 1, \ldots, N-1$ (N-periodicita).

Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$ vzorky $x(t)$ na její jedné periodě a $\widehat{\boldsymbol{c}} = (\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_{N-1})^T$ odhady Fourierových koeficientů, pak (2.4.8) určuje tzv. **operátor diskrétní Fourierovy transformace ($\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^+(\widehat{\boldsymbol{c}})$)** dle následující definice.

Definice 2.4.3.1 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT)).
$\mathrm{DFT}_N^{\pm}: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\boldsymbol{X} = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$ určený maticí $N \times N$:
$\mathbb{W}_N^{\pm} = \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} \pm i\sin\frac{2\pi}{N}$ je N-tá primitivní odmocnina z 1, tj. $W_N^N = 1$, ale $W_N^k \neq 1$ pro $k = 1,\dots,N-1$. Tedy

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i\frac{2\pi kn}{N}} x_n \text{ pro } k = 0,1,\dots,N-1.$$

Zřejmě $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = \mathbb{W}_N^{\mp}$.

Věta 2.4.3.2 (Věta o inverzi).
Platí $\mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp} = \mathbb{W}_N^{\pm}(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = NI_N$ *a tedy* $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ *a* $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{W}_N^{\pm}$ *je unitární matice.*

Důkaz. Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp}$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn} W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n, \; q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro} \quad r = s \\ \frac{q^N-1}{q-1} = 0 & \text{pro} \quad r \neq s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \neq 1$ pro $r \neq s$ v důsledku $0 < |r-s| \le N-1$. □

<u>Poznámka</u> *2.4.3.3.* V systému MATLAB jsou operátory $\mathrm{DFT}_N^{\pm}$ realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách `fft` a `ifft` takto:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \underline{\texttt{fft}(\boldsymbol{x})}$$

a

$$\underline{\boldsymbol{x}} = (\mathbb{W}_N^{-})^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{+}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{+}(\boldsymbol{x}) = \underline{\texttt{ifft}(\boldsymbol{X})}.$$

Důsledek 2.4.3.4. *Podle (2.4.8), věty 2.4.3.2 a poznámky 2.4.3.3 platí*

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{W}_N^{+}\widehat{\boldsymbol{c}} = \mathrm{DFT}_N^{+}(\widehat{\boldsymbol{c}}) = \underline{N\,\texttt{ifft}(\widehat{\boldsymbol{c}})},$$

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{c}}} = (\mathbb{W}_N^{+})^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \underline{\frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\texttt{fft}(\boldsymbol{x})}.$$

2.4.4. **Periodogram.**

Periodogram = odhad energetické spektrální hustoty (2.4.6) reálné T-periodické funkce $x(t)$, kde za c_k, $k = 1,\dots,m$, $m := \left[\frac{N-1}{2}\right]$, dosadíme odhad $\widehat{c}_k$ z (2.4.7) spočtený pomocí DFT_N^{-} dle 2.4.3.4 po ekvidistantní diskretizaci jedné periody $x(t)$:
$T = N\Delta t$, $x_n = x(n\Delta t)$, $n = 0,1,\dots,N$.

Periodogram je tedy posloupnost hodnot $\{I_k\}_{k=1}^m$, kde

$$\underline{I_k} = I(\omega_k) = 2T|\widehat{c}_k|^2 = 2N\Delta t\left|\frac{1}{N}X_k\right|^2 = \underline{\frac{2}{N}\Delta t|X_k|^2}, \; k = 1,\dots,m \tag{2.4.9}$$

a

$$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i\frac{2\pi kt}{N}} = \sum_{t=1}^{N} x_t e^{-i\frac{2\pi kt}{N}}.$$

Druhá rovnost je zde důsledkem N-periodicity $x_0 = x_N$.

Z hlediska kvalitativních závěrů nezáleží na multiplikativní konstantě, proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\Delta t = 1$ a dostáváme tak **výsledný vztah pro hodnoty I_k periodogramu** ve tvaru

$$I_k = I(\omega_k) = \frac{2}{N}|X_k|^2 = \frac{2}{N}\left\{\left(\sum_{t=1}^{N} x_t \cos\frac{2\pi kt}{N}\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{N} x_t \sin\frac{2\pi kt}{N}\right)^2\right\},\ k = 1,\ldots,m. \quad (2.4.10)$$

Velká hodnota I_k indikuje velkou energii k-té harmonické komponenty, tj. silné zastoupení složky $x_k(t) = c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k}e^{-i\omega_k t} = A_k\cos(\omega_k t - \varphi_k)$ v rozvoji $x(t)$ do Fourierovy řady.

Věta 2.4.4.1.

$$I_k = 2\sum_{|h|<N} \widehat{\gamma}(h) e^{-i\frac{2\pi hk}{N}} \ \textit{pro}\ k = 1,2,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right],$$

kde $\widehat{\gamma}(h)$ je odhad autokovarianční funkce vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_N)^T$ spočtený dle 1.46.

Důkaz.

$$I_k = \frac{2}{N}|X_k|^2 = \frac{2}{N}X_k\overline{X}_k = \frac{2}{N}\left(\sum_{s=1}^{N} x_s e^{-i\frac{2\pi sk}{N}}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}\overline{x}_t e^{i\frac{2\pi tk}{N}}\right).$$

Protože dle důkazu věty 2.4.3.2 platí

$$\sum_{s=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi sk}{N}} = \sum_{t=1}^{N} e^{i\frac{2\pi tk}{N}} = 0 \text{ pro } k \neq 0(\text{mod}N),$$

lze psát

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{2}{N}\left(\sum_{s=1}^{N}(x_s - \widehat{x})e^{-i\frac{2\pi sk}{N}}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}(\overline{x_t - \widehat{x}})e^{i\frac{2\pi tk}{N}}\right) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}(x_s - \widehat{x})(\overline{x_t - \widehat{x}})e^{-i\frac{2\pi(s-t)k}{N}} \overset{h=s-t}{=} \\ &= 2\sum_{|h|<N}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-h}(x_{t+h} - \widehat{x})(\overline{x_t - \widehat{x}})}_{\widehat{\gamma}(h)}\, e^{-i\frac{2\pi hk}{N}}. \end{aligned}$$

□

2.4.5. **Fisherův test periodicity.**

Položme $m = \left[\frac{N-1}{2}\right]$ a definujme statistiku

$$W = \max_{k=1,\ldots,m} Y_k, \qquad \text{kde} \qquad Y_k = \frac{I_k}{\sum_{j=1}^{m} I_j}.$$

Protože $I_j \geq 0$ pro $j = 1,2,\ldots,m$, je $0 \leq W \leq 1$.

Nechť $X_t = P_t + E_t,\ E_t \sim WN(0,\sigma^2)$ gaussovský.
Platí-li nulová hypotéza $H_0:\ X_t = E_t$, pak testová statistika W má na intervalu $[0,1]$ rozdělení, pro nějž platí

$$P(W > x) = \sum_{\substack{j=1 \\ 1-jx>0}}^{m} (-1)^{j-1}\binom{m}{j}(1-jx)^{m-1},\ 0 < x < 1,$$

přičemž $P(W > x) \approx m(1-x)^{m-1}$ je dobrá aproximace pro $m \leq 50$.

Nechť $g_F(1-\alpha)$ značí $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení statistiky W (tabelováno), tj. $P(W \leq g_F(1-\alpha)) = 1-\alpha$. Pak H_0 zamítáme s rizikem α, pokud $W > g_F(1-\alpha)$. Je-li v takovém případě $I_{k_0} = \max_{k=1,\ldots,m} I_k$, pak k_0-tou harmonickou komponentu považujeme za významnou. Další významnou harmonickou komponentu zjistíme z periodogramu délky $m-1$, kde vynecháme I_{k_0}, a tak pokračujeme dále, dokud není hypotéza H_0 přijata.

2.4.6. **Siegelův test periodicity.**

Tento test je vhodnější než Fisherův v případě většího množství harmonických komponent. Siegelova statistika je tvaru

$$T_\lambda = \sum_{k=1}^{m} (Y_k - \lambda\, g_F(1-\alpha))^+,\ \ 0 < \lambda < 1 \text{ (doporučená hodnota je } \lambda = 0,6).$$

H_0 zamítáme s rizikem α, jestliže $T_\lambda > t_\lambda(1-\alpha)$, kde $t_\lambda(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení T_λ (tabelováno).

2.5. SEPARACE JEDNOTLIVÝCH SLOŽEK.

Označení.

$\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n)^T,\ t_i \neq t_j$ pro $i \neq j$	...	vektor "času",
$\mathbb{X} := \mathbb{X}_{\boldsymbol{t}} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$	...	náhodný vektor populace vybrané z časové řady,
$\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t}} = (x_1, \dots, x_n)^T,\ x_i = X_{t_i}(\omega)$	...	pozorování vektoru populace $\mathbb{X}$.

A. Parametrické metody (P).

Tyto metody používáme v případě, že je znám analytický tvar $D_t = D(t; \beta_1, \dots, \beta_p)$ v aditivním modelu $X_t = D_t + E_t$ (multiplikativní model převedeme na aditivní logaritmováním) s neznámými parametry $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$, které odhadneme minimalizací výrazu $N(\beta_1, \dots, \beta_p) = \|D(\boldsymbol{t}; \beta_1, \dots, \beta_p) - \boldsymbol{x}\|^2$ ve vhodné normě $\|\cdot\|$. Zpravidla se používá euklidovská norma a klasická metoda nejmenších čtverců:

$$N(\beta_1, \dots, \beta_p) = \sum_{i=1}^{n} |D(t_i, \beta_1, \dots, \beta_p) - x_i|^2.$$

Lokální extrém hledáme řešením systému rovnic

$$\frac{\partial N(\beta_1, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_j} = 0 \text{ pro } j = 1, \dots, p$$

s ověřením podmínky pro lokální minimum (jakobián je pozitivně definitní matice):

$$J = \left[\frac{\partial^2 N(\beta_1, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_i\, \partial \beta_j} \right]_{i,j} > 0.$$

Pokud D závisí lineárně na $\beta_1, \dots, \beta_p$, pak tento systém je systémem p lineárních rovnic pro p neznámých $\beta_1, \dots, \beta_p$ a dostáváme klasický **lineární regresní model**.

V případě nelineární regrese použijeme pro minimalizaci $N(\beta_1, \dots, \beta_p)$ **vhodnou optimalizační metodu**, například *Optimization Toolbox* v prostředí systému MATLAB.

Lineární regresní model: $D(t; \beta_1, \dots, \beta_p) = \varphi_1(t)\beta_1 + \dots + \varphi_p(t)\beta_p$, kde φ_i jsou dané.

$$\mathbb{X} = D\boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}, \quad \mathbb{E} = (E_{t_1}, \dots, E_{t_n})^T \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2),$$

kde

$$D = [\varphi_1(\boldsymbol{t}), \dots, \varphi_p(\boldsymbol{t})], \quad \varphi_j(\boldsymbol{t}) = (\varphi_j(t_1), \dots, \varphi_j(t_n))^T$$

je matice s plnou sloupcovou hodností p.

Pro vektor pozorování přejde výše uvedený model v

$$\boldsymbol{x} = D\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)^T, \text{ kde } e_i = E_{t_i}(\omega).$$

B. Neparametrické metody (NP).

Za vhodných předpokladů konstruujeme lineární nebo nelineární operátor S (smoother = vyhlazovač) takový, že

$$S(\{X_t\}) =: \{\widehat{D}_t\} \approx \{D_t\}$$

je dobrý odhad D_t v tom smyslu, že $\{\widehat{D}_t\} \to \{D_t\}$ ve vhodné konvergenci při $n \to \infty$, tj. odhad je **asymptoticky přesný**.

Značení metod:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{AM-P} & \dots & \text{parametrická} \\ \text{AM-NP} & \dots & \text{neparametrická} \end{array}\right\} \text{metoda v } \textbf{aditivním modelu}.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{MM-P} & \dots & \text{parametrická} \\ \text{MM-NP} & \dots & \text{neparametrická} \end{array}\right\} \text{metoda v } \textbf{multiplikativním modelu}$$

2.5.2. Metody pro odhad sezónní složky.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ... ekvidistantní pozorování náhodného procesu $X = \{X_t | t \in \mathbb{Z}\}$
$\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ ... pozorované chyby
$t \in \{1, 2, \dots, n\}$

Předpokládáme model:

- aditivní: $X_t = Tr_t + Sz_t + C_t + E_t$ (AM)
  nebo
- multiplikativní: $X_t = Tr_t\, Sz_t\, C_t\, E_t$ (MM).

Nechť d je perioda Sz_t a $n = md$, pak zavedeme matici $m \times d$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k & \dots & x_d \\ x_{d+1} & \dots & x_{d+k} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} = [x_{j,k}],$$

kde $x_{j,k} = x_{(j-1)d+k}$ (např. j =rok, k=měsíc).

Označíme-li vec operátor, který skládá sloupce matice pod sebe do jednoho sloupcového vektoru, pak můžeme psát $\boldsymbol{x} = \mathrm{vec}(X^T)$.

V MATLABu: $X = \texttt{reshape}(\boldsymbol{x}, d, m).'$

Řádek $X(j,:)$ představuje pozorování hodnot j-té periody Sz_t spolu s Tr_t, C_t a E_t.
Sloupec $X(:,k)$ představuje pozorování k-té hodnoty v každé periodě Sz_t spolu s Tr_t, C_t a E_t.

Nechť $E = [e_{j,k}]$ je analogicky zavedená matice chyb.

Hledaná složka Sz_t je určena hodnotami $\boldsymbol{s} := (s_1, \dots, s_d) := (Sz_1, \dots, Sz_d)$ jedné své periody, přičemž platí pro $\bar{s} := \frac{s_1 + \dots + s_d}{d}$:

$$\bar{s} = \begin{cases} 0 & \text{v AM} \\ 1 & \text{v MM} \end{cases} \tag{2.5.4}$$

Budeme hledat odhady $\widehat{s}_k$ splňující (2.5.4).

2.5.2.1. Metoda malého trendu pro odhad Sz_t (AM-NP, MM-NP).

Předpoklad:
$Tr_t + C_t$, resp. $Tr_t C_t$ je přibližně konstantní v každé periodě Sz_t:

$$\left.\begin{array}{llcll} \text{v AM:} & x_{j,k} - s_k - e_{j,k} & = & Tr_t + C_t & \approx m_j \\ \text{v MM:} & x_{j,k}/(s_k\, e_{j,k}) & = & Tr_t\, C_t & \approx m_j \end{array}\right\} \text{ v } j\text{-té periodě, } t = (j-1)d + k.$$

Algoritmus:

(1) $\widehat{m}_j = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} x_{j,k}$ ... odhad m_j pro $j = 1, \dots, m$.
(2) pro $k = 1, \dots, d$ spočteme:

$$\text{v AM:} \quad \widehat{s}_k = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{(x_{j,k} - \widehat{m}_j)}_{\approx\, s_k + e_{j,k}}$$

$$\text{v MM:} \quad \widehat{s}_k = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_{j,k}/\widehat{m}_j}_{\approx\, s_k\, e_{j,k}}$$

Odhady zřejmě splňují (2.5.4):

v AM:

$$\overline{\widetilde{s}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{j,k}-\widehat{m}_j)\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\underbrace{\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}x_{j,k}}_{\widehat{m}_j}-\underbrace{\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\widehat{m}_j}_{\widehat{m}_j}\right) = 0$$

v MM:

$$\overline{\widetilde{s}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{x_{j,k}}{\widehat{m}_j}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\frac{1}{\widehat{m}_j}\underbrace{\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}x_{j,k}}_{\widehat{m}_j}}_{1} = \frac{1}{m}m = 1.$$

Dále pokračujeme kroky v 2.5.2.3.

2.5.2.2. **Metoda klouzavého průměru pro odhad** Sz_t (AM-NP, MM-NP).

Zavedeme vektor vah $\boldsymbol{w} = (w_1,\ldots,w_{2q+1})^T$ pro výpočet obyčejného průměru takto:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \tfrac{1}{d}(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{(2q+1)\times})^T && \text{pro periodu liché délky} \quad d = 2q+1,\\ \boldsymbol{w} &= \tfrac{1}{d}(\underbrace{1/2,1,\ldots,1,1/2}_{(2q+1)\times})^T && \text{pro periodu sudé délky} \quad d = 2q.\end{aligned}$$

Spočtěme klouzavý průměr

$$\widehat{m}_t = \begin{cases}\sum_{\tau=-q}^{q} w_\tau x_{t+\tau} & \text{pro} \quad q+1 \le t \le n-q,\\ x_t & \text{pro} \quad 1 \le t \le q \text{ nebo } n-q+1 \le t \le n.\end{cases}$$

Jelikož délka klouzavého průměru je rovna délce periody v sezónní složce, potlačíme tímto průměrováním nejen chybovou komponentu e_t, ale eliminujeme současně i vlastní sezónní složku Sz_t, neboť tato má v AM nulovou, resp. v MM jednotkovou, průměrnou hodnotu na každé své periodě.

V dalším tedy můžeme vycházet z platnosti následujícího předpokladu:

Předpoklad:

$$\left.\begin{array}{lllll}\text{v AM:} & x_t - Sz_t - e_t & = & Tr_t + C_t & \approx \widehat{m}_t\\ \text{v MM:} & x_t/(Sz_t\, e_t) & = & Tr_t\, C_t & \approx \widehat{m}_t\end{array}\right\}\text{ pro } q+1 \le t \le n-q.$$

Algoritmus:

(1) Spočteme vektor klouzavých průměrů a přerovnáme jej do matice $m \times d$ po periodách stejně jako $\boldsymbol{x}$:
$\widehat{\boldsymbol{m}} = (\widehat{m}_1,\ldots,\widehat{m}_n)^T =: \mathrm{vec}(\widehat{M}^T)$, kde $\widehat{M} =: [\widehat{m}_{j,k}]$.
Pak $X - \widehat{M}$ v AM, resp. $X./\widehat{M} = [x_{j,k}/\widehat{m}_{j,k}]$ v MM, má následující strukturu s q nulami, resp. jedničkami na začátku první periody a na konci poslední periody.

Pro d liché:

$$X - \widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet\\ & \vdots & & & & \vdots & \\ \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}, \text{ resp. } X./\widehat{M} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet\\ & \vdots & & & & \vdots & \\ \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}.$$

Pro d sudé:

$$X - \widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \bullet & \ldots & \bullet\\ & \vdots & & & \vdots & \\ \bullet & \ldots & \bullet & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}, \text{ resp. } X./\widehat{M} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 & \bullet & \ldots & \bullet\\ & \vdots & & & \vdots & \\ \bullet & \ldots & \bullet & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}.$$

(2) Pro $k = 1,\ldots,d$ spočteme:

$$\begin{aligned}\text{v AM:} \quad \widetilde{s}_k &= \tfrac{1}{m-\delta_k}\textstyle\sum_{j=1}^{m}\underbrace{(x_{j,k}-\widehat{m}_{j,k})}_{\approx\, s_k + e_{j,k}},\\ \text{v MM:} \quad \widetilde{s}_k &= \tfrac{1}{m-\delta_k}[(\textstyle\sum_{j=1}^{m}\underbrace{x_{j,k}/\widehat{m}_{j,k}}_{\approx\, s_k\, e_{j,k}}) - \delta_k].\end{aligned}$$

kde $\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = \frac{d+1}{2} \text{ (může nastat jen pro } d \text{ liché, kdy } k = q+1) \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$.

(3) $\overline{\widetilde{s}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \widetilde{s}_k$.

(4) Provedeme vycentrování, aby platil vztah (2.5.4):
$\widehat{s}_k = \widetilde{s}_k - \overline{\widetilde{s}}$ v AM, resp. $\widehat{s}_k = \widetilde{s}_k / \overline{\widetilde{s}}$ v MM pro $k = 1, \ldots, d$.

Dále pokračujeme opět kroky v 2.5.2.3.

2.5.2.3. **Separace** Tr_t **a** Sz_t (AM, MM).

(5) <u>Zperiodičnění</u>: $\widehat{Sz}_{k+jd} = \widehat{s}_k$ pro $k = 1, \ldots, d$ a $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

(6) <u>Separace sezónní složky Sz_t</u>:
$y_t := x_t - \widehat{Sz}_t \approx Tr_t + C_t + e_t$ v AM, resp. $y_t := x_t / \widehat{Sz}_t \approx Tr_t\, C_t\, e_t$ v MM pro $t = 1, \ldots, n$.

(7) V y_t odhadujeme $Tr_t + C_t$ (resp. $Tr_t\, C_t$ v MM po zlogaritmování) vhodnou metodou (např. z odst. 2.5.1). Můžeme také odhadnout jen trend například položením $q = 0$ v metodě 2.5.1.1 nebo užitím metod dále popsaných v odst. 2.5.3 a pak separovat cyklickou složku C_t:

(8) <u>Separace cyklické složky C_t</u>:
$C_t + e_t \approx y_t - \widehat{Tr}_t$ v AM, resp. $C_t\, e_t \approx y_t / \widehat{Tr}_t$ v MM pro $t = 1, \ldots, n$.

(9) <u>Analyzujeme periodické komponenty v $C_t + e_t$ (resp. zlogaritmované $C_t\, e_t$ v MM)</u> pomocí periodogramu a testů periodicity z odst. 2.4. Ty budou nyní citlivěji detekovat harmonické komponenty cyklické složky, která již není rušena přítomností dalších deterministických složek.

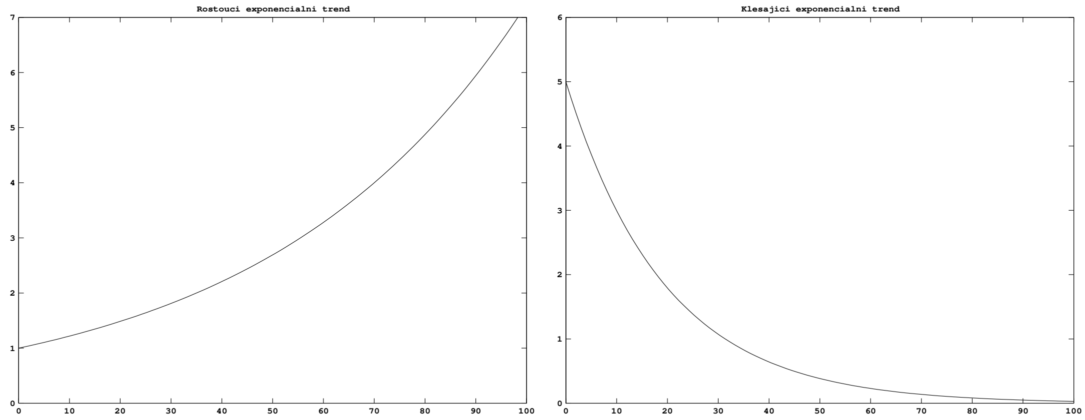
2.5.2.4. **Eliminace** Sz_t **diferencováním na vzdálenost** d (AM).

<u>Předpoklad:</u>
$x_t = Sz_t + m_t + e_t$, kde $m_t = Tr_t + C_t$ a perioda C_t je podstatně delší než perioda Sz_t.

<u>Algoritmus:</u>

(1) $y_t := x_t - x_{t-d} = \underbrace{Sz_t - Sz_{t-d}}_{\approx 0} + \underbrace{m_t - m_{t-d}}_{\widetilde{m}_t} + \underbrace{e_t - e_{t-d}}_{\widetilde{e}_t},\ t = d+1, \ldots, n.$

(2) Odhadujeme $\widetilde{m}_t$ jako v 2.5.2.3(7)–(9), kde ovšem $\widetilde{m}_t = m_t - m_{t-d}$ interpretujeme jako změny oproti minulé sezóně.



a) Rostoucí: $\alpha = 1,\ \beta = 1,02$ b) Klesající: $\alpha = 5,\ \beta = 0,95$

OBRÁZEK 2.5.1. Exponenciální trend

2.5.3. **Metody pro odhad trendu.**

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ... ekvidistantní pozorování náhodného procesu $X = \{X_t | t \in \mathbb{Z}\}$
$\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ ... pozorované chyby
$t \in \{1, 2, \dots, n\}$

Následují metody pro odhad růstového trendu v ekonomických časových řadách [2, str. 34–41].

2.5.3.7. **Exponenciální trend** (MM-P).

Model:

$$Tr_t = \alpha\beta^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ t = 1, 2, \dots, n.$$

Tento model je vhodný pro popis trendu **s konstantním koeficientem růstu**

$$\frac{Tr_{t+2} - Tr_{t+1}}{Tr_{t+1} - Tr_t} = \frac{\alpha\beta^{t+2} - \alpha\beta^{t+1}}{\alpha\beta^{t+1} - \alpha\beta^t} = \beta,$$

kde při $\alpha > 0$ dostáváme pro $\beta > 1$ růst a pro $0 < \beta < 1$ pokles (obr. 2.5.1). V případě $\alpha < 0$ je tomu naopak.

Algoritmus:
Zlogaritmováním provedeme transformaci na aditivní model s lineárním trendem:

$$\ln Tr_t = \ln\alpha + t\ln\beta, \quad \boldsymbol{\beta} = (\ln\beta, \ln\alpha)^T.$$

Odhad $\boldsymbol{\beta}$ spočteme metodou lineární regrese dle odst. 2.5.1.1. Odlogaritmováním hodnot získaných podle vztahů (2.5.1)-(2.5.3) pak dostaneme výsledky pro původní model.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} \approx \beta, \text{ resp. } \Delta\ln x_t = \ln x_{t+1} - \ln x_t \approx \ln\beta.$$

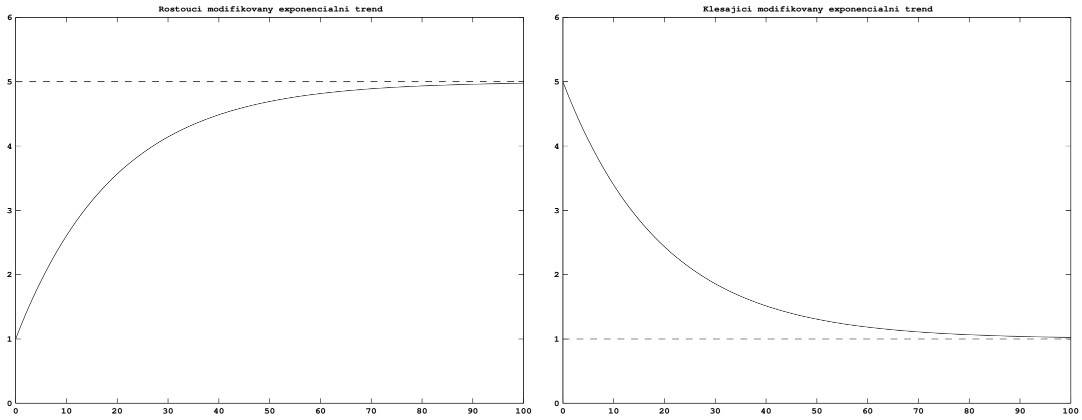
Kontrolujeme tedy, zda tato veličina osciluje náhodně kolem konstantní úrovně.

2.5.3.8. **Modifikovaný exponenciální trend** (AM-P).

Model:

$$Tr_t = \gamma + \alpha\beta^t, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ t = 1, 2, \dots, n.$$

Jedná se o tříparametrické zobecnění předchozího modelu. Používá se především v případě, kdy trend má konstantní koeficient růstu, resp. poklesu a přitom je shora, resp. zdola asymptoticky omezen. Tehdy volíme $0 < \beta < 1$, přičemž γ pak odpovídá asymptotické úrovni, ke které trend roste ($\alpha < 0$), resp. klesá ($\alpha > 0$). Viz obr. 2.5.2.



a) Rostoucí: $\alpha = -4,\ \beta = 0,95,\ \gamma = 5$ b) Klesající: $\alpha = 4,\ \beta = 0,95,\ \gamma = 1$

Obrázek 2.5.2. Modifikovaný exponenciální trend

Algoritmus:

- Soubor pozorování $\boldsymbol{x}$ rozdělíme na stejně velké třetiny délky m (pokud $n \neq 3m$, vynecháme ze začátku řady $n \bmod 3$ pozorovaných hodnot).
- Pozorování v jednotlivých třetinách sečteme. Užitím vzorce pro součet m členů geometrické řady $S := \sum_{t=1}^m \beta^t = \beta(\beta^m - 1)/(\beta - 1)$ pak obdržíme tři rovnice o třech neznámých α, β, γ:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &:= \textstyle\sum_{t=1}^m x_t &\approx&\ \textstyle\sum_{t=1}^m Tr_t &=&\ m\gamma + \alpha S \\
\Sigma_2 &:= \textstyle\sum_{t=m+1}^{2m} x_t &\approx&\ \textstyle\sum_{t=m+1}^{2m} Tr_t &=&\ m\gamma + \alpha\beta^m S \\
\Sigma_3 &:= \textstyle\sum_{t=2m+1}^{3m} x_t &\approx&\ \textstyle\sum_{t=2m+1}^{3m} Tr_t &=&\ m\gamma + \alpha\beta^{2m} S.
\end{aligned}$$

- Systém rovnic vyřešíme postupnou eliminací jednotlivých neznámých:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_3 - \Sigma_2 &= \alpha\beta^m S(\beta^m - 1) \\
\Sigma_2 - \Sigma_1 &= \alpha S(\beta^m - 1)
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \beta^m = \frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}.$$

  Pak

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 = \alpha S(\beta^m - 1) \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{S(\beta^m - 1)} \quad \text{a} \quad \Sigma_1 = m\gamma + \alpha S \ \Rightarrow\ \gamma = \frac{\Sigma_1 - \alpha S}{m}.$$

- Obdrželi jsme tak přibližné vztahy pro výpočet neznámých parametrů α, β, γ:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \left(\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\
\widehat{S} &= \widehat{\beta}\frac{\widehat{\beta}^m - 1}{\widehat{\beta} - 1} \\
\widehat{\alpha} &= \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{\widehat{S}(\widehat{\beta}^m - 1)} \\
\widehat{\gamma} &= \frac{\Sigma_1 - \widehat{\alpha}\widehat{S}}{m}.
\end{aligned}$$

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$$\frac{\Delta Tr_{t+1}}{\Delta Tr_t} = \frac{\gamma + \alpha\beta^{t+2} - (\gamma + \alpha\beta^{t+1})}{\gamma + \alpha\beta^{t+1} - (\gamma + \alpha\beta^t)} = \frac{\alpha\beta^{t+1}(\beta - 1)}{\alpha\beta^t(\beta - 1)} = \beta.$$

Kontrolujeme tedy, zda veličina $\Delta x_{t+1}/\Delta x_t = (x_{t+2} - x_{t+1})/(x_{t+1} - x_t)$ osciluje náhodně kolem konstantní úrovně.

2.5.3.9. **Logistický trend** (AM-P).

Model:

$$Tr_t = \frac{\gamma}{1+\alpha\beta^t}, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ t = 1,2,\ldots,n.$$

Tento model dále rozšiřuje možnosti modifikovaného exponenciálního trendu, neboť má inflexní bod v $t = -\ln\alpha/\ln\beta$, který zachycuje změnu akcelerace růstu (obr. 2.5.3).

Toto tvrzení nyní ověříme:

$$Tr_t' = -\frac{\gamma\alpha(\ln\beta)\beta^t}{(1+\alpha\beta^t)^2} = -(\ln\beta)Tr_t\frac{\alpha\beta^t}{1+\alpha\beta^t} = -\frac{\ln\beta}{\gamma}Tr_t(\gamma - Tr_t),$$

kde jsme použili $\gamma - Tr_t = \gamma - \frac{\gamma}{1+\alpha\beta^t} = \frac{\alpha\beta^t\gamma}{1+\alpha\beta^t}$. Oba členy Tr_t a $\gamma - Tr_t$ působí proti sobě a příslušný lokální extrém odpovídající inflexnímu bodu nalezneme řešením rovnice $Tr_t'' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= Tr_t'' = -\tfrac{\ln\beta}{\gamma}[Tr_t'(\gamma - Tr_t) - Tr_t Tr_t'] = -\tfrac{\ln\beta}{\gamma}Tr_t'(\gamma - 2Tr_t) \\ \Leftrightarrow &\ \ \gamma = 2Tr_t = \tfrac{2\gamma}{1+\alpha\beta^t} \ \Leftrightarrow\ 1+\alpha\beta^t = 2 \ \Leftrightarrow\ \alpha\beta^t = 1 \ \Leftrightarrow\ \ln\alpha + t\ln\beta = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -\tfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}. \end{aligned}$$

Algoritmus:

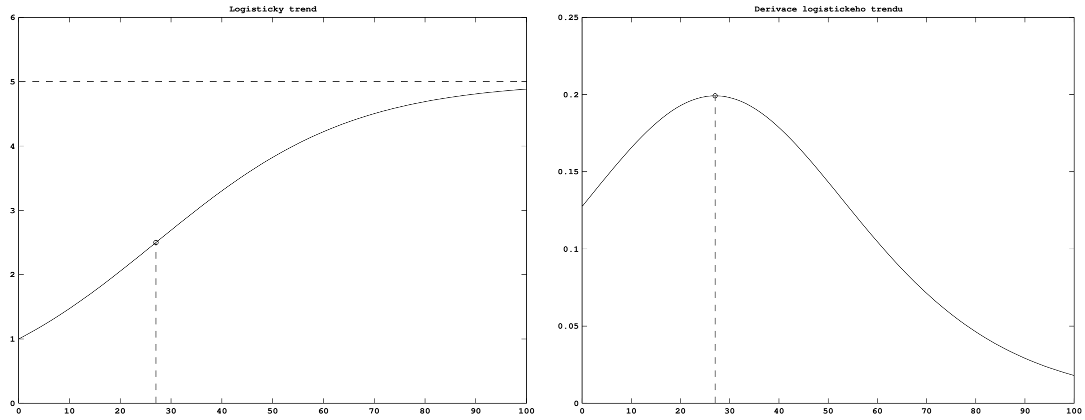
- Transformace časové řady: $z_t = \frac{\Delta x_t}{x_t}$, kde $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$.
  Označíme-li $y_t := Tr_t$, pak $\Delta y_t \approx Tr_t' = -\frac{\ln\beta}{\gamma}y_t(\gamma - y_t)$ a tedy $\frac{\Delta y_t}{y_t} \approx -\ln\beta + \frac{\ln\beta}{\gamma}y_t$.
  Protože $x_t = y_t + e_t \ \Rightarrow\ \frac{1}{x_t} = \frac{1}{y_t} + e_t^{(1)}$ a $\Delta x_t = \Delta y_t + \Delta e_t$, dostáváme
  $$\begin{aligned} z_t &= \tfrac{\Delta x_t}{x_t} = \tfrac{\Delta y_t}{y_t} + \underbrace{\Delta y_t e_t^{(1)} + \Delta e_t\frac{1}{y_t} + \Delta e_t e_t^{(1)}}_{e_t^{(2)}} \\ &= -\ln\beta + \tfrac{\ln\beta}{\gamma}(x_t - e_t) + e_t^{(2)} \\ &= -\ln\beta + \tfrac{\ln\beta}{\gamma}x_t + e_t^{(3)}, \text{ kde } e_t^{(3)} = e_t^{(2)} - \tfrac{\ln\beta}{\gamma}e_t. \end{aligned}$$
- Odhad parametrů β a γ:
  Parametry odhadneme v lineárním modelu
  $$z_t = \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + e_t^{(3)}, \text{ kde } \beta_1 := \ln\beta,\ \beta_2 = \frac{\ln\beta}{\gamma} = \frac{\beta_1}{\gamma}.$$
  Pak $\widehat{\beta} = e^{\widehat{\beta}_1}$ a $\widehat{\gamma} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2}$.
- Odhad parametru α:
  Odhad $\widehat{\alpha}$ nalezneme z $x_t \approx \gamma/(1+\alpha\beta^t)$, odkud
  $$\alpha\beta^t \approx \frac{\gamma}{x_t} - 1 \ \Leftrightarrow\ \ln\alpha + t\ln\beta \approx \ln\left(\frac{\gamma}{x_t} - 1\right).$$
  Chybu této aproximace potlačíme zprůměrováním pro $t = 1,2,\ldots,n$:
  $$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\ln\alpha + t\ln\beta) = \ln\alpha + \frac{1}{n}(\ln\beta)\frac{n(n+1)}{2} \doteq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln(\frac{\gamma}{x_t} - 1).$$
  Odtud po dosazení odhadů $\widehat{\beta}_1 = \ln\widehat{\beta}$ a $\widehat{\gamma} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2}$ dostáváme výsledný odhad pro $\ln\widehat{\alpha}$:
  $$\ln\widehat{\alpha} = -\frac{(n+1)\widehat{\beta}_1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln\left(\frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2 x_t} - 1\right) \ \ldots \text{ \textbf{tzv. Rhodesův vztah}}.$$
  Tedy pak $\widehat{\alpha} = e^{\ln\widehat{\alpha}}$.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

Křivka 1. diferencí $x_{t+1} - x_t \approx Tr_t'$ osciluje kolem křivky podobné normální hustotě (obr. 2.5.3b)). Navíc $1/Tr_t$ se zřejmě chová jako modifikovaný exponenciální trend, takže kontrolujeme, zda

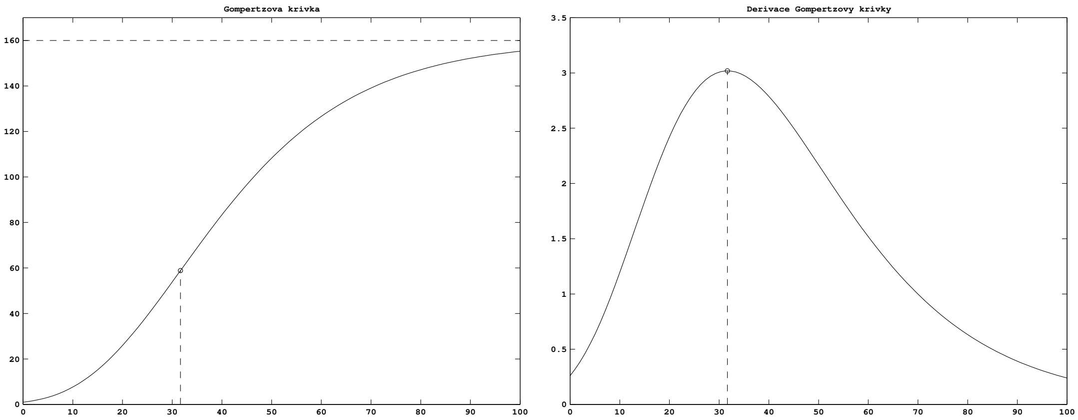
$$\left(\frac{1}{x_{t+2}} - \frac{1}{x_{t+1}}\right) / \left(\frac{1}{x_{t+1}} - \frac{1}{x_t}\right)$$

osciluje kolem konstantní hodnoty.



a) Logistická křivka b) Derivace logistické křivky

Obrázek 2.5.3. Logistický trend: $\alpha = 4,\ \beta = 0,95,\ \gamma = 5$



a) Gompertzova křivka b) Derivace Gompertzovy křivky

Obrázek 2.5.4. Logistický trend: $\alpha = -\ln 160,\ \beta = 0,95,\ \gamma = \ln 160$

2.5.3.10. **Gompertzova křivka** (MM-P).

Model:

$$Tr_t = e^{\gamma + \alpha\beta^t}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ t = 1, 2, \dots, n.$$

Má podobné vlastnosti jako logistický trend, tj. opět je možno modelovat inflexi — tentokrát pro $\alpha < -1$ v bodě $t = -\ln(-\alpha)/\ln\beta$. V tomto případě však 1. derivace Tr_t' není symetrická kolem bodu inflexe, ale je zešikmena doleva (obr. 2.5.4).

Algoritmus:

Zlogaritmováním převedeme úlohu na modifikovaný exponenciální trend.

Kontrolní kritérium adekvátnosti tohoto modelu:

$\ln Tr_t$ se chová jako modifikovaný exponenciální trend, takže stačí kontrolovat, zda

$$(\ln x_{t+2} - \ln x_{t+1})/(\ln x_{t+1} - \ln x_t)$$

osciluje kolem konstantní hodnoty.

Věta 4.18 (Durbin-Levinsonův algoritmus pro rekurentní výpočet $\mathbf{\Phi}_n$).
Nechť $X = \{X_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární náhodný proces s nulovou střední hodnotou $\mu_X = 0$ a autokovarianční funkcí $\gamma_X(h) \to 0$ pro $h \to \infty$. Jestliže $\widehat{X}_{n+1} = \Phi_{n,1}X_n + \cdots + \Phi_{n,n}X_1$ je nejlepší lineární predikce jako ve 4.10, pak pro koeficienty $\Phi_{n,j}$ a střední kvadratickou chybu $v_n = \mathrm{E}|X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}|^2$ platí následující rekurentní vztahy.

Počáteční krok pro $n = 0$:

$$v_0 = \gamma_X(0). \tag{4.4a}$$

Rekurentní krok pro $n > 0$:

$$\Phi_{n,n} = \big[\gamma_X(n) - \overbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{n-1,j}\,\gamma_X(n-j)}^{=0 \ pro \ n=1}\big]\, v_{n-1}^{-1}, \tag{4.4b}$$

$$v_n = v_{n-1}(1 - |\Phi_{n,n}|^2), \tag{4.4c}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{n,1} \\ \Phi_{n,2} \\ \vdots \\ \Phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{n-1,1} \\ \Phi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \Phi_{n,n} \begin{bmatrix} \overline{\Phi}_{n-1,n-1} \\ \overline{\Phi}_{n-1,n-2} \\ \vdots \\ \overline{\Phi}_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad pro \ n > 1. \tag{4.4d}$$

Důkaz. Viz [1, str. 162]. □

Definice 4.19 (ARMA proces).
Stochastický proces $X = \{X_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$ se nazývá **ARMA procesem řádu** p, q $(0 \le p, q < \infty)$, píšeme $X \sim ARMA(p,q)$, jestliže

$$X_t = \underbrace{\Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_p X_{t-p}}_{\text{Autoregresní část (AR)}} + \underbrace{Z_t + \Theta_1 Z_{t-1} + \Theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \Theta_q Z_{t-q}}_{\text{Část klouzavých součtů (MA=Moving Average)}}, \tag{4.5a}$$

kde $Z := \{Z_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma^2)$ a $\Phi_p \neq 0,\ \Theta_q \neq 0,\ \sigma \neq 0$. Přepíšeme-li (4.5a) do ekvivalentního tvaru

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} - \Phi_2 X_{t-2} - \cdots - \Phi_p X_{t-p} = Z_t + \Theta_1 Z_{t-1} + \Theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \Theta_q Z_{t-q}, \tag{4.5b}$$

lze použít též zkrácený zápis

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t \quad \text{nebo} \quad \Phi(z)X(z) = \Theta(z)Z(z), \tag{4.5c}$$

kde při $\Phi_0 = \Theta_0 = 1$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z \ - \cdots - \Phi_p z^p, \quad \Theta(z) = 1 + \Theta_1 z \ + \cdots + \Theta_q z^q, \ z \in \mathbb{C}.$$

Poznámka 4.20. V předchozí definici bez újmy na obecnosti předpokládáme $\Theta_0 = 1$, neboť v opačném případě stačí nahradit bílý šum $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ šumem $\{\Theta_0 Z_t\} \sim WN(0, (\Theta_0\sigma)^2)$.

Poznámka 4.21 (Speciální případy).

a) Autoregresní proces (AR proces):
$X \sim AR(p) = ARMA(p, 0): \quad \Phi(B)X_t = Z_t$, neboť $\Theta(z) \equiv 1$.
Tedy

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_p X_{t-p} + Z_t. \tag{4.5d}$$

V tomto případě připouštíme i $p = \infty$ za předpokladu, že $\Phi := \{\Phi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$.

b) Proces klouzavých součtů (MA proces):
$X \sim MA(q) = ARMA(0, q): \quad X_t = \Theta(B)Z_t$, neboť $\Phi(z) \equiv 1$.
Tedy

$$X_t = Z_t + \Theta_1 Z_{t-1} + \Theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \Theta_q Z_{t-q}. \tag{4.5e}$$

V tomto případě připouštíme i $q = \infty$ za předpokladu, že $\Theta := \{\Theta_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$.

c) Bílý šum (jediný proces, který je současně AR i MA procesem):
$X \sim ARMA(0,0) = AR(0) = MA(0) = WN(0,\sigma^2): \quad X_t = Z_t$.

d) Smíšený ARMA proces:
$X \sim ARMA(p,q),\ 0 < p,q < \infty$: Netriviální směs autoregrese a klouzavých součtů.

Definice 4.22. Buď $X = \{X_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$, $X \sim ARMA(p,q)$. X se nazývá **kauzální ARMA proces**, jestliže existuje $\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$ (tj. $\psi \in \ell_1$) tak, že

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad (\text{zkráceně } X_t = \psi(B)Z_t),\ t \in \mathbb{Z}. \tag{4.6a}$$

X se nazývá **invertibilní ARMA proces**, jestliže existuje $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$ (tj. $\pi \in \ell_1$) tak, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = Z_t \quad (\text{zkráceně } \pi(B)X_t = Z_t),\ t \in \mathbb{Z}. \tag{4.6b}$$

Poznámka 4.23.
Tedy **kauzalita** znamená, že ARMA proces X je kauzálním lineárním procesem, který lze generovat bílým šumem $\{Z_t\}$, neboli $X \sim MA(\infty)$.
Podobně **invertibilita** znamená, že bílý šum $\{Z_t\}$ je kauzálním lineárním procesem, který je generován ARMA procesem X, což je ekvivalentní s $X \sim AR(\infty)$.
Výše jsme použili také skutečnost, že $\psi_0 = \pi_0 = 1$ (viz dále odst. 4.32, který se týká výpočtu kauzální, resp. invertibilní reprezentace).

Věta 4.24 (Autokovarianční funkce MA procesu)**.**
$\{X_t\} \sim MA(q)$, $q \le \infty$ je stacionární náhodný proces s nulovou střední hodnotou $\mu_X = 0$ a autokovarianční funkcí

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q} \Theta_{h+k}\overline{\Theta}_k \ \textit{pro}\ h \ge 0. \tag{4.7a}$$

Speciálně pro $q < \infty$ je

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-h} \Theta_{h+k}\overline{\Theta}_k & \textit{pro}\ 0 \le h \le q \\ 0 & \textit{pro}\ h > q \end{cases} \tag{4.7b}$$

a zejména $\gamma_X(q) = \sigma^2\Theta_q \ne 0$, neboť $\Theta_0 = 1$.

Důkaz. Podle 4.4 je $\{X_t\}$ stacionární a platí

$$\mu_X = \mu_Z \sum_{j=0}^{q} \Theta_j = 0, \text{ neboť } \mu_Z = 0.$$

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k=0}^{q} \Theta_j\overline{\Theta}_k\gamma_Z(h-j+k), \text{ kde } \gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } h = 0 \\ 0 & \text{pro } h \ne 0 \end{cases}.$$

V sumě zůstanou nenulové členy jen pro $h - j + k = 0$, tj. pro $j = h + k$, kdy tedy dostáváme (4.7a)

$$\gamma_X(h) = \sum_{k=0}^{q} \Theta_{h+k}\overline{\Theta}_k \underbrace{\gamma_Z(0)}_{\sigma^2}.$$

Pokud je $q < \infty$, pak $\Theta_{h+k} = 0$ pro $h + k > q$, tj. pro $k > q - h$, takže (4.7a) lze psát ve tvaru (4.7b). □

Důsledek 4.25.

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \gamma_X(0) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q} |\Theta_k|^2. \\ \sigma_X^2 &= \sigma^2(1 + |\Theta_1|^2 + |\Theta_2|^2 + \cdots + +|\Theta_q|^2) \ \textit{pro } q < \infty.\end{aligned} \tag{4.8a}$$

$$\rho_X(h) = \frac{\sum_{k=0}^{q-h} \Theta_{h+k}\overline{\Theta}_k}{\sum_{k=0}^{q} |\Theta_k|^2} \ \textit{pro } h \geq 0. \tag{4.8b}$$

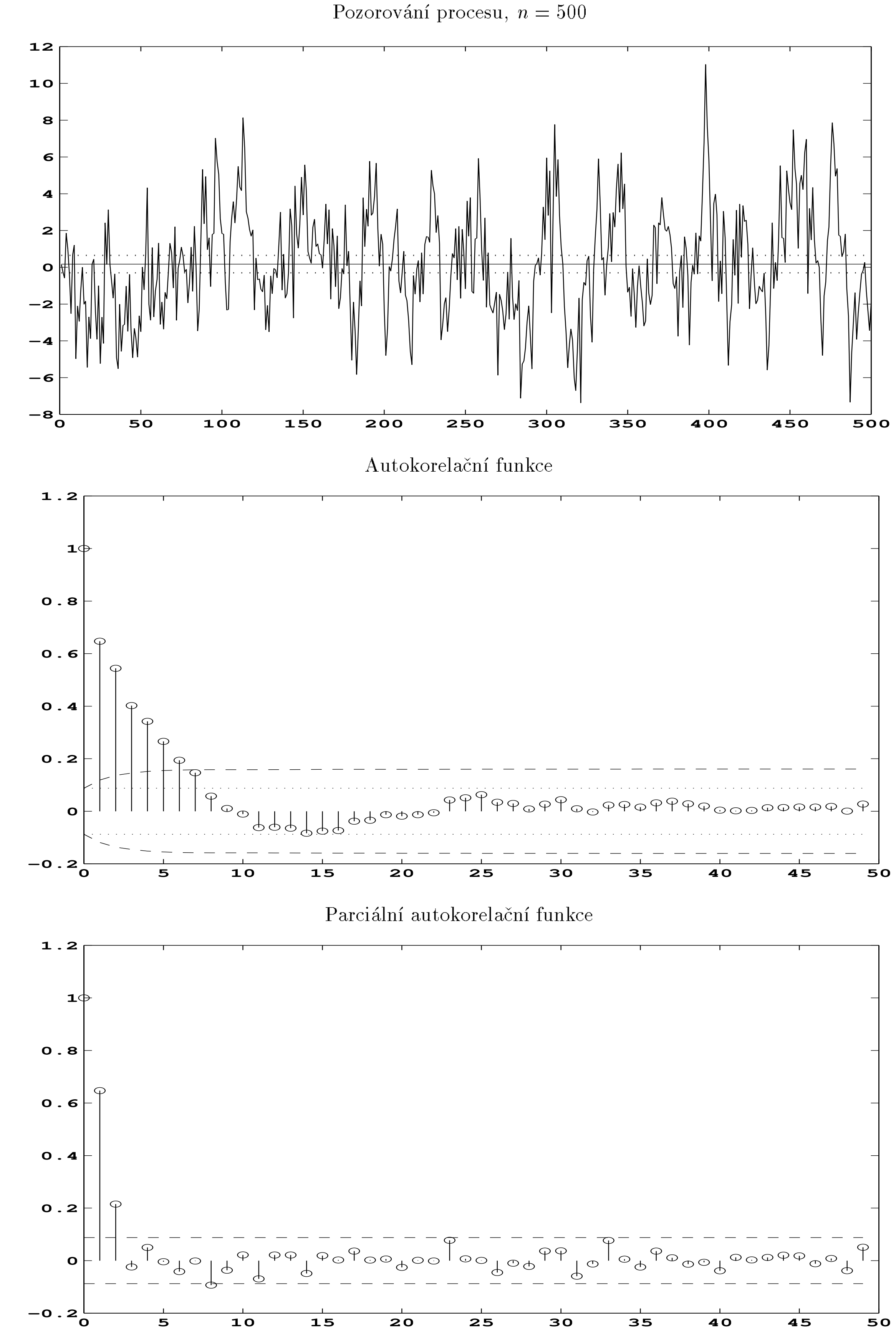
Věta 4.26 (Parciální autokorelační funkce kauzálního AR procesu).
Nechť $\{X_t\} \sim AR(p)$, $p < \infty$ *je kauzální AR proces. Pak* $\{X_t\}$ *je stacionární s nulovou střední hodnotou* $\mu_X = 0$ *a parciální autokorelační funkcí* α_X, *pro niž* $\alpha_X(p) = \Phi_p \neq 0$ *a* $\alpha_X(h) = 0$ *pro* $h > p$.

Důkaz. S uvážením 4.23 je v důsledku kauzality $\{X_t\} \sim MA(\infty)$ a tedy stacionární s nulovou střední hodnotou podle 4.24. Podle (4.6a) je $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ a tedy $X_t \in \overline{\mathcal{L}(Z_t, Z_{t-1}, \dots)} =: \mathcal{L}_t$ (uzávěr lineárního podprostoru v $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ generovaného náhodnými veličinami Z_u, $u \leq t$). Položíme-li $\Phi_j = 0$ pro $j > p$, můžeme dle (4.5d) pro každé $n \geq p$ psát

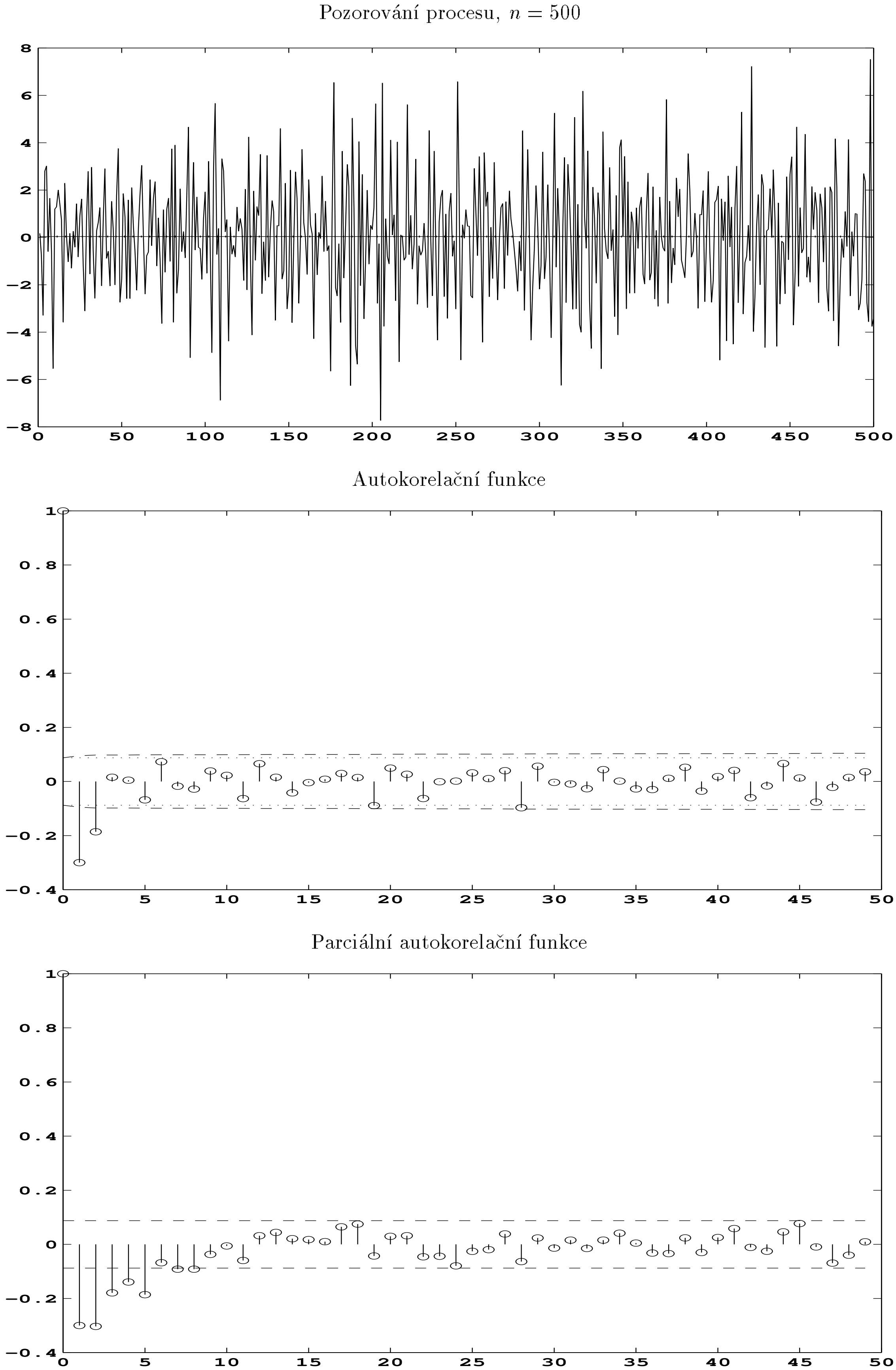
$$X_t = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \Phi_j X_{t-j}}_{\in \mathcal{L}_{t-1}} + Z_t.$$

Veličiny Z_t jsou nekorelované, takže $Z_t \perp Z_u$ pro $t \neq u$. Zejména $Z_t \perp Z_u$ pro $u < t$ a tedy $Z_t \perp \mathcal{L}_{t-1}$ s využitím spojitosti skalárního součinu v $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Podle věty o ortogonální projekci je $\widehat{X}_t = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j X_{t-j}$ jednoznačně určená nejlepší lineární predikce X_t pomocí veličin $X_{t-1}, \dots, X_{t-n}$ pro každé $n \geq p$. Podle věty 4.13 pak $\alpha(p) = \Phi_p$ a $\alpha(n) = \Phi_n = 0$ pro $n > p$. □

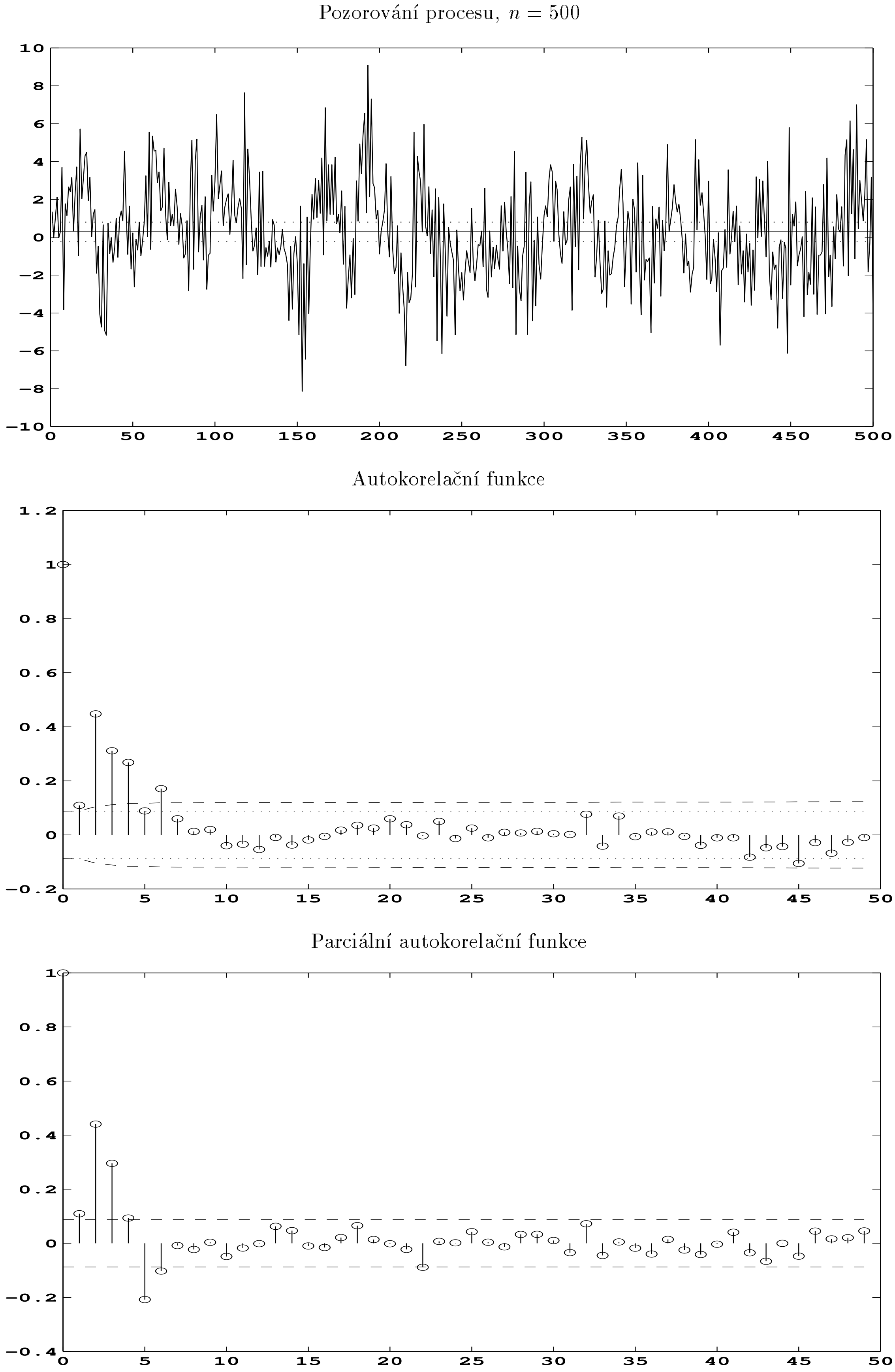
Na obrázcích 4.1, 4.2 a 4.3 jsou typické průběhy odhadnuté autokorelační a parciální autokorelační funkce simulovaných procesů po řadě $AR(2)$, $MA(2)$ a $ARMA(2,2)$. Čárkovaný pás udává interval spolehlivosti 95% pro nulovou hodnotu. Vidíme, že v případě procesu $AR(2)$ na obr. 4.1, resp. $MA(2)$ na obr. 4.2 skutečně $\alpha_X(h) \approx 0$, resp. $\rho_X(h) \approx 0$ pro $h > 2$ v souladu s větami 4.26, resp. 4.24. V ostatních případech obálka $\rho_X(h)$, resp. $\alpha_X(h)$ (v případě $ARMA(2,2)$ na obr. 4.3 dokonce obou) vykazuje exponenciálně klesající, případně navíc i oscilatorický, průběh. Dá se totiž ukázat, že ρ_X i α_X jsou v těchto případech lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a kosinusovek s geometricky klesající amplitudou.



OBRÁZEK 4.1. Proces $AR(2)$: $\mathbf{\Phi} = [0.5, 0.2]$, $\sigma^2 = 2.25$.



OBRÁZEK 4.2. Proces $MA(2)$: $\mathbf{\Theta} = [-0.5, -0.2]$, $\sigma^2 = 2.25$.



Obrázek 4.3. Proces $ARMA(2,2):\ \mathbf{\Phi} = [0.5, 0.2],\ \mathbf{\Theta} = [-0.6, 0.3],\ \sigma^2 = 2.25.$

5.2.3. Postup hledání SARIMA modelu pro pozorovanou časovou řadu.

1. **Odstranění případné heteroskedasticity**
   Viz 5.1.3/1.

2. **Určení sezónní periody s**
   Za s zvolíme společnou periodu nejvíce dominantních periodických složek, neboli nejmenší společný násobek jejich period. Dominantní periodické složky nejsnáze identifikujeme z periodogramu. Pokud společná perioda vychází příliš dlouhá, volíme za s periodu dominantní složky s největším počtem jejích harmonických komponent indikovaných v periodogramu jako významných, tj. jejich frekvence jsou (alespoň přibližně) celočíselnými násobky frekvence této dominantní složky. Je přitom třeba dávat pozor, aby byl periodogram spočten z vhodně zkrácené časové řady, tak aby v ní byl obsažen celý počet period délky s.
   Periodu s výrazně dominantní periodické složky lze zpravidla dosti přesně odečíst i jako periodu oscilací v odhadnuté autokorelační funkci $\widehat{\rho}_X(\cdot)$.

3. **Určení řádů diferencování d a D**
   (a) Analogicky jako v 5.1.3/2(a) se snažíme zvolit nejmenší d a D tak, aby diferencovaná řada $\Delta^d \Delta_s^D X_t$ se jevila jako stacionární. V praxi je zpravidla $0 \le d, D \le 1$. Zejména případ $D > 1$ je velmi málo pravděpodobný, neboť odpovídá proměnlivému kolísání sezónních amplitud, které však bývá většinou spojeno s obdobně proměnným rozptylem. Jeho odstranění vhodnou transformací ad 1 pak obvykle odstraní i kolísání v amplitudách (viz soubor `airpass.m`).
   (b) Zkoumáme chování odhadnuté autokorelační funkce $\widehat{\rho}_W(\cdot)$ diferencované řady. Pokud ještě vykazuje oscilace s periodou s (lze samozřejmě citlivěji ověřit opět z periodogramu diferencované řady), pak je třeba řád D ještě zvýšit (oscilace s jinou periodou svědčí pro použití zobecněného SARIMA modelu popsaného v 5.2.5). Pokud $\widehat{\rho}_W(h)$ klesá pro $h = 1, 2, \ldots, \frac{s}{2}$ pomalu (lineárně) a nikoliv exponenciálně, pak je třeba ještě zvětšit řád d.
   (c) Analogicky jako v 5.1.3(c) hledáme diferencovanou řadu s nejmenším rozptylem.

4. **Určení řádů P, Q, p, q**
   (a) rozborem autokorelační a parciální autokorelační funkce $\widehat{\rho}_W(\cdot)$ a $\widehat{\alpha}_W(\cdot)$
   Dle 4.34 musí pro $h = 1, 2, 3, \ldots$ průběh $\widehat{\rho}_W(hs)$ a $\widehat{\alpha}_W(hs)$ korespondovat s modelem $ARMA(P, Q)$ a pro $h = 1, 2, \ldots, s-1$ s modelem $ARMA(p, q)$.

   Zpravidla se používají modely typu $SARIMA(0, d, q, 0, D, Q, s)$ nebo $SARIMA(p, d, 0, P, D, 0, s)$. Naopak modely $SARIMA(0, d, q, P, D, 0, s)$ nebo $SARIMA(p, d, 0, 0, D, Q, s)$ se nedoporučují, neboť obvykle vedou k vysokým řádům a tedy k velkému počtu parametrů. Identifikace obecných modelů $SARIMA(p, d, q, P, D, Q, s)$ bývá většinou dosti obtížná.
   (b) užitím ztrátové funkce (viz 4.36/4)
   1° *Nejprve určíme P, Q :*
   (5.2b) $\Rightarrow W \sim SARIMA(p, 0, q, P, 0, Q, s) \overset{(5.3a)}{\Rightarrow} W^{(k)} \sim ARMA(P, Q)$, $\widetilde{\Phi}(B) W_t^{(k)} = \widetilde{\Theta}(B) E_t^{(k)}$ pro $k = 1, 2, \ldots, s$. Pak P, Q nalezneme dle minima ztrátové funkce pro $\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} W_t^{(k)}$, případně můžeme spočíst optimální P_k, Q_k pro každý parciální proces $W^{(k)}$ a za P, Q vybrat dvojici, která se nejčastěji vyskytuje mezi všemi dvojicemi P_k, Q_k.
   2° *Pak určíme p, q :*
   Minimalizujeme ztrátovou funkci pro $W \sim SARIMA(p, 0, q, P, 0, Q, s)$, kde P, Q jsou již pevné a p, q vybíráme z dvojic ve vhodném rozmezí $p = 0, 1, \ldots, p_{\max}$ a $q = 0, 1, \ldots, q_{\max}$. Pokud je $P = 0$ (resp. $Q = 0$), volíme většinou nejprve $0 = p = p_{\max}$ (resp. $0 = q = q_{\max}$) pevně.

5. **Odhad parametrů modelu a jeho verifikace**
   V zásadě postupujeme jako ve 4.36/5–7.

5.2.4. **Konstrukce predikcí v SARIMA modelu.**

Přímý postup zpětného integrování analogický k 5.1.4 je algoritmicky komplikovaný vzhledem k sezónnímu diferencování Δ_s.

Užijeme proto jiný přístup:
V zásadě lze totiž postupovat jako ve 4.36/7(4), neboť z hlediska predikcí se $\{X_t\}$ řídí ARMA modelem $\widehat{\Phi}^*(B)X_t = \widehat{\Theta}^*(B)Z_t$ (viz 5.2.2(1)), přičemž koeficienty $\widehat{\Phi}_j^*$ a $\widehat{\Theta}_j^*$ určíme ze součinů polynomů

$$\widehat{\Phi}^*(z) = \widehat{\Phi}(z)\widehat{\widehat{\Phi}}(z^s)(1-z)^d(1-z^s)^D \text{ a } \widehat{\Theta}^*(z) = \widehat{\Theta}(z)\widehat{\widehat{\Theta}}(z^s),$$

kde $\widehat{\Phi}(z)$, $\widehat{\widehat{\Phi}}(z)$, $\widehat{\Theta}(z)$ a $\widehat{\widehat{\Theta}}(z)$ jsou známé polynomy, jejichž koeficienty jsou dány odhadnutými parametry v SARIMA modelu: $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$, $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}$, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ a $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Theta}}}$.

V praxi diferencovaná řada $\{W_t\}$ nemusí mít nulovou střední hodnotu μ_W (viz 5.1.2(2)). Pak v (5.2b) je nutno dosadit $W_t - \mu_W$ místo W_t:

$$\widetilde{\Phi}^*(B)(W_t - \mu_W) = \Theta^*(B)Z_t \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\Phi}^*(B)W_t - \underbrace{(1 - \widetilde{\Phi}_1^* - \cdots - \widetilde{\Phi}_{p+Ps}^*)\mu_W}_{c} = \Theta^*(B)Z_t \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \widetilde{\Phi}^*(B)W_t = c + \Theta^*(B)Z_t \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^*(B)X_t = c + \Theta^*(B)Z_t.$$

Pak

$$\widehat{X}_t^{(1)} = \widehat{\Phi}_1^* X_{t-1} + \cdots + \widehat{\Phi}_{p^*}^* X_{t-p^*} + \widehat{\Theta}_1^* Z_{t-1} + \cdots + \widehat{\Theta}_{q^*}^* Z_{t-q^*} + c$$

je příslušný vztah pro 1-krokovou predikci analogický k 4.36/7(4), avšak navíc s aditivním korekčním členem c. Pro predikce $\widehat{W}_t^{(1)}$ v diferencované časové řadě stačí pouze místo $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^*$ užít $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}^*$.

Závěrem poznamenejme, že pro výpočet $\boldsymbol{\Phi}^*$, $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^*$, $\boldsymbol{\Theta}^*$ a c lze využít procedury `ARMApar`:
$[\boldsymbol{\Phi}^*, \boldsymbol{\Theta}^*, c, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^*] = \texttt{ARMApar}([p, d, q, P, D, Q, s], \{\boldsymbol{\Phi}, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{\Theta}, \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}\}, \mu_W)$.
Vlastní predikce $\widehat{X}_t^{(1)}$ pak spočteme jako $c+\texttt{armasim}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^*, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^*, \boldsymbol{x0}, \boldsymbol{z0})$.

LITERATURA

[1] Peter J. Brockwell and Richard A. Davis, *Time series: Theory and methods*, 2-nd ed., Springer-Verlag, New York, 1991 (corrected 2-nd printing 1993).
[2] Tomáš Cipra, *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, SNTL, Praha, 1986.

Katedra aplikované matematiky, Masarykova univerzita v Brně, Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno
E-mail address: vesely@@math.muni.cz