

# WAVELETY A ČASOVĚ-FREKVENČNÍ ANALÝZA DAT<sup>1</sup>

VÍTĚZSLAV VESELÝ

27. října 1995

**ABSTRAKT.** Teorie “waveletů” je poměrně novou disciplínou aplikované matematiky s počátky sahajícími do let 1982–1984. V poslední době enormně vzrůstá zájem o tuto metodu a to zejména vzhledem k neustále se rozšiřujícímu poli možných aplikací. V příspěvku bude stručně vyložena hlavní myšlenka s důrazem na použití především při časově-frekvenční analýze dat a s ní spojené zobecněné filtrace. Vše bude pojednáno v kontextu s klasickým fourierovským přístupem. Demonstrační ukázky převzaté z literatury ozřejmí chování této metody v některých typických úlohách zpracování dat.

## 1. ÚVOD

Teorie waveletů je moderní disciplínou aplikované matematiky s mnoha aplikacemi především v oblasti zpracování a analýzy dat, komprese obrazů, v numerické matematice (úzká souvislost s aproximací splajny) aj. Je považována za zastřešující teorii asi šestnácti oblastí, které se předtím rozvíjely odděleně a zasahují nejen do matematiky, ale i do matematické fyziky a technických věd (především zpracování signálů). O mohutném současném zájmu o tento obor svědčí nejen velké množství monografií vydaných na toto téma v poslední době [2, 4, 5, 7, 8, 12], ale také exponenciální růst časopiseckých článků. V přehledu waveletové literatury [11] je k roku 1993 zachyceno takřka 1000 položek.

Cílem tohoto příspěvku je podat stručný úvod do teorie waveletů a naznačit typické možnosti jejího užití. Výklad postupuje od elementárních matematických pojmů (odst. 2 a 3) přes klasickou Fourierovu analýzu (odst. 4) až k waveletům a jejich použití především při časově-frekvenční analýze dat a filtraci (odst. 5 a 6). V závěru pak následují ukázky některých aplikací a informace o existujícím software.

*Označení.*

$\mathbb{N}$  ... množina všech přirozených čísel

$\mathbb{Z}$  ... množina všech celých čísel

$\mathbb{R}$  ... množina všech reálných čísel

$\mathbb{C}$  ... množina všech komplexních čísel

$T$  ... symbol pro transpozici matice.

## 2. KONEČNĚ DIMENZIONÁLNÍ VEKTOROVÉ PROSTORY

Uvažujme množinu  $\mathbb{C}^n$  všech uspořádaných  $n$ -tic komplexních čísel ( $n \in \mathbb{N}$ ). Každý prvek  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  tedy můžeme reprezentovat jako komplexní vektor (matici  $n \times 1$ ), tj.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

---

<sup>1</sup>Vytištěno ve sborníku celostátního semináře ANALÝZA DAT 95/II (ed. TriloByte, s.r.o. Pardubice) konaného 21.–24.11.1995 v hotelu Technik, Lázně Bohdaneč u Pardubic.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory Grantové Agentury České Republiky, reg. číslo grantu 201/93/2408.

Tato množina má zřejmě tyto vlastnosti:

- (1) Součet libovolných vektorů z  $\mathbb{C}^n$  patří do  $\mathbb{C}^n$ , přičemž  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$  je nulový vektor vzhledem ke sčítání a ke každému vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  zde existuje opačný vektor  $-\mathbf{x}$  i komplexně sdružený vektor  $\bar{\mathbf{x}}$ .
- (2) S každými dvěma vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  patří do  $\mathbb{C}^n$  i jejich součin definovaný po složkách,  $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n)^T$ , nazývaný též **Kroneckerův součin**. Speciálním případem je násobení vektoru skalárem  $c \in \mathbb{C}$ , kdy píšeme  $c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)^T$ .
- (3) Předpisem  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  je definována binární funkce  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  nazývaná **skalární součin vektorů**.

Snadno pro ni ověříme následující vlastnosti:

- (i)  $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$
- (ii)  $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  pro každé  $c \in \mathbb{C}$
- (iii)  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$
- (iv)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , přičemž  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Potom číslo  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$  je **Euklidovská norma** udávající velikost vektoru  $\mathbf{x}$ .

Důsledkem vlastností (i) – (iv) je tzv. **Schwarzova nerovnost**

- (v)  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ ,  
přičemž rovnost nastane právě když jeden z vektorů je skalárním násobkem druhého.

**Příklad 2.1.** Vezměme reálné vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^2$  (tj. prvky Euklidovské roviny). Zřejmě  $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|(\cos \xi, \sin \xi)^T$  a  $\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|(\cos \eta, \sin \eta)^T$ , takže  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|(\cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\eta - \xi)$ , kde  $\eta - \xi$  je úhel, který oba vektory svírají. To vede k následující obecné definici.

**Definice 2.2.** Vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  se nazývají **ortogonální** (píšeme  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ), jestliže  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ . Podmnožina  $E \subset \mathbb{C}^n$  se nazývá **ortogonální systém** v  $\mathbb{C}^n$ , jestliže neobsahuje nulový vektor a pro každé  $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in E$ ,  $\mathbf{e} \neq \mathbf{e}'$  je  $\mathbf{e} \perp \mathbf{e}'$ .  $E$  se nazývá **ortonormální**, jestliže navíc platí  $\|\mathbf{e}\| = 1$  pro každé  $\mathbf{e} \in E$ .

Skalární součin  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  tedy představuje jakousi míru lineární vazby mezi vektory  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ , která se pohybuje mezi dvěma extrémy: žádná vazba=ortogonalita, plná vazba=lineární závislost.

Protože  $\mathbb{C}^n$  je uzavřená vzhledem k sečítání a násobení skalárem (viz (1) a (2)), tvoří tzv. **vektorový prostor**. Každou jeho podmnožinu  $L \subseteq \mathbb{C}^n$  s těmito vlastnostmi nazýváme **vektorovým (lineárním) podprostorem** v  $\mathbb{C}^n$ .

Je-li  $G \subseteq \mathbb{C}^n$ , pak  $L = \mathcal{L}(G) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \xi_i \mathbf{g}_i, m \in \mathbb{N}, \mathbf{g}_i \in G \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m\}$  je zřejmě nejmenší lineární podprostor obsahující  $G$ ,  $G$  nazýváme jeho **množinou generátorů** nebo říkáme, že je **generován** množinou  $G$ . Minimální podmnožině generující  $L$  se říká **báze** podprostoru  $L$ . Dá se ukázat, že pokud existuje alespoň jedna konečná báze, pak jsou konečné i všechny ostatní a mají též počet prvků nazývaný **dimenzí** podprostoru  $L$ .

Podmnožina  $M \subset \mathbb{C}^n$  se nazývá **lineárně nezávislá**, jestliže žádný její prvek není lineární kombinací ostatních.

Zřejmě platí následující tvrzení:

**Tvrzení 2.3.**  $G$  je báze podprostoru  $L \Leftrightarrow G$  je maximální nezávislou podmnožinou v  $L$ .

**Tvrzení 2.4.** Každá ortogonální podmnožina  $E \subseteq \mathbb{C}^n$  je lineárně nezávislá.

*Důkaz.*  $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^m \xi_i \mathbf{e}_i$ ;  $\mathbf{e}, \mathbf{e}_i \in E, \mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, m$  není možné, neboť  $0 \neq \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e} \rangle = 0$ .  $\square$

**Důsledek 2.5.**  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , kde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T$  je ortonormální báze celého prostoru  $\mathbb{C}^n$ , který má tedy dimenzi  $n$ .

*Důkaz.*  $E$  je zřejmě ortonormální podle (3) a tedy nezávislá v  $\mathbb{C}^n$ , a to dokonce maximální taková, neboť  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$  platí pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ .  $\square$

**Důsledek 2.6.**  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j \rangle \stackrel{(i)-(iii)}{=} \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ .

Poslední důsledek neříká nic jiného, než že předpis (3) představuje jedinou možnou definici skalárního součinu na  $\mathbb{C}^n$  s vlastnostmi (i) – (iv), která je současně invariantní na volbě ortonormální báze ( $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  zůstává stejné, i když souřadnice  $x_i$  a  $y_i$  vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  se v jiné ortonormální bázi změní).

**Věta 2.7.** Je-li  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  nějaká ortonormální báze v  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ , pak  $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$ .

*Důkaz.*  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \stackrel{(i),(ii)}{=} \sum_{j=1}^n x_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = x_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = x_i$ .  $\square$

### 3. NEKONEČNĚ DIMENZIONÁLNÍ FUNKCIONÁLNÍ PROSTOR $L_2(\mathcal{J})$

**Definice 3.1.** Necht  $\mathcal{J}$  je nějaký interval reálných čísel (ohraničený nebo neohraničený). Potom označíme jako  $L_2(\mathcal{J})$  množinu všech funkcí  $x: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ , které jsou na  $\mathcal{J}$  měřitelné a integrovatelné v kvadrátu, tj.  $\int_{\mathcal{J}} |x(t)|^2 dt < \infty$ . Funkce, které se liší pouze na množině míry 0 přitom považujeme za totožné.

Na funkce z  $L_2(\mathcal{J})$  můžeme pohlížet jako na vektory s nekonečně mnoha složkami (pro každé  $t \in \mathcal{J}$  představuje hodnota  $x(t)$  příslušnou složku). Ukazuje se, že  $L_2(\mathcal{J})$  má pak zcela analogické vlastnosti jako  $\mathbb{C}^n$ , jestliže diskrétní sumu  $\sum_{i=1}^n$  nahradíme integrální sumou  $\int_{\mathcal{J}}$ . Zejména definujeme  $\langle x, y \rangle = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{y(t)} dt$  a  $\|x\| = \sqrt{\int_{\mathcal{J}} |x(t)|^2 dt}$ .

Existence a konečnost tohoto integrálu ihned plyne z této nerovnosti:

$$4|x\bar{y}| = (|x| + |\bar{y}|)^2 - (|x| - |\bar{y}|)^2 \leq (|x| + |\bar{y}|)^2 + (|x| - |\bar{y}|)^2 = 2(|x|^2 + |\bar{y}|^2)$$

Pak totiž  $\int_{\mathcal{J}} |x(t) \overline{y(t)}| dt \leq \frac{1}{2} (\int_{\mathcal{J}} |x(t)|^2 dt + \int_{\mathcal{J}} |y(t)|^2 dt) < \infty$ , neboť  $|y| = |\bar{y}|$ .

Současně jsme ukázali (při volbě  $y$  místo  $\bar{y}$ ), že pro každé  $x, y \in L_2(\mathcal{J})$  rovněž součin  $xy \in L_2(\mathcal{J})$  — viz analogii s  $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$  ve (2) odst. 2.

Pak také snadno vidíme, že  $x + y \in L_2(\mathcal{J})$ , neboť  $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \Rightarrow \int_{\mathcal{J}} |x(t) + y(t)|^2 dt < \infty$ .

Takto jsme ověřili všechny netriviální vlastnosti (1)–(3) z odst. 2.

Prostor  $L_2(\mathcal{J})$  ovšem nemá konečnou dimenzi. Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  totiž snadno zkonstruuje  $n$ -prvkový ortogonální (a tedy lineárně nezávislý) systém tak, že v  $\mathcal{J}$  vybereme  $n$  konečných disjunktních subintervalů a ke každému z nich přiřadíme funkci, která je na něm rovna např. jedné a na zbytku  $\mathcal{J}$  nulová.

Ve funkcionální analýze se dokazuje následující věta.

**Věta 3.2.** Každý ortogonální systém  $E \subset L_2(\mathcal{J})$  je nejvýše spočetný, tj. jeho prvky se dají očíslovat přirozenými čísly.

**Definice 3.3.**  $E \subset L_2(\mathcal{J})$  se nazývá **úplný ortogonální systém**, jestliže neexistuje jeho vlastní ortogonální nadmnožina (analogie ortogonální báze pro konečně dimenzionální vektorové prostory).

**Věta 3.4.** Necht  $E \subset L_2(\mathcal{J})$ . Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

- (1)  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$  je úplný ortonormální systém v  $L_2(\mathcal{J})$
- (2)  $\mathcal{L}(E)$  je hustý v  $L_2(\mathcal{J})$  neboli pro libovolnou funkci  $x \in L_2(\mathcal{J})$  existují  $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{L}(E)$  tak, že  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$  (tj.  $\int_{\mathcal{J}} |x(t) - x_n(t)|^2 dt \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ ). Přitom lze speciálně volit  $x_n(t) = \sum_{i=1}^n x_i e_i(t)$ , kde  $x_i = \langle x, e_i \rangle = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{e_i(t)} dt$ , píšeme pak  $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i(t)$  — analogie s větou 2.7.
- (3) Pro každé  $x \in L_2(\mathcal{J})$  platí tzv. **Parsevalova identita**  $\|x\| = \sqrt{\int_{\mathcal{J}} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} < \infty$ , kde  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  jako ve (2) — analogie s  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  ve (3)(iv) odst. 2.

**Důsledek 3.5.** Je-li  $E \subset L_2(\mathcal{J})$  úplný ortonormální systém,  $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i(t)$ ,  $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(t) \in L_2(\mathcal{J})$ , pak platí tzv. **Besselova-Parsevalova identita**  $\langle x, y \rangle = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{y(t)} dt = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$  — analogie s 2.6.

*Poznámka 3.6.* Z 3.4 vidíme, že existuje jedno-jednoznačná korespondence mezi funkcemi  $x \in L_2(\mathcal{J})$  a spočetně-dimenzionálními komplexními vektory  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)^T$  splňujícími  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ .

#### 4. KLASICKÁ FOURIEROVSKÁ BÁZE V $L_2([a, b])$

Uvažujme nyní ohraničený interval  $\mathcal{J} = [a, b]$  délky  $b - a = T > 0$  a systém komplexních funkcí  $E = \{e_k(t) | k \in \mathbb{Z}\}$ , kde  $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{k}{T} t} = \frac{1}{\sqrt{T}} (\cos 2\pi \frac{k}{T} t + i \sin 2\pi \frac{k}{T} t)$  je Eulerův zápis **komplexní sinusové vlny**. Protože  $|e_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{T}}$  pro každé  $t$  a tedy  $\|e_k\|^2 = \int_a^b |e_k(t)|^2 dt = \frac{1}{T} (b - a) = 1 < \infty$ , je  $E \subset L_2([a, b])$ . Tento systém funkcí je dokonce ortonormální, neboť pro  $j \neq k$  platí  $\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i2\pi \frac{j}{T} t} \overline{e^{i2\pi \frac{k}{T} t}} dt = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i2\pi \frac{(j-k)}{T} t} dt = \frac{1}{T} [e^{i2\pi \frac{(j-k)}{T} t} / i2\pi \frac{(j-k)}{T}]_a^b = 0$ .

Dá se ukázat, že je rovněž úplný — tvoří tzv. **Fourierovu bázi**, takže každou funkci  $x \in L_2([a, b])$  lze podle věty 3.4 vyjádřit ve tvaru tzv. **Fourierovy řady**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{k}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{k}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t}, \quad (4.1)$$

kde

$$c_k = c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle x, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^b x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_a^b x(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \quad (4.2)$$

je tzv.  $k$ -tý **Fourierův koeficient** a  $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  je tzv. **fourierovské frekvenční spektrum** funkce  $x(t)$ . Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme psát stručně  $c_k$  místo  $c_k(x)$ .

Všimněme si nyní několika skutečností:

- (1) Součet řady (4.1) je zde třeba chápat ve smyslu konvergence podle normy, tj.  $\|x - x_{M,N}\| \rightarrow 0$  pro  $M, N \rightarrow \infty$  (viz 3.4(2)), kde  $x_{M,N}(t) = \sum_{k=-M}^N c_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t}$  jsou částečné součty. Zpravidla volíme  $M = N$  a píšeme  $x_N(t) = x_{M,N}(t)$ . V klasické Fourierově analýze se ovšem vyšetřují i jiné typy konvergenčí, např. řada konverguje bodově (v běžném smyslu), pokud  $x(t)$  má na  $[a, b]$  konečnou variaci, tj. průmět bodů grafu funkce  $x$  na osu závisle proměnné urazí pro  $t$  měnící se od  $a$  do  $b$  konečnou dráhu.

(2) Každá bázová funkce  $e_k(t)$ ,  $|k| > 0$  je definována na celé reálné ose  $\mathbb{R}$ , má periodu  $\frac{T}{|k|}$  a  $e_0(t) \equiv 1$ . Všechny tedy mají společnou periodu  $T$ , takže ve vyjádření (4.1)  $x(t)$  je rozšířena rovněž na celou reálnou osu  $\mathbb{R}$  jako  $T$ -periodické opakování jejích hodnot z intervalu  $[a, b]$ . Po tomto rozšíření je integrand ve (4.2)  $T$ -periodický, takže vyjádření (4.2) pro  $c_k$  nezávisí na volbě konkrétního intervalu délky  $T$ , zpravidla volíme  $a = 0, b = T$  nebo  $a = -\frac{T}{2}, b = \frac{T}{2}$ .

(3) Každá sinusová vlna  $e_k(t)$  vznikne pouhou změnou měřítka nezávisle proměnné  $t$  ve funkci  $w(t) = e_1(t)$ , tj.  $e_k(t) = w(kt)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ . Celý bázový systém je tak určen vlastně touto jedinou jakousi **základní vlnovou funkcí**  $w(t)$ . Pro  $|k|$  velká  $e_k(t) = w(kt)$  kmitá s vysokou frekvencí a pro  $|k|$  malá naopak s malou frekvencí  $f_k = \frac{|k|}{T}$ , (tzv.  **$k$ -tá harmonická frekvence**). Tedy každá funkce z  $L_2([a, b])$  je složena z komplexních sinusových kmitů různých frekvencí,  $c_0$  udává střední hodnotu (stejnoseměrnou složku)  $x(t)$ .

Pokud  $x(t)$  je reálná funkce, pak tyto kmity přejdou v běžné sinusové kmity. Ze (4.2) totiž dostáváme symetrii  $c_{-k} = \bar{c}_k$ , takže při označení  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$  je  $c_{-k}e_{-k} + c_k e_k = \bar{c}_k \bar{e}_k + c_k e_k = 2\text{Re}(c_k e_k) = a_k \cos 2\pi \frac{k}{T}t + b_k \sin 2\pi \frac{k}{T}t = A_k \cos \varphi_k \cos 2\pi \frac{k}{T}t + A_k \sin \varphi_k \sin 2\pi \frac{k}{T}t = A_k \cos(2\pi \frac{k}{T}t - \varphi_k)$ , kde  $A_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  je **amplituda** a  $\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$  **fázový posuv**. Pak tedy (4.1) přejde na tvar

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi \frac{k}{T}t + b_k \sin 2\pi \frac{k}{T}t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi \frac{k}{T}t - \varphi_k)$$

(4) Ze (4.2) vidíme, že  $x_k = \langle x, e_k \rangle = \sqrt{T}c_k$  a tedy Besselova-Parsevalova identita 3.5 nabude tvaru

$$\frac{1}{T} \int_a^b x(t)\overline{y(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)} \quad (4.3)$$

a Parsevalova identita 3.4(3) jako její speciální případ pro  $x = y$  tvaru

$$\frac{1}{T} \int_a^b |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2. \quad (4.4)$$

Interpretujeme-li  $x(t)$  jako analogový signál, pak hodnota  $\int_a^b |x(t)|^2 dt$  je úměrná energii signálu na intervalu  $[a, b]$  a levá strana (4.4) tedy střednímu výkonu na tomto intervalu. Pravá strana pak ukazuje, jak je tento střední výkon rozložen na jednotlivé vlnové komponenty.

Předpokládejme nyní  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$  a  $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ . Provedeme limitní přechod pro  $T \rightarrow \infty$ . Pak (4.2) přejde v

$$Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi \frac{k}{T}t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \stackrel{\text{ozn.}}{=} \hat{x}(f) \quad (4.5)$$

— tzv. **dopřednou (integrální) Fourierovu transformaci** a (4.1) přejde v

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} Tc_k e^{i2\pi \frac{k}{T}t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{i2\pi ft} df \quad (4.6)$$

— tzv. **zpětnou (integrální) Fourierovu transformaci**.

Píšeme  $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$  a  $(\mathcal{F}^{-1}\hat{x})(t) = x(t)$ . Diskrétní frekvence  $f_k = \frac{k}{T}$  přejdou v kontinuum frekvencí  $f \in \mathbb{R}$ ,  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  v kontinuuální spektrum  $\{\hat{x}(f)\}_{f \in \mathbb{R}}$ , z něhož  $\mathcal{F}^{-1}$  rekonstruuje  $x(t)$  analogicky jako Fourierova řada ve (4.1).

Protože  $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{y(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} c_k(x) \overline{c_k(y)}$  přejdou při  $T \rightarrow \infty$  Parsevalovy identity (4.3) a (4.4) analogicky jako výše pořadě do tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\overline{\hat{y}(f)} df \quad (4.7)$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 df. \quad (4.8)$$

Ze (4.8) vidíme, že  $\hat{x} \in L_2(\mathbb{R})$ , takže  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou navzájem inverzní operátory  $L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ .

Je dále zřejmé, že pomocí  $\mathcal{F}$  můžeme (4.2) přepsat do ekvivalentního tvaru

$$c_k(x) = \frac{1}{T} (\mathcal{F}x_T) \left( \frac{k}{T} \right), \quad \text{kde } x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ 0 & \text{pro } t \notin [a, b] \end{cases}. \quad (4.9)$$

Pro libovolné  $c \in \mathbb{C}$ ,  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$  a  $\beta \in \mathbb{R}$  se snadno ověří následující vlastnosti operátorů  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$ :

$$(\mathcal{F})(cx) = c(\mathcal{F})(x) \quad (\mathcal{F}^{-1})(c\hat{x}) = c(\mathcal{F}^{-1})(\hat{x}) \quad (4.10)$$

$$(\mathcal{F})(x+y) = (\mathcal{F})(x) + (\mathcal{F})(y) \quad (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x} + \hat{y}) = (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x}) + (\mathcal{F}^{-1})(\hat{y}) \quad (4.11)$$

$$(\mathcal{F})(x(\alpha t))(f) = \frac{1}{|\alpha|} (\mathcal{F})(x)(f/\alpha) \quad (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x}(\alpha f))(t) = \frac{1}{|\alpha|} (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x})(t/\alpha) \quad (4.12)$$

$$(\mathcal{F})(x(t-\beta))(f) = e^{-i2\pi f\beta} (\mathcal{F})(x) \quad (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x}(f-\beta))(t) = e^{i2\pi t\beta} (\mathcal{F}^{-1})(\hat{x}) \quad (4.13)$$

Dá se také ukázat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(f) \text{ je spojitá funkce.} \quad (4.14)$$

## 5. WAVELETOVÁ BÁZE V $L_2(\mathbb{R})$

Prostory  $L_2([a, b])$  a  $L_2(\mathbb{R})$  se podstatně liší. Jeden z hlavních rozdílů je především v tom, že pro  $x \in L_2(\mathbb{R})$  lokální průměry  $\xi_n = \frac{1}{\delta} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} |x(t)|^2 dt$  klesají k nule při  $n \rightarrow \pm\infty$  a libovolném  $0 < \delta \in \mathbb{R}$ . Kdyby tomu tak totiž nebylo, musela by existovat posloupnost  $n_1 < n_2 < \dots$  taková, že  $\xi_{n_k} \geq \varepsilon > 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$  a vhodné  $\varepsilon$ . Pak ovšem  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \delta \xi_{n_k} \geq \lim_{K \rightarrow \infty} K \delta \varepsilon = \infty$ , což není možné. Zejména tedy sinusové vlny  $e_n(t) \notin L_2(\mathbb{R})$  pro každé  $n \in \mathbb{Z}$ . Jestliže tedy hledáme vlnové funkce  $w_k(t)$ , které generují  $L_2(\mathbb{R})$ , jejich kmity se nutně musí tlumit pro  $t \rightarrow \pm\infty$ . Z praktických důvodů je výhodné, aby tento útlum byl co nejrychlejší. Ve vyjádření  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k w_k(t)$  pak totiž každá komponenta  $x_k w_k(t)$  přispívá k  $x(t)$  pouze lokálně. Tedy hledáme “malé vlny” (wavelet=vlnka) generující  $L_2(\mathbb{R})$ . Podobně jako v  $L_2([a, b])$ , kde jediná funkce  $w(t) = e^{\frac{i2\pi t}{T}}$  generuje celý prostor (viz odst.4(3)), bychom i nyní rádi měli jedinou funkci, řekněme  $\psi(t)$  generující celý prostor  $L_2(\mathbb{R})$ . Jestliže však  $\psi(t)$  rychle klesá pro  $t \rightarrow \pm\infty$ , pak zřejmě systém  $\psi(nt), n \in \mathbb{Z}$  nepokryje dostatečně celou reálnou osu tak, aby mohl tvořit bázeový systém (v  $L_2([a, b])$  to možné bylo díky ohraničenosti intervalu  $[a, b]$ ). Je proto přirozené zahrnout navíc ještě všechna posunutí

$\psi(t-k), k \in \mathbb{Z}$ . Z důvodů, které se ozřejmí později, je výhodné uvažovat  $n \in \{2^j | j \in \mathbb{Z}\}$ , takže budeme předpokládat normalizovaný bázevý systém  $E = \{\psi_{j,k}(t) | j, k \in \mathbb{Z}\}$ , kde

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) = 2^{j/2} \psi \left( 2^j \left( t - \frac{k}{2^j} \right) \right) = 2^{j/2} \psi \left( \frac{t - k/2^j}{2^{-j}} \right) \quad (5.1)$$

a  $\|\psi_{j,k}\| = 1$  za předpokladu, že  $\|\psi\| = 1$ .

Toto zaručuje normalizační konstanta  $2^{j/2}$ , neboť

$$\|\psi(2^j t - k)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^j t - k)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \stackrel{u=2^j t - k}{=} \left\{ 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 2^{-j/2} \|\psi\| = 2^{-j/2}.$$

Tedy  $\psi_{j,k}(t)$  se obdrží z  $\psi(t)$  **binární dilatací s faktorem  $2^{-j}$**  a **dyadickým posuvem  $\frac{k}{2^j}$** , který se zmenšuje (zvětšuje) úměrně se smršťováním při  $j \rightarrow +\infty$  (s roztahováním při  $j \rightarrow -\infty$ ) v závislosti na dilatačním faktoru  $2^{-j}$ .

**Definice 5.1.** Funkce  $\psi \in L_2(\mathbb{R})$  se nazývá **ortogonální wavelet**, jestliže systém (5.1) je úplný ortonormální systém v  $L_2(\mathbb{R})$ , tj.

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{R},$$

kde  $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases}$  je tzv. **Kroneckerův symbol**.

**Definice 5.2.** Říkáme, že wavelet  $\psi \in L_2(\mathbb{R})$  má **kompaktní nosič** (compactly supported wavelet), jestliže množina  $\{t | \psi(t) \neq 0\}$  je ohraničená.

Vzhledem k 3.4(2) každé  $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$  lze vyjádřit ve tvaru tzv. **waveletové řady**

$$x(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (5.2)$$

kde konvergence řady je v normě prostoru  $L_2(\mathbb{R})$ , tj.

$$\|x - x_{M_1, N_1, M_2, N_2}\| \rightarrow 0 \text{ pro } M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty$$

a  $x_{M_1, N_1, M_2, N_2}(t) = \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$  jsou částečné součty.

**Waveletové koeficienty** jsou v tomto případě dány vztahem

$$c_{j,k} = c_{j,k}(x) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi \left( \frac{t - k/2^j}{2^{-j}} \right)} dt. \quad (5.3)$$

Parsevalovy identity 3.5 a 3.4(3) jsou pak pořadě tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}(x) \overline{c_{j,k}(y)} \quad (5.4)$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}(x)|^2. \quad (5.5)$$

**Definice 5.3.** Integrovní transformace  $\mathcal{W}_\psi$  určená vztahem

$$\tilde{x}(b, a) = (\mathcal{W}_\psi x)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi \left( \frac{t - b}{a} \right)} dt, \quad x \in L_2(\mathbb{R}), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

se nazývá **dopřednou (integrální) waveletovou transformací** indukovanou “základním waveletem”  $\psi$ . Funkce  $\psi$  se někdy také nazývá **mateřský wavelet (mother wavelet)**.

Podobně jako ve (4.9) je vzhledem k (5.3)  $(j, k)$ -tý **waveletový koeficient** funkce  $x(t)$  určen waveletovou transformací vyhodnocenou pro dyadickou pozici  $b = \frac{k}{2^j}$  a binární dilataci  $a = \frac{1}{2^j}$ :

$$c_{j,k} = (\mathcal{W}_\psi x) \left( \frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right). \quad (5.7)$$

**Příklad 5.4.** Nejjednodušším a historicky nejstarším příkladem ortogonálního waveletu je tzv. **Haarova funkce**  $\psi_H$  definovaná předpisem

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (5.8)$$

V nedávné době bylo nalezeno mnoho dalších ortogonálních waveletů, ukázky některých z nich i Haarova waveletu jsou na obr. 1.

V odst. 4 jsme viděli, že k integrální Fourierově transformaci  $\mathcal{F}$  existuje inverze  $\mathcal{F}^{-1}$  — viz (4.5) a (4.6). V případě waveletů je problém inverze, tj. rekonstrukce  $x(t)$  z  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  složitější. Rozlišujeme čtyři případy v závislosti na míře znalosti  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$ .

- (1)  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  známe úplně pro každé  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Ukazuje se, že ke konstrukci inverze potřebujeme, aby

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty. \quad (5.9)$$

Konečnost této konstanty tedy omezuje výběr  $\psi$ . Protože je přirozené předpokládat

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty$ , je  $\hat{\psi}(f)$  spojitou funkcí podle (4.14). Pak nutně

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (5.10)$$

neboť jinak vzhledem ke spojitosti  $\hat{\psi}$  je  $|\hat{\psi}(f)|^2 \geq K > 0$  v nějakém  $\delta$ -okolí bodu  $f = 0$ , tj.

$$C_\psi \geq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{K}{|f|} df = 2K \int_0^{\delta} \frac{1}{f} df = 2K [\ln |f|]_0^{\delta} = 2K (\ln \delta - \ln 0) = \infty.$$

Vynucená podmínka (5.10) tedy ukazuje, že základní wavelet  $\psi$  je skutečně malá vlna (nabývá kladných i záporných hodnot). Dostáváme pak následující rekonstrukční formuli

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{x}(b, a) \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right\} \frac{da db}{a^2}, \quad x \in L_2(\mathbb{R}). \quad (5.11)$$

Všimněme si, že zatímco v dopředné transformaci (5.6) se používá jádro  $\overline{\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)}$ , zde je užito  $\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$ , což opět ukazuje na analogický vztah jádra  $e^{-i2\pi ft} = \overline{e^{i2\pi ft}}$  pro  $\mathcal{F}$  a jádra  $e^{i2\pi ft}$  pro  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Wavelet, který se užívá pro inverzní waveletovou transformaci  $\mathcal{W}_\psi^{-1}$  se nazývá **duální k  $\psi$** . V tomto případě je tedy  $\bar{\psi}$  duální k  $\psi$ .



- (2)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe částečně jen pro každé  $a > 0$  a  $b \in \mathbb{R}$ .

V tomto případě je rekonstrukce možná za tu cenu, že se výběr přípustných  $\psi$  ještě více omezí. Místo (5.9) dostáváme poněkud přísnější podmínku

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{f} df = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-f)|^2}{f} df = \frac{1}{2}C_\psi < \infty, \quad (5.12)$$

kde  $C_\psi$  je určena opět vztahem (5.9).

Například reálná funkce  $\psi$  splňující (5.9) splňuje i (5.12), neboť

$$\widehat{\psi}(-f) = \overline{\widehat{\psi}(f)} \Rightarrow |\widehat{\psi}(-f)| = |\widehat{\psi}(f)|.$$

Inverzní formule je v tomto případě tvaru

$$x(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty \tilde{x}(b, a) \left\{ a^{-\frac{1}{2}\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) \right\} db \right] \frac{da}{a^2}, \quad x \in L_2(\mathbb{R}). \quad (5.13)$$

a tedy  $\bar{\psi}$  je opět duální k  $\psi$ .

- (3)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe částečně jen pro  $a = \frac{1}{2^j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  a  $b \in \mathbb{R}$ .

Protože  $a = \frac{1}{2^j} > 0$ , podmínka (5.12) se dále zpřísní. Požaduje se totiž existence konstant  $0 < A \leq B < \infty$  nezávislých na  $f$  takových, že platí tzv. **podmínka stability**

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^\infty |\widehat{\psi}(2^{-j}f)|^2 \leq B. \quad (5.14)$$

Dá se ukázat, že z ní plyne striktnější podmínka (5.12) ve tvaru

$$\begin{aligned} A \ln 2 &\leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{f} df = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-f)|^2}{f} df \leq B \ln 2 \text{ neboli} \\ 2A \ln 2 &\leq C_\psi \leq 2B \ln 2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Inverzní formule je pak tvaru

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \{2^{j/2} \tilde{x}(b, 2^{-j})\} \{2^j \psi^*(2^j(t-b))\} db, \quad x \in L_2(\mathbb{R}), \quad (5.16)$$

kde Fourierova transformace  $\widehat{\psi}^*$  duálního waveletu  $\psi^*$  je určena vztahem

$$\widehat{\psi}^*(f) = \frac{\overline{\widehat{\psi}(f)}}{\sum_{j=-\infty}^\infty |\widehat{\psi}(2^{-j}f)|^2}. \quad (5.17)$$

- (4)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe jen v diskrétních hodnotách  $a = \frac{1}{2^j}$  a  $b = \frac{k}{2^j}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

Tento případ odpovídá znalosti waveletových koeficientů (5.7) a inverze je tedy dána waveletovou řadou (5.2). Ukazuje se však, že rekonstrukce je možná i tehdy, když  $\{\psi_{j,k}\}$  není ortonormální báze v  $L_2(\mathbb{R})$ , ale pouze jakási “stabilní” (skoro ortonormální) báze ve smyslu následující definice.

**Definice 5.5.** Funkce  $\psi \in L_2(\mathbb{R})$  se nazývá  **$\mathcal{R}$ -funkce**, jestliže  $E = \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  tvoří tzv. **Rieszovu bázi** v  $L_2(\mathbb{R})$ , což znamená, že  $\mathcal{L}(E)$  je hustá v  $L_2(\mathbb{R})$  a existují konstanty  $0 < A \leq B < \infty$  takové, že

$$A \|\{c_{j,k}\}\|^2 \leq \|x(t)\|^2 \leq B \|\{c_{j,k}\}\|^2 \quad (5.18)$$

platí pro každou funkci  $x(t) = \sum_{j=-\infty}^\infty \sum_{k=-\infty}^\infty c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$ , kde posloupnost  $\{c_{j,k}\}$  je **dvojnásobně sumovatelná v kvadrátu**, tj. splňuje

$$\|\{c_{j,k}\}\|^2 = \sum_{j=-\infty}^\infty \sum_{k=-\infty}^\infty |c_{j,k}|^2 < \infty. \quad (5.19)$$

Porovnání této definice s větou 3.4 říká, že Parsevalova identita je speciálním případem (5.18) pro  $A = B = 1$ . Zde se tedy pro  $\|x\|^2$  připouští jistá tolerance. Dá se ukázat, že k dané Rieszově bázi  $E = \{\psi_{j,k}\}$  vždy existuje jediná Rieszova báze  $E^* = \{\psi_{j,k}^*\}$  k ní **duální** v tomto smyslu:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m}^* \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \text{ pro každé } j, k, l, m \in \mathbb{Z}. \quad (5.20)$$

Potom pro každou funkci  $x(t) = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} c_{l,m}^* \psi_{l,m}^*(t)$  platí

$$\langle x, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} c_{l,m}^* \langle \psi_{l,m}^*, \psi_{j,k} \rangle = c_{j,k}^* \quad (5.21)$$

a tedy dostáváme modifikaci inverzní formule (5.2) ve tvaru

$$x(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}^*(t). \quad (5.22)$$

V případě ortonormální báze je  $\psi_{j,k} = \psi_{j,k}^*$  pro každé  $j, k \in \mathbb{Z}$  a (5.22) tedy degeneruje v (5.2).

Poznamenejme ještě, že obecně  $\{\psi_{j,k}^*\}$  nemusí být ve všech případech waveletová řada, protože totiž nemusí existovat takový základní wavelet  $\psi^* \in L_2(\mathbb{R})$ , aby  $\psi_{j,k}^*(t) = 2^{j/2} \psi^*(2^j t - k)$  bylo splněno pro všechna  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

## 6. ČASOVĚ-FREKVENČNÍ ANALÝZA DAT A ZOBECNĚNÁ FILTRACE

V klasické fourierovské bázi (4.1) a (4.2) každá bázová funkce je sinusový kmit, který ovlivňuje průběh  $x(t)$  stejnoměrně na celé reálné ose a má tedy **globální** účinek. Je to tedy funkce, která **není lokalizována v čase**, ale naopak je **ideálně lokalizována ve frekvenci** (její spektrum je jednobodové). Výpočet každého jednotlivého spektrálního koeficientu podle (4.2) tedy vyžaduje úplnou znalost signálu  $x(t)$  v minulosti i budoucnosti. Nevýhoda této reprezentace se nejvýrazněji projeví u signálu, jehož dynamika (tj. frekvenční charakteristika) se s časem výrazně mění. Takový signál si vynucuje silné zastoupení velkého množství vysokofrekvenčních komponent (např. skokové změny se vymodelují až v limitě) neboli zabírá **široké frekvenční pásmo**. Prakticky nepříznivým důsledkem je velký objem dat spektra  $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  potřebný k vyhovujícímu popisu  $x(t)$ .

Vzniká tak požadavek vyšetřovat **lokální frekvenční charakteristiky** signálu postupně v čase. Standardní postup využívá tzv. **Fourierovu transformaci s váhovým oknem** (WFT = Windowed Fourier Transform), které postupně “klouže” po datech (kontinuálně nebo v diskrétních krocích) a vybírá tak z dat pro frekvenční analýzu pouze lokální úsek:

$$(\mathcal{F}^{\text{win}} x)(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) g(s - t) e^{-i2\pi f s} ds, \quad (6.1)$$

kde  $g(\cdot)$  je váhové okno (zpravidla gaussovské) se středem v 0. Použitím  $\mathcal{F}^{\text{win}}$  místo  $\mathcal{F}$  ve (4.9) dostaneme po záměně indexu  $k$  indexem  $j$  spektrum  $\{c_{j,t}\}_{j,t \in \mathbb{Z}}$ , pokud se omezíme pouze na diskrétní časové okamžiky  $t \in \mathbb{Z}$ . Jeho podobnost se spektrem (5.3) není jen formální. Stačí položit  $\gamma_{j,t}(s) = \overline{g(s - t) e^{-i2\pi \frac{j}{T} s}} = \overline{g(s - t)} e^{i2\pi \frac{j}{T} s}$  a (6.1) bude přesně tvaru (5.3). Jeden podstatný rozdíl zde však přece jenom je. Na rozdíl od  $\psi_{j,k}$  šířka  $\gamma_{j,t}$  ani posuv  $t$  nezávisí na  $j$ .

Protože frekvence je nepřímo úměrná délce cyklu, tak pro zachycení vysokofrekvenční informace vystačíme s kratším intervalem, zatímco pro zachycení nízkofrekvenční informace je naopak potřeba interval delší. Jinými slovy, potřebujeme mít flexibilní časové okno, které se automaticky zužuje, je-li střední frekvence jeho spektra vyšší a

rozšiřuje, je-li tato frekvence nižší. Tuto vlastnost mají právě  $\psi_{j,k}$  (na rozdíl od  $\gamma_{j,t}$ ). Pro rostoucí  $j$  se  $\psi_{j,k}$  zužuje (šířka =  $1/2^j$ ), podle (4.12) se pak ovšem  $\widehat{\psi}_{j,k}$  rozšiřuje a střední frekvence spektra spolu se šířkou pásma tedy rostou. Se zužováním je třeba rovněž zjemňovat posuv  $\frac{k}{2^j}$ , aby nevznikly časové díry nepokryté vysokofrekvenční informací. Aby se  $\psi_{j,k}$  mohly používat pro časově-frekvenční analýzu ve výše uvedeném smyslu, musí být tedy dobře lokalizovány současně v čase i ve frekvenci. Vzhledem ke (4.12) jsou to ovšem protichůdné požadavky, kterým lze rozumně vyhovět pouze v případě, že jak  $\psi(t)$  tak  $\widehat{\psi}(f)$  se rychle tlumí (konvergují k nule) pro  $t, f \rightarrow \pm\infty$ . Navíc musíme pro  $\psi$  a  $\widehat{\psi}$  a následně i pro  $\psi_{j,k}$  a  $\widehat{\psi}_{j,k}$  být schopni určit jejich střed a šířku, které dále definujeme v 6.1. Taková funkce  $\psi$ , resp.  $\widehat{\psi}$  se pak nazývá **váhovou funkcí časového, resp. frekvenčního okna**.

**Definice 6.1.** Netriviální funkce  $w(t) \in L_2(\mathbb{R})$  se nazývá **váhová funkce okna** (stručně **okno**), jestliže rovněž  $tw(t) \in L_2(\mathbb{R})$ . **Střed**  $t^*$  a **poloměr**  $\Delta_w$  okna  $w$  jsou pak definovány vztahy

$$t^* = \frac{1}{\|w\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|w(t)|^2 dt \quad (6.2)$$

a

$$\Delta_w = \frac{1}{\|w\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)|w(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.3)$$

Číslo  $2\Delta_w$  nazýváme **šířkou okna**  $w$ .

Ve statistické terminologii můžeme  $t^*$  volně interpretovat jako “střední hodnotu” a  $\Delta_w$  jako “směrodatnou odchylku” rozložení výkonu  $|w(t)|^2$  funkce (signálu)  $w(t)$ .

Substituce  $u = \frac{t-b}{a}$  v integrálech (6.2) a (6.3) dá pro  $w\left(\frac{t-b}{a}\right)$  střed  $b + at^*$  a poloměr  $a\Delta_w$ . Pak tedy waveletová transformace (5.6) lokalizuje signál  $x(t)$  v “časovém okně”

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi].$$

Je-li podobně  $f^*$  a  $\Delta_{\widehat{\psi}}$  pořadě střed a poloměr váhové funkce  $\widehat{\psi}$ , pak vzhledem k Besselově-Parsevalově identitě (4.7) přejde (5.6) při užití (4.12) a (4.13) v

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_\psi x)(b, a) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = |a|^{-\frac{1}{2}} |a| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f) \overline{e^{-i2\pi f b} \widehat{\psi}(af)} df = \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f) e^{i2\pi f b} \overline{\widehat{\psi}(af)} df, \end{aligned} \quad (6.4)$$

takže vzhledem k  $|e^{i2\pi f b} \overline{\widehat{\psi}(af)}| = |\widehat{\psi}(af)|$  tatáž veličina  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  lokalizuje frekvenční spektrum  $\widehat{x}(f)$  ve “frekvenčním okně”

$$\left[ \frac{f^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{f^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\widehat{\psi}} \right].$$

Celkem tedy dostáváme “časově-frekvenční okno”

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times \left[ \frac{f^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{f^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\widehat{\psi}} \right].$$

Věnujme nyní pozornost speciálnímu případu  $a = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , který se uplatňuje při rekonstrukci typu (3) a (4) v odst. 5. Dostaneme tak soubor frekvenčních oken

$$B_j = \left[ 2^j f^* - 2^j \Delta_{\widehat{\psi}}, 2^j f^* + 2^j \Delta_{\widehat{\psi}} \right], \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

Jestliže cíleně zvolíme  $\psi$  tak, aby střed  $f^*$  a poloměr  $\Delta_{\hat{\psi}}$  odpovídajícího frekvenčního okna  $\hat{\psi}$  byly svázány vztahem  $f^* = 3\Delta_{\hat{\psi}}$ , pak  $B_j = [2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2}\Delta_{\hat{\psi}}]$  rozdělují kladnou frekvenční osu  $[0, \infty)$  na disjunktní (s výjimkou krajních bodů) frekvenční pásma s délkou  $2^{j+1}\Delta_{\hat{\psi}}$  exponenciálně rostoucí v závislosti na  $j$ .

Potom užitím waveletové integrační transformace (5.6) zjistíme časové intervaly  $[b + 2^{-j}t^* - 2^{-j}\Delta_{\psi}, b + 2^{-j}t^* + 2^{-j}\Delta_{\psi}]$ , na nichž spektrální obsah signálu  $x$  s frekvencemi v pásmu  $B_j$  je signifikantní, tj. hodnota  $\tilde{x}(b, 2^{-j}) = |(\mathcal{W}_{\psi}x)(b, 2^{-j})|$  je nad jistou zvolenou prahovou hodnotou (threshold).

Základem jakési zobecněné waveletové filtrace signálu  $x$  je potom následující obecný postup:

- (1) Výpočet  $\tilde{x}(b, 2^{-j})$ , resp.  $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$
- (2) Vhodná modifikace těchto veličin na základě jejich signifikantnosti
- (3) Zpětná rekonstrukce modifikovaného signálu podle (5.16), resp. podle (5.2) nebo (5.22).

Modifikaci většinou provádíme s cílem signál **vyhladit**, tj. vyloučit z něj náhodnou šumovou složku. Ta ovšem nejvíce přispívá k vysokofrekvenčním komponentám signálu, které proto při modifikaci podle vhodné strategie potlačujeme. Je to zcela obdobný postup, jaký se používá při klasické fourierovské filtraci, kdy Fourierovy koeficienty  $c_j$  násobíme váhovou funkcí, tzv. **přenosovou charakteristikou filtru**, která klesá směrem k vysokým frekvencím, tj. postupně snižuje vliv koeficientů  $c_j$  s rostoucím  $|j|$ .

Při waveletové filtraci tedy postupujeme obdobně, ovšem s tím podstatným rozdílem, že při redukci  $c_{j,k}$  je vliv zhlazení pouze lokální v závislosti na zvoleném  $k$  a nikoliv globální jako je tomu při fourierovské filtraci. Waveletový filtr tedy poskytuje **významnou novou kvalitu** v tom, že se může **adaptovat** na lokální charakter signálu [1]. Tam kde signál vykazuje vyšší dynamiku, tj. nese užitečnou informaci ve vyšších frekvenčních pásmech, můžeme míru redukce vysokofrekvenčních komponent snížit (neboli snížit prahovou hodnotu signifikantnosti) a naopak postupovat v místech, kde se signál mění jen pozvolna. Tím odstraňuje hlavní nevýhodu fourierovské filtrace, která v takovém případě má tendenci dynamický úsek přehladit. To co je ovšem v tomto případě výhodou waveletové filtrace, může v jiné situaci působit potíže. Jestliže signál je zatížen silně nestacionárním šumem, pak úseky s vyšší mírou chybového rozptylu mohou být mylně považovány za dynamické a tedy nedostatečně vyhlazeny. Toto je ovšem spíše problém volby správné strategie vyhlazení, než waveletové filtrace jako takové.

Běžně se používají čtyři filtrační strategie pro modifikaci waveletových koeficientů využívající prahových hodnot (thresholding):

- (1) **Tvrdé prahování** (Hard thresholding)

Absolutní hodnoty všech waveletových koeficientů se porovnávají s pevnou prahovou hodnotou  $\lambda$ . Je-li velikost waveletového koeficientu menší než prahová hodnota, tak se vynuluje, jinak se ponechá beze změny:

$$c_{j,k}^{\text{hard}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } |c_{j,k}| < \lambda \\ c_{j,k} & \text{pro } |c_{j,k}| \geq \lambda \end{cases}.$$

- (2) **Měkké prahování** (Soft thresholding)

Všechny waveletové koeficienty se stejnoměrně posunou k nule o prahovou hodnotu  $\lambda$ :

$$c_{j,k}^{\text{soft}} = \text{sign}(c_{j,k}) \max(0, |c_{j,k}| - \lambda).$$

- (3) **Kvantilové prahování** (Quantile thresholding)

Podobné jako (1), místo  $\lambda$  se však použije kvantil z množiny všech waveletových koeficientů, tj. např. se vynuluje 30% nejmenších waveletových koeficientů.

#### (4) **Univerzální prahování** (Universal thresholding)

Donoho a Johnstone [3] navrhli globální prahovou hodnotu  $\lambda = \sigma\sqrt{2\log n}$  pro všechna  $j > j_0$ , kde  $j_0$  se vhodně zvolí podle charakteru dat,  $n$  je počet dat a  $\sigma$  je směrodatná odchylka náhodného bílého (nekorelovaného) šumu. Ukazuje se, že při použití této prahové hodnoty je přibližně minimalizováno riziko, že se liší od optimální (ale neznámé) prahové hodnoty. Dá se používat jak pro měkké, tak pro tvrdé prahování. Ukázka použití je na obr. 2. V článku [6] Johnstone a Silverman rozvíjí tento přístup dále i pro korelovaný šum.

Celou teorii je možno budovat i ve více dimenzích. V případě dvou dimenzí nachází uplatnění především při zpracování obrazů. Ukázka obrazové filtrace je na obr. 3, kde vlevo nahoře je originál fotografie Johna Lennona o velikosti  $256 \times 256$  pixelů s 0–255 úrovněmi šedi, vpravo nahoře je týž obrázek kontaminovaný silným gaussovským bílým šumem s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou 60. Dole je filtrace s použitím dvou různých waveletů Daubechiesové, kde bylo využito jenom 1,8% informace z rozmazaného obrázku! Přestože kvalita může být diskutabilní, je z tohoto pohledu výtečná. Tento příklad současně demonstruje použití waveletů při obrazové kompresi, kdy původních 527120 informačních bitů bylo redukováno na pouhých 9695. Tento velký kompresní poměr je umožněn tím, že podstatná informace zůstane koncentrována jenom do několika málo waveletových koeficientů. Díky lokalizaci v čase je možno dělat plošně selektivní kompresi, kdy po rekonstrukci si zachovávají vysokou kvalitu jenom zajímavé části obrazu (např. na rentgenovém snímku pouze oblast v blízkosti pozitivního nálezu).

Samozřejmě, že předchozí ukázky představují pouze zlomek možných aplikací, mnoho dalších lze nalézt např. v [7].

## 7. ZÁVĚR

Pokud si na závěr položíme otázku, zda se při analýze dat vyplatí používat wavelety či nikoli, pak odpověď samozřejmě závisí na typu zpracovávaných dat. Vzhledem k mnoha dobrým vlastnostem představují však rozhodně aparát, který není vhodné ignorovat. Jako žádná jiná metoda, nejsou ovšem ani wavelety univerzální všelék pro všechny typy úloh, ale v každém případě významně obohacují repertoár dosud běžně používaných technik. Dalšími nezanedbatelnými rysy, které hovoří ve prospěch waveletů, je myšlenková jednoduchost blízká zaběhaným fourierovským přístupům a v neposlední řadě také výpočetní efektivita. Velké soubory dat lze snadno a rychle transformovat pomocí **diskrétní waveletové transformace** (DWT), která je protějškem klasické **diskrétní Fourierovy transformace** (DFT) a stejně jako ona se vhodnou diskretizací obdrží z příslušných integrálních transformací. S takto získanými waveletovými koeficienty pak zacházíme zcela obdobně jako v případě DFT. Jestliže pro výpočet DFT existují rychlé algoritmy (FFT=Fast Fourier Transform) s výpočtovou složitostí řádu  $O(n \log_2(n))$ , pak v případě DWT složitost mnohdy klesá dokonce až na  $O(n)$ , tj. příslušná **rychlá waveletová transformace** (FWT=Fast Wavelet Transform) by mohla mít přívlastek “faster” (ještě rychlejší).

Existuje několik komerčních i nekomerčních podpůrných softwarových balíčků pro práci s wavelety, z nichž bych zmínil tyto:

#### **WavBox 4:**

Jedná se o komerční toolbox pro MATLAB, jehož starší verze jsou nekomerční a volně dostupné přes FTP. Autorem je Carl Taswell, Stanford University, USA. Jedná se o velmi bohatou knihovnu dodávanou vlastně ve zdrojovém tvaru (tzv. M-soubory

MATLABu), případně po dohodě s autorem i pro jiné jazyky (C, FORTRAN aj.). MATLAB je numerický výpočetní systém firmy MathWorks, Inc. (USA) a v České republice jej distribuuje firma HUMUSOFT, s.r.o. Praha.

### **S+WAVELETS:**

Komerční přídatný modul do statistického systému S-PLUS firmy StatSci a v tuzemsku je distribuován firmou Trilobyte, Ltd.

### **WAVETHRESH:**

Nekomerční knihovna v jazyce S (předchůdce S-PLUS), jejímiž autory jsou G. P. Nason a B. W. Silverman. Návod k instalaci a použití tohoto softwaru je v [10].

### **MICRONDE:**

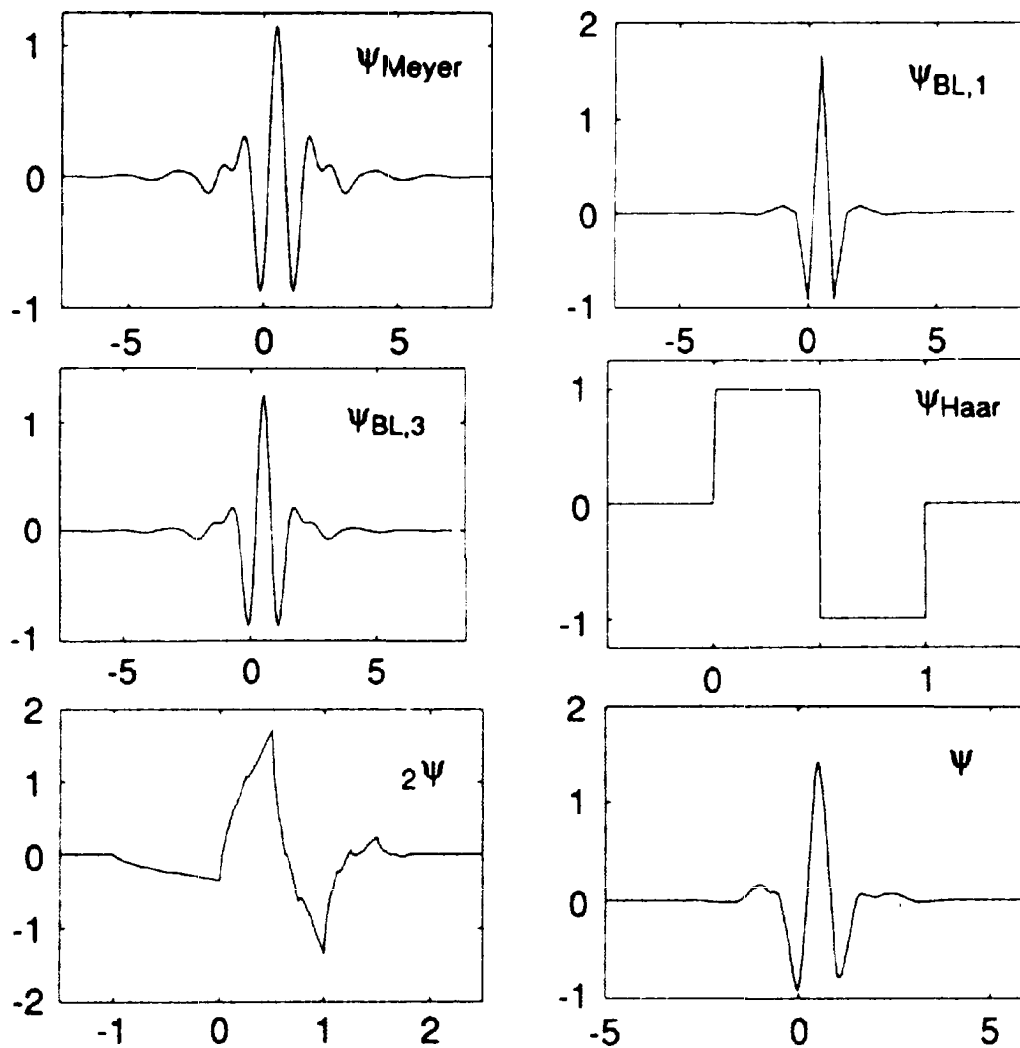
Komerční toolbox pro MATLAB [9]. Pochází z Francie a je orientován především na zpracování obrazů. Podle neoficiální informace autorů se v budoucnu uvažuje o jeho distribuci ve formě firemního toolboxu firmy MathWorks, Inc.

## LITERATURA

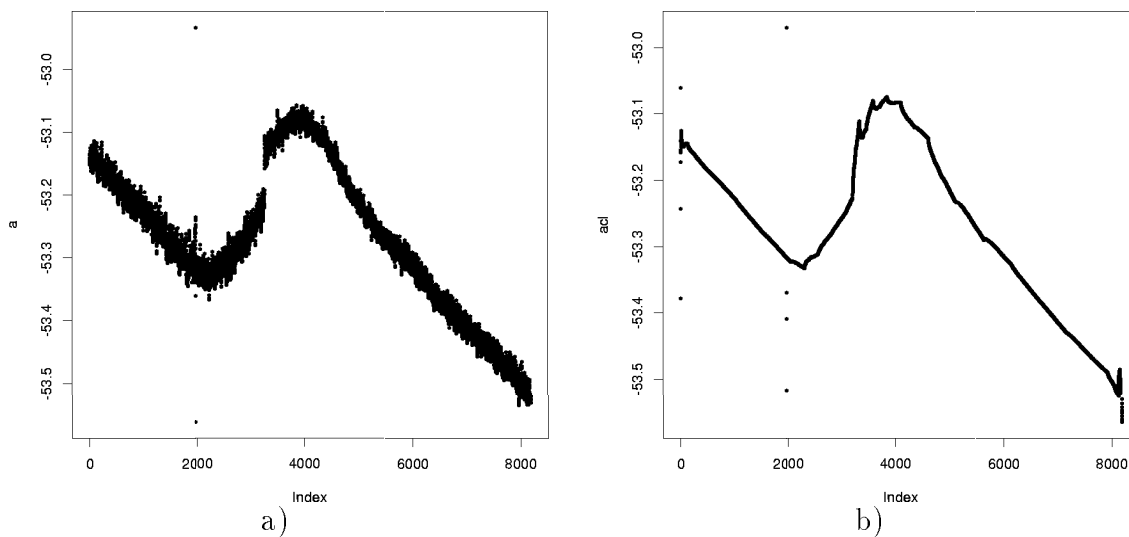
1. Felix Abramovich, Yoav Benjamini and Yosef Hochberg, *Adaptive thresholding of wavelet coefficients*, In: Abstracts of the conference "Wavelets and Statistics", Villard-de-Lans, France (Grenoble, France) (Anestis Antoniadis, ed.), XV Recontres Franco-Belges de Statisticiens, Université Pierre Mendès France et Laboratoire IMAG-LMC, November 1994.
2. Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
3. David L. Donoho and Iain M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage*, *Biometrika* **81** (1994).
4. Charles K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 1, Academic Press, Inc., Boston-San Diego-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1992.
5. \_\_\_\_\_, *Wavelets: A tutorial in theory and applications*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 2, Academic Press, Inc., Boston-San Diego-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1992.
6. Iain M. Johnstone and Bernard W. Silverman, *Wavelet threshold estimators for data with correlated noise*, Research report, Stanford University and Bristol University, Stanford CA 94305, Bristol BS8 1TW, September 1994, (available from anonymous FTP: ftp.statistics.bristol.ac.uk:/pub/reports/.../corerrs.ps.gz).
7. Yves Meyer, *Wavelets, algorithms & applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.
8. \_\_\_\_\_, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, London, 1992.
9. Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, *Un logiciel de traitement par ondelettes de signaux et d'images*, In: Abstracts of the conference "Wavelets and Statistics", Villard-de-Lans, France (Grenoble, France) (Anestis Antoniadis, ed.), XV Recontres Franco-Belges de Statisticiens, Université Pierre Mendès France et Laboratoire IMAG-LMC, November 1994, French.
10. Guy P. Nason and Bernard W. Silverman, *The Discrete Wavelet Transform in S*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **3** (1994), 163–191, (available from anonymous FTP: ftp.statistics.bristol.ac.uk:/pub/reports/.../tdwtis.ps.gz).
11. Stefan Pittner, Josef Schneider and Christoph W. Ueberhuber, *Wavelet literature survey*, Technical University Vienna, Wien, Austria, 1993.
12. Gilbert G. Walter, *Wavelets and other orthogonal systems with applications*, CRC Press, Boca Raton-Ann Arbor-London-Tokyo, 1994.

KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY, MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ, JANÁČKOVO NÁM. 2A,  
662 95 BRNO

*E-mail address:* vesely@math.muni.cz



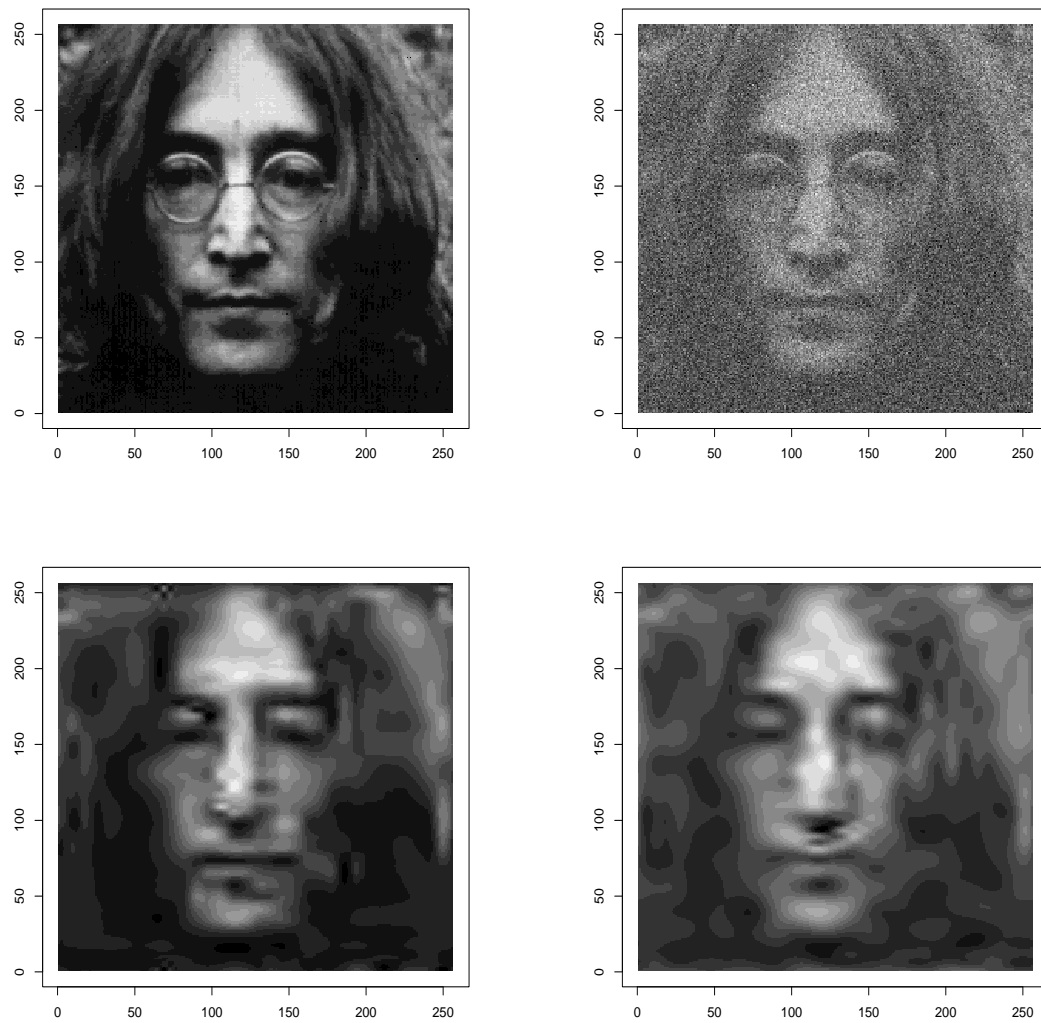
OBR. 1. Ukázky ortogonálních waveletů



OBR. 2. 8192 hodinových měření úrovně vodní hladiny během jednoho roku při zemětřesení v Kalifornii.

a) naměřená data

b) data po vyhlazení univerzálním prahováním při použití waveletů Daubechiesové



OBR. 3. Waveletová rekonstrukce obrazu