

VÍTĚZSLAV VESELÝ

ABSTRAKT. Wavelety představují moderní aparát pro efektivní analýzu dat, který přenáší postupy klasické Fourierovy analýzy periodických funkcí na obecný neperiodický případ. Na rozdíl od Fourierovy řady, která vyjadřuje data jako směs harmonických sinusových kmitů, v případě waveletové řady se jedná o směs tlumených kmitů (=vlnka=wavelet angl.) s měnící se šířkou a polohou. Základní teoretické principy budou vyloženy v kontextu s klasickými přístupy a demonstrovány při praktickém zpracování simulovaných i reálných dat.

1. ÚVOD

Teorie “waveletů” je relativně novou oblastí aplikované matematiky s počátky sahajícími do let 1982–84. Její kořeny však nejsou jen čistě matematické, ale nachází se na pomezí matematiky, fyziky a technických věd (zejména zpracování signálů). Odtud také pramení obrovská šíře jejích aplikací, které nachází především při zpracování a analýze dat nejrůznějšího původu (telekomunikace, radarová a sonarová technika, komprese a kódování, seismika, geofyzika, biomedicína, zpracování řeči a obrazů, aj.), ale i v numerické matematice (aproximace funkcí, numerické řešení diferenciálních rovnic, aj.).

Ke studiu teorie waveletů a jejích aplikací je k dispozici celá řada anglicky psaných monografií, např. [1, 5, 6, 7, 8, 11, 15], které vesměs předpokládají u čtenáře dosti vysokou úroveň matematických znalostí, a to především z oblasti klasické Fourierovy analýzy.

Tento příspěvek navazuje na obdobně zaměřené pojednání [14] ze sborníku minulého semináře ANALÝZA DAT 95/II, kde byl podán stručný matematický úvod do teorie waveletů budující potřebné abstraktní matematické zázemí postupně intuitivně z elementárních matematických pojmů. Úvodem připomeneme hlavní princip waveletů v analogii s klasickou Fourierovou analýzou. V dalším se pak soustředíme především na praktické otázky spojené s waveletovou analýzou dat. Zařazen je také odstavec **MR-analýza** (z angl. *multiresolution analysis* (MRA), což lze volně přeložit jako *analýza o více úrovních rozlišení*). Tato metoda je výpočetně velmi atraktivní, neboť umožňuje jednoduchou aplikací vhodné dvojice lineárních filtrů postupně snižovat, resp. zvyšovat rozlišovací schopnost waveletové aproximace. Použití nachází zejména ve dvou dimenzích, kde je základem tzv. pyramidálního algoritmu komprese a dekomprese obrazů.

Připomeňme nejprve některé základní pojmy zavedené již v [14, odst. 3].

Označení.

\mathbb{N} ... množina všech přirozených čísel.

\mathbb{Z} ... množina všech celých čísel.

\mathbb{R} ... množina všech reálných čísel.

\mathbb{C} ... množina všech komplexních čísel.

$\delta_{i,j}$... Kroneckerův symbol (= 1 pro $i = j$ a nula jinak).

$s :=$ výraz, resp. výraz $:= s$... označení výrazu symbolem s .

¹Vytištěno ve sborníku celostátní konference ANALÝZA DAT'97 (ed. ing. K. Kupka, TriloByte, s.r.o. Pardubice) konané 4.–7. 11. 1996 v hotelu Technik, Lázně Bohdaneč u Pardubic

Datum: 26. listopadu 1997.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory Grantové Agentury České Republiky, reg. číslo grantu 201/96/0665.

Budeme pracovat obecně s komplexními funkcemi (periodickými i neperiodickými) definovanými na celé reálné ose, např. $x := x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Většinou se bude jednat o funkce s jistými vcelku přirozenými vlastnostmi. Uvedeme označení pro dvě takové třídy funkcí:

$L_1(\mathcal{J})$... funkce $x(t)$ **absolutně integrovatelné** (v Lebesgueově smyslu) na intervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$. Jejich velikost měříme tzv. L_1 -normou:
 $\|x\|_1 := \int_{\mathcal{J}} |x(t)| dt < \infty$.

$L_1 := L_1(\mathbb{R})$.

$L_2(\mathcal{J})$... funkce $x(t)$ **měřitelné a absolutně integrovatelné v kvadrátu** (v Lebesgueově smyslu) na intervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$. Pro každé dvě takové funkce $x(t), y(t)$ je definován jejich **vnitřní součin** integrálním vztahem:

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathcal{J}} x(t)y(t) dt,$$

který je obdobou skalárního součinu vektorů v euklidovském prostoru. Zejména tedy $\langle x, y \rangle = 0$ značí $x \perp y$, tj. funkce $x(t)$ je kolmá neboli **ortonormální** na funkci $y(t)$. Jejich velikost měříme tzv. L_2 -normou, která je obdobou euklidovské normy pro vektory:

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} < \infty.$$

Interpretujeme-li funkci x jako signál (spojité měření, resp. pozorování nějakých dat), pak hodnota $\|x\|^2$ je úměrná energii signálu, tj. L_2 představuje třídu všech signálů o konečné energii. Skutečně, uvažujme elektrický signál o napětí $U(t)$ a proudu $I(t)$ měřený během nějakého časového intervalu \mathcal{J} na odporu R . Pak $W(t) = U(t)I(t) = U(t)(U(t)/R) = U(t)^2/R$ je okamžitý výkon měřený v čase $t \in \mathcal{J}$ a tedy integrální suma $(\int_{\mathcal{J}} |W(t)|^2 dt)/R$ odpovídá energii tohoto signálu na celém intervalu \mathcal{J} .

$L_2 := L_2(\mathbb{R})$.

Podobně pro posloupnosti $\{x_i\} := \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i \in \mathbb{C} \forall i \in \mathbb{N}$ (místo přirozenými čísly budeme v dalším také někdy indexovat celými čísly) zavádíme označení:

ℓ_2 ... posloupnosti $\{x_i\}$ **absolutně sumovatelné** v kvadrátu, tj. s konečnou ℓ_2 -normou:

$$\|\{x_i\}\| := \|\{x_i\}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} < \infty.$$

$L_1(\mathcal{J})$ i $L_2(\mathcal{J})$ (podobně ℓ_2) jsou uzavřené na sčítání, resp. odčítání a násobení (komplexním) skalárem a tvoří tedy vektorový prostor (viz [14, odst. 3]).

Prostor $L_2(\mathcal{J})$ má spočetnou dimenzi. Jeho **bázi** budeme rozumět spočetnou podmnožinu funkcí $E = \{e_1, e_2, \dots\} \subset L_2(\mathcal{J})$, která jej generuje tak, že každou funkci $x(t) \in L_2(\mathcal{J})$ lze jediným způsobem a bez ohledu na pořadí vyjádřit jako (spočetnou) lineární kombinaci $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i(t)$ v L_2 -konvergenci, tj. $\|x - x_N\| \rightarrow 0$, kde $x_N(t) = \sum_{i=1}^N x_i e_i(t)$ značí N -tý částečný součet. Píšeme $L_2(\mathcal{J}) = \overline{\mathcal{L}(E)}$. Jednoznačně určená čísla x_i se nazývají souřadnice $x(t)$ v bázi E . V [14, Věta 3.4] jsme ukázali, že **ortonormální systém** E ($e_i \perp e_j$ pro $i \neq j$ a $\|e_i\| = 1$ pro $\forall i, j \in \mathbb{N}$) tvoří bázi právě když platí tzv. **Parsevalova identita**:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|\{x_i\}\|^2, \text{ kde } x_i = \langle x, e_i \rangle \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definice . Báze E se nazývá **Rieszovou bází prostoru** $L_2(\mathcal{J})$, jestliže existují konstanty A, B , $0 < A \leq B < \infty$ tak, že pro každou funkci $x \in L_2(\mathcal{J})$, $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i(t)$ takovou, že $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_2$, platí

$$A\|\{x_i\}\|^2 \leq \|x\|^2 \leq B\|\{x_i\}\|^2.$$

Platí následující tvrzení

Tvrzení 1.1. *Ke každé Rieszově bázi $E = \{e_1, e_2, \dots\} \subset L_2(\mathcal{J})$ existuje jediná tzv. duální Rieszova báze $E^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots\} \subset L_2(\mathcal{J})$, která je biortogonální k E v tom smyslu, že $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}$. Zejména tedy souřadnice x_i jsou podobně jako v ortonormálním případě jednoznačně určeny vztahem $x_i = \langle x, e_i^* \rangle$.*

Vidíme, že ortonormální báze je speciálním případem Rieszovy báze pro $A = B = 1$ a $E^* = E$. Rieszova báze představuje tedy jakousi *skoro ortonormální bázi*, neboť není požadována striktní platnost Parsevalovy identity. Totiž $\|x\|^2$ se může pohybovat v rozmezí vymezeném konstantami A a B .

2. FOURIEROVA A WAVELETOVÁ ŘADA

Z matematického pohledu představuje waveletová analýza přímou analogii klasické Fourierovy analýzy T -periodických funkcí v $L_2([a, b])$, $b - a = T$, použitou na případ neperiodických funkcí z $L_2 := L_2(\mathbb{R})$. Fourierově řadě, která představuje vyjádření T -periodické funkce ve spočetné ortonormální bázi (indexované celými čísly) $\{w(jt)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ harmonických kmitů odvozených z komplexní sinusové vlny $w(t) = e^{i2\pi t/T} / \sqrt{T} = (\cos 2\pi t/T + i \sin 2\pi t/T) / \sqrt{T}$ pouhou změnou měřítka (frekvence) v závislosti na j , odpovídá tzv. **waveletová řada** jakožto rozvoj neperiodické funkce ve vhodné spočetné bázi opět určené jedinou funkcí $\psi(t)$ nazývanou **mateřský wavelet**. Protože $w(t)$ je funkce mající konečnou energii pouze na ohraničeném intervalu ($\int_a^b |w(t)|^2 dt < \infty$), je třeba hledat $\psi \neq w$, která má konečnou energii na celé reálné ose. Taková funkce však musí vymizet k nule pro $t \rightarrow \pm\infty$ a dokonce se ukazuje, že za dodatečného předpokladu integrovatelnosti (tj. $x \in L_1 \cap L_2$) musí měnit i znaménko, tj. ψ musí být tlumený kmit neboli **vlnka (=wavelet)**. V důsledku tohoto tlumení, které může být dokonalé v tom smyslu, že ψ je nenulová pouze na ohraničeném intervalu (říkáme, že má kompaktní nosič), nestačí generovat bázi pouhou změnou měřítka mateřského waveletu, ale navíc je nutné jej i posouvat. Waveletová báze se pak dostane jako spočetný dvojnásobně celými čísly indexovaný systém $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, kde $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi\left(\frac{t-k2^{-j}}{2^{-j}}\right)$ a $2^{j/2}$ je normalizační konstanta zajišťující konstantní (jednotkovou) normu $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\|$. V závislosti na vlastnostech obdržené waveletové báze (není jediná) se pak provádí klasifikace příslušného mateřského waveletu.

Definice . Označme $E = \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Mateřský wavelet ψ se nazývá

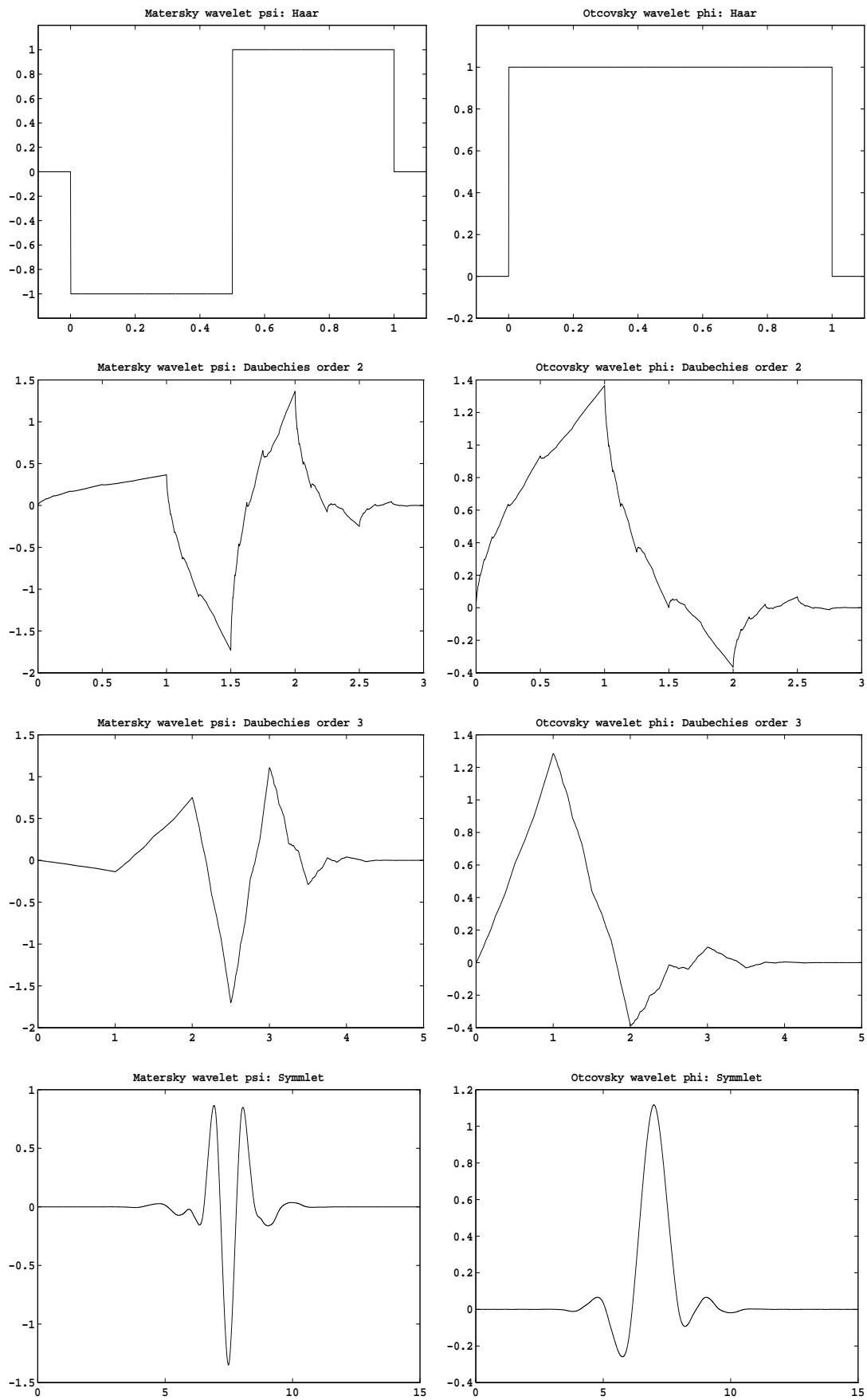
- (1) **ortogonální**, jestliže E je ortonormální báze v L_2 :
 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$;
- (2) **semiortogonální**, jestliže E je Rieszova báze v L_2 a platí:
 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0$ pro $j \neq l$;
- (3) **biortogonální**, jestliže E je Rieszova báze v L_2 a existuje tzv. **duální wavelet** $\psi^*(t)$ takový, že $E^* = \{\psi_{l,m}^*\}_{l,m \in \mathbb{Z}}$ je duální Rieszova báze k E (ze symetrie plyne také, že ψ je duální k ψ^*);

Mateřský wavelet ψ se nazývá **waveletem s kompaktním nosičem (compactly supported wavelet)**, jestliže $\{t \mid \psi(t) \neq 0\}$ je ohraničená množina.

Podle 1.1 je zřejmé (1) speciálním případem (3), kde $\psi^* = \psi$. Zejména tedy každý ortogonální wavelet je semiortogonální i biortogonální.

Ukázky některých ortogonálních waveletů ψ jsou na obr. 1a). Zatímco historicky nejstarším z nich je tzv. Haarův wavelet (nahore), zbývající jsou novějšího data — wavelety Daubechiesové s postupně rostoucím stupněm hladkosti.

Každá funkce $x \in L_2([a, b])$, $b - a = T$ je součtem své **Fourierovy řady**:



a) mateřský wavelet

b) otcovský wavelet

OBRÁZEK 1. Ukázky ortogonálních waveletů

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{j}{T}t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{j}{T}t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i2\pi \frac{j}{T}t}, \quad (2.1)$$

kde

$$c_j := c_j(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle x, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^b x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i2\pi \frac{j}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_a^b x(t) e^{-i2\pi \frac{j}{T}t} dt \quad (2.2)$$

je tzv. j -tý **Fourierův koeficient** a $\{c_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je tzv. **fourierovské spektrum** funkce $x(t) \in L_2([a, b])$.

Podobně každá funkce $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ je součtem své **waveletové řady**

$$x(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (2.3)$$

kde v případě biortogonálního, resp. ortogonálního mateřského waveletu ($\psi^* = \psi$) a vzhledem k tvrzení 1.1

$$c_{j,k} := c_{j,k}(x) = \langle x, \psi_{j,k}^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_{j,k}^*(t)} dt = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi^*\left(\frac{t - k2^{-j}}{2^{-j}}\right)} dt. \quad (2.4)$$

je tzv. (j, k) -tý **waveletový koeficient** a $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je tzv. **waveletové spektrum** funkce $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$.

Konvergence Fourierovy, resp. waveletové řady je v normě prostoru $L_2([a, b])$, resp. $L_2(\mathbb{R})$, tj.

$$\begin{aligned} \|x - x_N\| &\rightarrow 0 \quad \text{pro } N \rightarrow \infty \\ \|x - x_{N,M}\| &\rightarrow 0 \quad \text{pro } N, M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pro částečné součty

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{j=-N}^N c_j e^{i2\pi \frac{j}{T}t} \\ x_{N,M}(t) &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-M}^M c_{j,k} \psi_{j,k}(t). \end{aligned}$$

Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme psát stručně c_j místo $c_j(x)$ a $c_{j,k}$ místo $c_{j,k}(x)$.

Z vyjádření waveletových koeficientů lze vhodným infinitesimálním přechodem odřízt tzv. **integrální waveletovou transformaci**, která je opět analogií Fourierovy transformace získané z vyjádření pro Fourierovy koeficienty při $T \rightarrow \infty$ (viz [14, odst. 5]). Existence inverzní waveletové transformace však vyžaduje, aby wavelet ψ , který je jádrem této transformace splňoval tzv. **podmínku přípustnosti**, resp. silnější **podmínku stability**. Jádro ψ se pak nazývá **základní**, resp. **dyadický** wavelet.

Při zpracování diskrétních dat dostaneme opět příslušné operátory **diskrétní waveletové transformace (DWT)** jako analogie diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a rychlé algoritmy pro jejich výpočet (FWT=Fast Wavelet Transform jako analogie FFT=Fast Fourier Transform).

Formulace problému

Uvažujme aditivní model

$$y(t) = x(t) + e(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $y(t)$ jsou pozorované hodnoty, $x(t) \in L_2$ je neznámá odhadovaná funkce a $e(t)$ je bílý šum. V diskrétním případě $y(t)$ jsou ovšem pozorovány pouze na konečné diskrétní většinou ekvidistantní síti $t = t_1, t_2, \dots, t_n$.

Vzhledem k linearitě (2.4) dostáváme

$$c_{j,k}(y) = c_{j,k}(x) + c_{j,k}(e)$$

kde $c_{j,k}(y)$, $c_{j,k}(x)$ a $c_{j,k}(e)$ jsou waveletové koeficienty pořadě ve waveletových řadách pro $y(t)$, $x(t)$ a $e(t)$. Cílem waveletového vyhlazování je nalezení vhodného modifikačního předpisu $\mu(\cdot)$ takového, že $\mu(c_{j,k}(y)) = \widehat{c}_{j,k}(x) \approx c_{j,k}(x)$ je dobrým odhadem $c_{j,k}(x)$. Tento přístup představuje opět analogii s fourierovskou filtrací, kde modifikujeme Fourierovy koeficienty $c_j(y)$. Důležitým speciálním případem je **lineární filtrace**, kde $\mu(c_j(y)) = \mu_j c_j(y)$, $\mu_j \geq 0$ a $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je tzv. **přenosová charakteristika filtru**. Pro pevné k je příspěvek každého koeficientu $c_{j,k}(y)$ pouze lokální, takže waveletová reprezentace dovoluje tímto způsobem konstruovat **lokálně adaptivní** filtry, což je její vynikající **nový rys** ve srovnání s klasickými fourierovskými filtry, kde efekt je globální.

Běžně se používají čtyři modifikační techniky pro waveletové koeficienty. První z nich operuje na datech (koeficientech) lineárně, zbývající tři nelineárně.

1. Positive scaling

$$\widehat{c}_{j,k}^{\text{pos}} = \mu_{j,k} c_{j,k}(y), \quad \mu_{j,k} \geq 0,$$

která je přímým zobecněním výše zmíněné přenosové charakteristiky.

2. Tvrdé prahování (hard thresholding)

Všechny waveletové koeficienty pod jistou prahovou hodnotou $\lambda > 0$ se vynulují a ostatní se ponechají beze změny:

$$\widehat{c}_{j,k}^{\text{hard}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } |c_{j,k}| < \lambda \\ c_{j,k} & \text{pro } |c_{j,k}| \geq \lambda \end{cases}.$$

3. Měkké prahování (soft thresholding)

Velikosti všech waveletových koeficientů se sníží o prahovou hodnotu $\lambda > 0$:

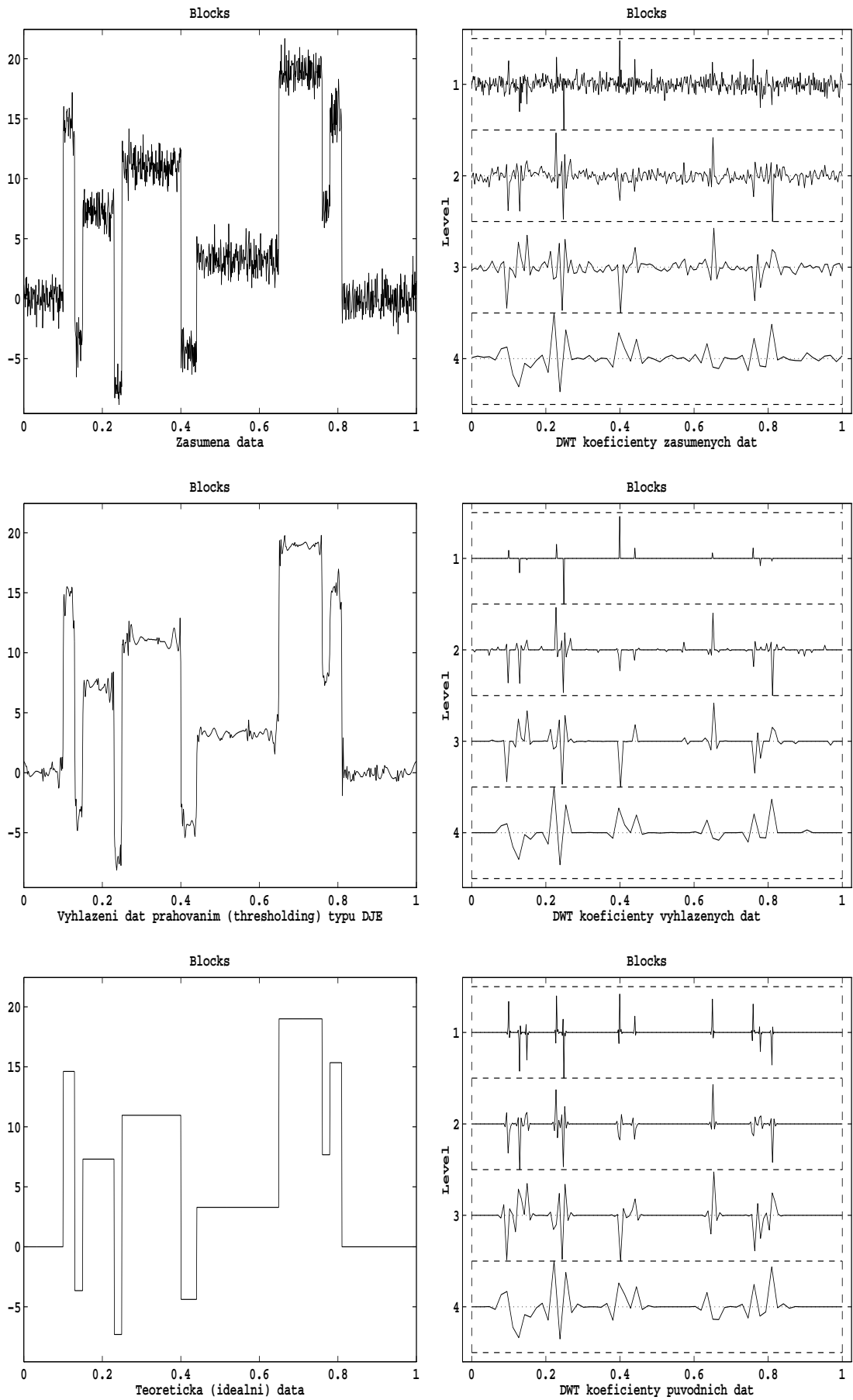
$$\widehat{c}_{j,k}^{\text{soft}} = \text{sign}(c_{j,k}) \max(0, |c_{j,k}| - \lambda).$$

4. Kvantilové prahování (quantile thresholding)

Podobné jako (2), místo λ se však použije kvantil z množiny všech waveletových koeficientů, tj. např. se vynuluje 30% nejmenších waveletových koeficientů.

Donoho a Johnstone [2, 3, 4] navrhli metodu pro v jistém smyslu optimální volbu prahové hodnoty λ , která je buď univerzální nebo specifická pro každou úroveň měřítka j ($\lambda = \lambda_j$). Tyto a jiné podobné metody se staly známými pod anglickými názvy **wavelet shrinkage** nebo **wavelet de-noising**.

Při praktických výpočtech ovšem $c_{j,k}$ počítáme pomocí DWT s využitím vhodného rychlého algoritmu FWT.



OBRÁZEK 2. Ukázka vyhlazení měkkým prahováním

Na obr. 2 je ukázka waveletového vyhlazení signálu s nespojitými skoky kontaminovaného simulovaným šumem. V levém sloupci jsou odshora dolů uvedeny pořadě data zašuměná, vyhlazená a originální bez šumu. V pravém sloupci jsou grafy odpovídajících waveletových koeficientů, kde k je vyneseno na vodorovné ose a j na svislé ose (číslo 1 odpovídá maximální úrovni). Pro vyhlazení bylo použito Donoho-Johnstonova měkkého prahování. Nespojitě skoky jsou velmi dobře zachyceny s podstatně menším zkreslením (rozvlněním v důsledku tzv. Gibbsova jevu) než by tomu bylo v případě klasické fourierovské filtrace.

Další ukázky waveletového vyhlazování dat z oblasti životního prostředí lze nalézt v [13].

4. MR-ANALÝZA

MR-analýza, neboli analýza o více úrovních rozlišení (z angl. multiresolution analysis), umožňuje jednoduchou aplikaci vhodné dvojice lineárních filtrů postupně snižovat, resp. zvyšovat rozlišovací schopnost waveletové aproximace.

Nechť ψ je nějaký mateřský wavelet (ortogonální, semiortogonální nebo biortogonální). Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ uvažujme (uzavřené) podprostory v L_2 generované těmito částečnými součty waveletové řady:

$$W_j = \overline{\mathcal{L}\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}} = \{g_j(t) \mid g_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)\} \quad (4.1)$$

a

$$V_j = \overline{\mathcal{L}\{\psi_{i,k}\}_{i,k \in \mathbb{Z}, i < j}} = \{x_j(t) \mid x_j(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{i,k} \psi_{i,k}(t)\}. \quad (4.2)$$

Protože waveletový rozvoj (2.3) libovolné funkce $x \in L_2$ lze přepsat jako

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(t), \text{ kde } g_j \in W_j, \quad (4.3)$$

přičemž $g_j \in W_j$ jsou zřejmě určeny jednoznačně, můžeme celý prostor L_2 psát jako přímý součet ($\dot{+}$) podprostorů W_j

$$L_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \cdots \quad (4.4)$$

Je-li mateřský wavelet ψ ortogonální nebo semiortogonální, pak zřejmě $W_i \perp W_j$ (podprostory jsou k sobě kolmé) pro $i \neq j$ a přímý součet (4.4) přejde v ortogonální součet (\oplus):

$$L_2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \quad (4.5)$$

Platí následující tvrzení

Tvrzení 4.1. *Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí*

$$V_j = \overline{\mathcal{L}(\cup_{i=-\infty}^{j-1} W_i)} = \sum_{i=-\infty}^{j-1} W_i = \cdots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1} \quad (4.6)$$

a systém podprostorů $\{V_j\} := \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ má následující vlastnosti:

1° $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots$ neboli $V_{j-1} \subset V_j$, $j \in \mathbb{Z}$

- 2° $\overline{\mathcal{L}(\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j)} = L_2$
 3° $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
 4° $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$, resp. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $j \in \mathbb{Z}$
 5° $x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2t) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$ [$\Rightarrow (x(t) \in V_0 \Leftrightarrow x(2^j t) \in V_j)$, $j \in \mathbb{Z}$].

Důkaz. Rovnice (4.6) a vlastnosti 1° – 4° jsou zřejmé. Vlastnost 5° plyne z následující identity

$$\psi_{j,k}(2^s t) = 2^{-\frac{s}{2}} 2^{\frac{j+s}{2}} \psi(2^j(2^s t) - k) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi_{j+s,k}(t); \quad j, k, s \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Pak totiž $x(t) \in V_j \Rightarrow x(t)$ je lineární kombinací $\psi_{i,k}(t)$, $i \leq j-1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$ je lineární kombinací $\psi_{i,k}(2^s t)$, $i \leq j-1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$ je lineární kombinací $\psi_{i+s,k}(t)$, $i \leq j-1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$ je lineární kombinací $\psi_{n,k}(t)$, $n \leq j+s-1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t) \in V_{j+s}$. Implikaci \Rightarrow pak dostaneme pro $s = 1$ a implikaci \Leftarrow pro $s = -1$.

Definice . Řekneme, že funkce $\phi(t) \in L_2$ **generuje MR-analýzu** $\{V_j\}$ v L_2 , jestliže generuje posloupnost podprostorů $\{V_j\}$ s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a 5° předpisem

$$V_j = \overline{\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \quad \text{kde } \phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = 2^{\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - k2^{-j}}{2^{-j}}\right), \quad (4.8)$$

přičemž $E_0 = \{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je Rieszovou bází podprostoru V_0 . Snadno se ověří, že pak také $E_j = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ jsou Rieszovy báze V_j pro každé $j \in \mathbb{Z}$. Funkci $\phi(t)$ nazýváme **funkcí měřítka (scaling function) pro MR-analýzu** $\{V_j\}$. Zřejmě podobně jako pro ψ platí $\|\phi\| = \|\phi_{j,k}\| = 1$ pro každé $j, k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení 4.2. *Jestliže $\phi \in L_2$ generuje MR-analýzu $\{V_j\}$, pak*

$$6^\circ \quad x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(t + 2^{-j}) \in V_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Důkaz. 6° plyne podobně jako 5° v důkazu tvrzení 4.1 z identity

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t + s2^{-j}) &= 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j(t + s2^{-j}) - k) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - (k - s)) \\ &= \phi_{j,k-s}(t); \quad j, k, s \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (4.9)$$

pro $s = \pm 1$.

Poznámka . Dá se ukázat (viz [5, str. 121]), že

$$\text{a) } 6^\circ \Rightarrow 3^\circ$$

$$\text{b) } 6^\circ \Rightarrow 4^\circ \text{ v tom smyslu, že pro každé } j \text{ existuje } W_j \text{ takové, že } V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j.$$

Nemusí však existovat funkce ψ , která tyto W_j generuje vztahem (4.1). V důsledku toho se při definici MR-analýzy a funkce měřítka někdy místo 1°, 2°, 3°, 5° předpokládá platnost 1°, 2°, 5° a 6°, takže potom MR-analýza $\{V_j\}$ v L_2 má všechny vlastnosti 1° – 6°. Zde budeme však vždy předpokládat navíc (4.1). V tomto případě se někdy funkce měřítka ϕ nazývá **otcovský wavelet (father wavelet)**, neboť s mateřským waveletem ψ tvoří přirozenou dvojici. Říkáme pak také, že dvojice (ϕ, ψ) **generuje v L_2 MR-analýzu** $\{V_j\}$. Ukázky dvojic (ϕ, ψ) jsou na obr. 1, kde mateřský wavelet je ve sloupci a) a odpovídající otcovský wavelet ve sloupci b).

Nechť (ϕ, ψ) generují MR-analýzu $\{V_j\}$ v L_2 . Podle (4.2) a (4.3) je $x_j(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} g_i(t) \approx x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i(t)$ pro každou funkci $x \in L_2$.

Přitom $x_j \in V_j \Rightarrow x_j \xrightarrow{L_2} x$ pro $j \rightarrow \infty$.

Tedy $x_j \in V_j$ aproximuje x až do $(j-1)$ -té úrovně rozlišení neboli vzhledem k [14, vztah (6.5)] zachycuje frekvenční obsah až do pásma B_{j-1} včetně. Tedy

$$j \rightarrow \infty \Rightarrow \text{přesnější aproximace (jemněji zachycuje variabilitu)}$$

$$j \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{hrubší aproximace (ztráta energie modelující variabilitu — rozmazání)}$$

Dostáváme následující vztahy:

$$x_j \in V_j \Rightarrow x_j(t) \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \phi(2^j t - k); \quad c^j := \{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

$$g_j \in W_j \Rightarrow g_j(t) \stackrel{(4.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi(2^j t - k); \quad d^j := \{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.11)$$

$$4^\circ \Rightarrow x_j(t) = x_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.12)$$

kde posloupnosti souřadnic c^j a d^j jsou jednoznačně určeny, neboť $\underbrace{\{\phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}_{2^{-\frac{j}{2}} \phi_{j,k}}$ a

$\underbrace{\{\psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}_{2^{-\frac{j}{2}} \psi_{j,k}}$ tvoří Rieszovu bázi pořadě ve V_j a W_j .

Dekompozice v MR-analýze (výpočet c^{j-1} a d^{j-1} pomocí c^j)

Při dekompozici snižujeme úroveň rozlišení o jedna. K tomu bude potřeba vyjádřit $\phi(2^j t - k) \in V_j$ z (4.10) ve tvaru (4.12).

Tvrzení 4.3. *Existují posloupnosti $a := \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, b := \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ takové, že platí*

$$\underbrace{\phi(2t - l)}_{\in V_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{a_{2k-l} \phi(t - k)}_{\in V_0} + \underbrace{b_{2k-l} \psi(t - k)}_{\in W_0} \right] \quad \forall l \in \mathbb{Z} \quad a \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Důkaz. Tvrzení zřejmě platí pro $l \in \{0, 1\}$, neboť $\phi(2t - l) \in V_1$ a tedy při $j = 1$ existuje podle (4.10)–(4.12) vyjádření

$$\begin{aligned} \phi(2t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m} \phi(t - m) + b_{2m} \psi(t - m)] \quad \text{pro } l = 0 \\ \phi(2t - 1) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m-1} \phi(t - m) + b_{2m-1} \psi(t - m)] \quad \text{pro } l = 1. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že (4.13) platí pro libovolné $l \in \mathbb{Z}$.

a) $l = 2r$ sudé:

$$\begin{aligned} \phi(2t - l) &= \phi(2(t - r)) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m} \phi(t - r - m) + b_{2m} \psi(t - r - m)] = \\ &\stackrel{k=r+m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-2r} \phi(t - k) + b_{2k-2r} \psi(t - k)]. \end{aligned}$$

b) $l = 2r + 1$ liché:

$$\begin{aligned} \phi(2t - l) &= \phi(2(t - r) - 1) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m-1} \phi(t - r - m) + b_{2m-1} \psi(t - r - m)] = \\ &\stackrel{k=r+m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-2r-1} \phi(t - k) + b_{2k-2r-1} \psi(t - k)]. \end{aligned}$$

Důsledek 4.4. Platí tzv. **dekompoziční vztah (decomposition relation)**:

$$\underbrace{\phi(2^j t - l)}_{\in V_j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{[a_{2k-l} \phi(2^{j-1} t - k) + b_{2k-l} \psi(2^{j-1} t - k)]}_{\in V_{j-1}} \quad \forall j, l \in \mathbb{Z} \text{ a } t \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Důkaz. Plyne z (4.13), jestliže za t dosadíme $2^{j-1}t$.

Tvrzení 4.5 (Algoritmus dekompozice: výpočet c^{j-1} a d^{j-1} pomocí c^j).
Pro c^j a d^j ze (4.10) a (4.11) platí následující rekurentní vztah:

$$c_k^{j-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{2k-l} c_l^j \stackrel{2k-l=n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n c_{2k-n}^j \quad (4.15)$$

$$d_k^{j-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{2k-l} c_l^j \stackrel{2k-l=n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n c_{2k-n}^j, \quad (4.16)$$

kde $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jsou posloupnosti z dekompozičního vztahu (4.14).

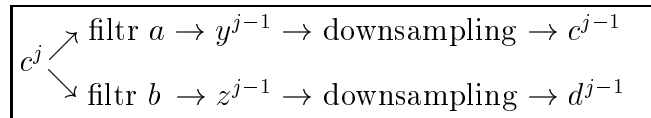
Důkaz.

$$\begin{aligned} x_j(t) &\stackrel{(4.10)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j \phi(2^j t - l) \stackrel{(4.14)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-l} \phi(2^{j-1} t - k) + b_{2k-l} \psi(2^{j-1} t - k)] = \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{2k-l} c_l^j \right)}_{c_k^{j-1}} \phi(2^{j-1} t - k) + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{2k-l} c_l^j \right)}_{d_k^{j-1}} \psi(2^{j-1} t - k) \\ &\qquad\qquad\qquad x_{j-1}(t) \qquad\qquad\qquad g_{j-1}(t) \end{aligned}$$

z jednoznačnosti rozkladu (4.12) a posloupností souřadnic c^{j-1} a d^{j-1} .

Označíme-li $y^{j-1} = \{y_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ a $z^{j-1} = \{z_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ pro každé $j \in \mathbb{Z}$, pak (4.15) a (4.16) definují dva lineární konvoluční filtry pořadě s impulzními odezvami a a b pro výpočet $y^{j-1} = a * c^j$ a $z^{j-1} = b * c^j$, kde $*$ je symbol operátoru lineární konvoluce. Po vynechání hodnot s lichými indexy (tzv. downsampling) dostáváme $c_k^{j-1} = y_{2k}^{j-1}$ a $d_k^{j-1} = z_{2k}^{j-1}$.

Schématicky tedy můžeme algoritmus dekompozice znázornit takto:



Rekonstrukce v MR-analýze (výpočet c^j pomocí c^{j-1} a d^{j-1})

Při rekonstrukci naopak zvyšujeme úroveň rozlišení o jedna. K tomu bude potřeba vyjádřit $\phi(2^{j-1}t - k)$ a $\psi(2^{j-1}t - k)$ z (4.10) a (4.11) pomocí $\phi(2^j t - k)$.

Tvrzení 4.6. Existují posloupnosti $p := \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $q := \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ takové, že platí

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2t - n) \quad (4.17)$$

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \phi(2t - n). \quad (4.18)$$

Důkaz. $\{p_n\}$ existuje podle (4.10), neboť $\phi \in V_0 \subset V_1$ dle 1° a $\{q_n\}$ existuje podle (4.11), neboť $\psi \in W_0 \subset V_1$ dle 4°.

Důsledek 4.7. Platí tzv. vztahy dvou měřítek (two-scale relations):

$$\phi(2^{j-1}t - l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t - k) \quad (4.19)$$

$$\psi(2^{j-1}t - l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} \phi(2^j t - k). \quad (4.20)$$

Důkaz. V (4.17) a (4.18) dosadíme $2^{j-1}t - l$ místo t :

$$\begin{aligned} \phi(2^{j-1}t - l) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2(2^{j-1}t - l) - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2^j t - 2l - n) = \\ &\stackrel{k=2l+n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t - k). \end{aligned}$$

Podobně pro ψ .

Tvrzení 4.8 (Algoritmus rekonstrukce: výpočet c^j pomocí c^{j-1} a d^{j-1}).

Pro c^j a d^j ze (4.10) a (4.11) platí následující rekurentní vztah:

$$c_k^j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} c_l^{j-1} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} d_l^{j-1}, \quad (4.21)$$

kde $p = \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a $q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jsou posloupnosti ze vztahů dvou měřítek (4.19) a (4.20).

Důkaz. Užitím (4.10)–(4.12) dostáváme

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{j-1} \phi(2^{j-1}t - l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l^{j-1} \psi(2^{j-1}t - l) = \\ &\stackrel{(4.19)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[c_l^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t - k) + d_l^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} \phi(2^j t - k) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}) \right]}_{c_k^j} \phi(2^j t - k), \end{aligned}$$

neboť posloupnost souřadnic c^j je určena jednoznačně.

Označíme-li $y^{j-1} = \{y_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ a $z^{j-1} = \{z_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ pro každé $j \in \mathbb{Z}$, kde pro každé $l \in \mathbb{Z}$ klademe

$$\left. \begin{aligned} y_{2l}^{j-1} &= c_l^{j-1} & z_{2l}^{j-1} &= d_l^{j-1} \\ y_{2l+1}^{j-1} &= 0 & z_{2l+1}^{j-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{tzv. upsampling,}$$

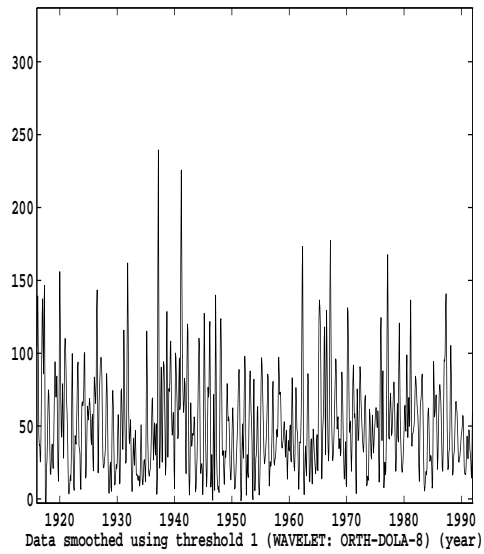
pak vztah (4.21) určuje dva lineární konvoluční filtry pořadě s impulzními odezvami p a q pro výpočet $c^j = p * y^{j-1} + q * z^{j-1}$.

Schématicky tedy můžeme algoritmus rekonstrukce znázornit takto:

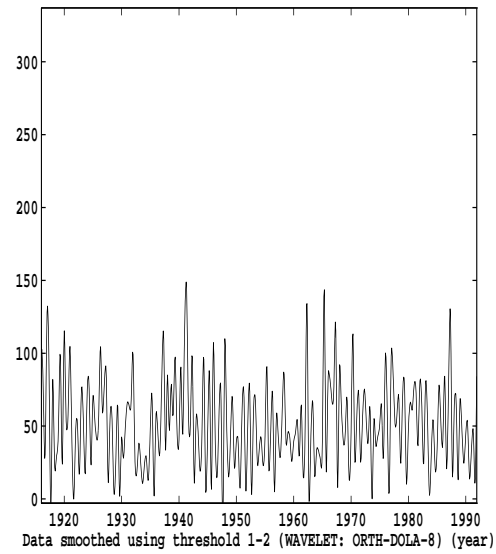
$$\boxed{\begin{array}{l} c^j \swarrow + \leftarrow \text{filtr } p \leftarrow y^{j-1} \leftarrow \text{upsampling} \leftarrow c^{j-1} \\ \nwarrow + \leftarrow \text{filtr } q \leftarrow z^{j-1} \leftarrow \text{upsampling} \leftarrow d^{j-1} \end{array}}$$

Na obr. 3 je ukázka MR-analýzy aplikované na záznam průměrných měsíčních průtoků na řece Morava v Kroměříži v letech 1916–1991 převzatý z [13].

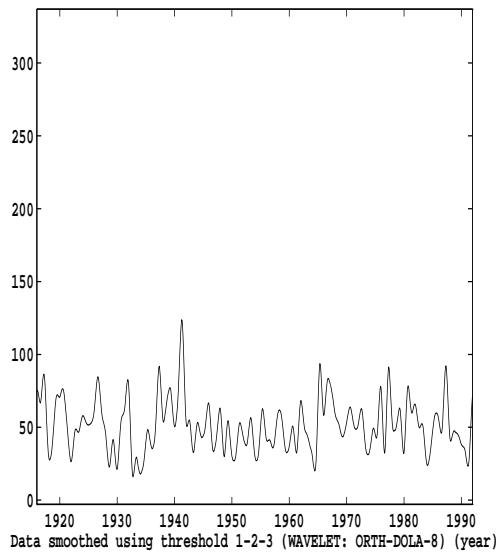
MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



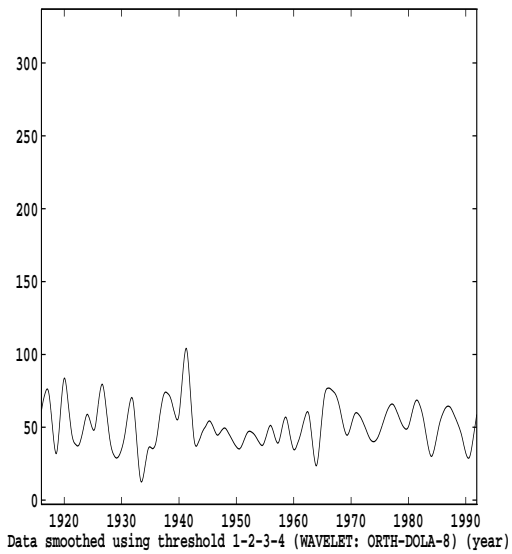
MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



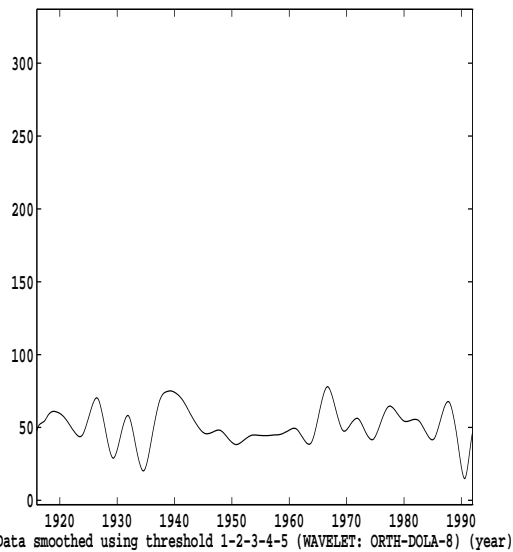
MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



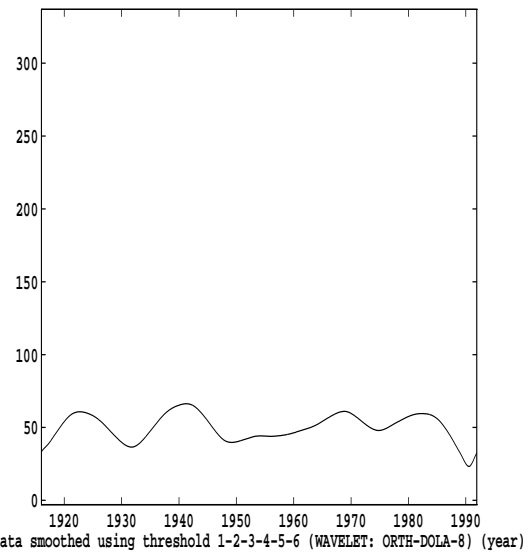
MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



MONTH MEAN FLOW ON THE RIVER MORAVA 1916-1991, KROMERIZ, CZECH REPUBLIC



OBRÁZEK 3. Ukázka MR-analýzy

Šest grafů uspořádaných zleva doprava a odshora dolů ukazuje vyhlazení dat s vynulovanými waveletovými koeficienty pořadě v úrovních 1,1-2, ..., 1-6. Zde 1 odpovídá nejvyšší úrovni aproximace, tj. $x_{j_{\max}} \in V_{j_{\max}}$. Z grafů je zřejmý postupný úbytek v rozlišení detailů pro $j = j_{\max}, j_{\max} - 1, \dots$.

5. INFORMACE O SOFTWARE

Existuje několik komerčních i nekomerčních podpůrných softwarových balíčků pro práci s wavelety, z nichž bych zmínil tyto:

WAVELET TOOLBOX:

Firemní komerční knihovna (toolbox) pro numerický výpočetní systém MATLAB firmy MathWorks, Inc. (USA). Doporučuje se používat spolu s další firemní knihovnou pro zpracování signálů (Signal Processing Toolbox). Pochází z Francie, kde jeho předchozí verze byla známa pod názvem MICRONDE ([9]). V České republice jej spolu se systémem MATLAB a dalšími firemními toolboxy distribuuje firma HUMUSOFT, s.r.o. Praha.

WAVBOX 4:

Jedná se o komerční nefiremní toolbox pro MATLAB (viz [12]), jehož starší verze jsou nekomerční a volně dostupné přes FTP. Autorem je Carl Taswell, Stanford University, USA. Jedná se o velmi bohatou a na dalších toolboxech plně nezávislou knihovnu dodávanou buď ve zdrojovém tvaru (288 tzv. m-souborů MATLABu, 1,2 MB) nebo pro MATLAB 5 také v binárním tvaru (tzv. p-soubory) za nižší cenu. Ukázky na obrázcích 1–3 byly zpracovány právě tímto softwarem.

S+WAVELETS:

Komerční firemní přídatný modul do statistického systému S-PLUS firmy StatSci (USA) v tuzemsku distribuovaný firmou Trilobyte, Ltd.

WAVETHRESH:

Nekomerční knihovna v jazyce S (předchůdce S-PLUS), jejímiž autory jsou G. P. Nason a B. W. Silverman. Návod k instalaci a použití tohoto softwaru je v [10].

LITERATURA

- [1] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [2] David L. Donoho and Iain M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*, Technical report, Stanford University, Department of Statistics, Stanford CA 94305, July 1994.
- [3] ———, *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage*, *Biometrika* **81** (1994), 425–455.
- [4] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkycharian and D. Picard, *Wavelet shrinkage: Asymptopia ?*, *J. Royal Statist. Soc. B* **57** (1995), no. 2, 301–337.
- [5] Charles K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 1, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1992.
- [6] Charles K. Chui, *Wavelets: A tutorial in theory and applications*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 2, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1992.
- [7] Yves Meyer, *Wavelets, algorithms & applications*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1993.
- [8] ———, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [9] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, *Un logiciel de traitement par ondelettes de signaux et d'images*, In: Abstracts of the conference "Wavelets and Statistics", Villard-de-Lans, France (Grenoble, France) (Anestis Antoniadis, ed.), XV Recontres Franco-Belges de Statisticiens, Université Pierre Mendès France et Laboratoire IMAG-LMC, November 1994 (French).
- [10] Guy P. Nason and Bernard W. Silverman, *The Discrete Wavelet Transform in S*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **3** (1994), 163–191, (available from anonymous FTP: <ftp://ftp.statistics.bristol.ac.uk/pub/reports/.../tdwtis.ps.gz>).

- [11] Gilbert Strang and Truong Nguyen, *Wavelets and filter banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA 02181, 1996.
- [12] Carl Taswell, *WavBox 4.4b5 (Wavelet Toolbox for MATLAB 4 and 5)*, October 1997, (Internet URL: <http://www.wavbox.com>).
- [13] Vítězslav Veselý, *Kernel and wavelet smoothing: Basic theory and examples of practical data analysis*, In: Proceedings and abstracts of ESES'96 — Environmental Statistics and Earth Science, Brno (I. Horová, J. Jurečková and J. Vosmanský, eds.), Masaryk University of Brno, Czech Rep., August 1996, pp. 163–174.
- [14] ———, *Wavelety a časově-frekvenční analýza dat*, In: Sborník semináře ANALÝZA DAT 95/II, hotel Technik, Lázně Bohdaneč, TriloByte, Ltd. (Pardubice), listopad 1995.
- [15] Gilbert G. Walter, *Wavelets and other orthogonal systems with applications*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY, MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ, JANÁČKOVO NÁM. 2A,
662 95 BRNO

E-mail address: `vesely@math.muni.cz`