

# WAVELETY A JEJICH POUŽITÍ PŘI FILTRACI DAT<sup>1</sup>

VÍTĚZSLAV VESELÝ

ABSTRAKT.

Basics of wavelet expansions and wavelet de-noising (Donoho-Johnstone) are explained following the analogy with the classical Fourier analysis and using general concepts in the  $L_2$  function space as the common background. Also the fundamental relations of the multiresolution analysis are derived. They yield a recurrent procedure allowing us to raise/lower the level of the wavelet approximation step by step. Figures of some commonly used wavelet shapes and examples of practical data analysis demonstrate the topics.

Здесь объясняются основы вейвлетных разложений и сглаживания (Donoho-Johnstone) следствием аналогии по классическом анализе Фурье при использовании общих понятий из функционального пространства  $L_2$ . Также выведены фундаментальные отношения MR-анализа (multiresolution analysis), на основе которых построен рекуррентный процесс для постепенного повышения или понижения точности вейвлетного приближения. Рисунки широко используемых материнских вейвлетных функций и примеры практического анализа данных иллюстрируют изложенные темы.

## 1. Úvod

Teorie “waveletů” je relativně novou oblastí aplikované matematiky s počátky sahajícími do let 1982–84. Její kořeny však nejsou jen čistě matematické, ale nachází se na pomezí matematiky, fyziky a technických věd (zejména zpracování signálů). Odtud také pramení obrovská šíře jejích aplikací, které nachází především při zpracování a analýze dat nejrůznějšího původu (telekomunikace, radarová a sonarová technika, komprese a kódování, seismika, geofyzika, biomedicína, zpracování řeči a obrazů, aj.), ale i v numerické matematice (aproximace funkcí, numerické řešení diferenciálních rovnic – viz např. [11], aj.).

---

<sup>1</sup>Vytištěno ve sborníku 9. letní školy ROBUST'96 (ed. J. Antoch a G. Dohnal), JČMF Praha 1997, str. 241–272.

Datum: 27. ledna 1997, rev. 20. ledna 1999.

Tato práce byla vypracována za finanční podpory Grantové Agentury České Republiky, reg. číslo grantu 201/96/0665.

Ke studiu teorie waveletů a jejich aplikací je k dispozici celá řada anglicky psaných monografií, např. [2, 6, 7, 8, 9, 18], které vesměs předpokládají u čtenáře dosti vysokou úroveň matematických znalostí, a to především z oblasti funkcionální a klasické Fourierovy analýzy.

Tento příspěvek podává stručný matematický úvod do teorie waveletů a waveletové filtrace v analogii s klasickou Fourierovou analýzou.

V úvodní části bude zavedeno označení a shrnuty potřebné pojmy a vlastnosti funkcionálních prostorů  $L_p$ , poté bude zavedena waveletová řada (WŘ) a integrální waveletová transformace (IWT) jako protějšek Fourierovy řady (FŘ) a integrální Fourierovy transformace (IFT). Bude rovněž paralelně studován problém inverze pro IFT a IWT, a vyšetřovány spektrální charakteristiky FŘ a WŘ.

Z hlediska aplikací waveletů se soustředíme na waveletovou filtraci (vyhlazování) a tzv. **MR-analýzu** (z angl. *multiresolution analysis* (MRA), což lze volně přeložit jako *analýza o více úrovních rozlišení*). Tato metoda je výpočetně velmi atraktivní, neboť umožňuje jednoduchou aplikaci vhodné dvojice lineárních filtrů postupně snižovat nebo zvyšovat rozlišovací schopnost waveletové aproximace. Použití nachází zejména ve dvou dimenzích, kde je základem tzv. pyramidálního algoritmu komprese a dekomprese obrazů.

Závěrem pak bude uvedena stručná informace o dostupném softwaru a zhodnocen přínos waveletové analýzy dat.

### Označení.

$\mathbb{N}$  ... množina všech přirozených čísel.

$\mathbb{Z}$  ... množina všech celých čísel.

$\mathbb{R}$  ... množina všech reálných čísel.

$\mathbb{R}^+$  ... množina všech nezáporných reálných čísel.

$\mathbb{C}$  ... množina všech komplexních čísel.

$\delta_{i,j}$  ... Kroneckerův symbol (= 1 pro  $i = j$  a nula jinak).

s.v. je zkratka pro 'skoro všude'.

$s :=$  *výraz*, resp. *výraz*  $:= s$  ... označení výrazu symbolem  $s$ .

$I_M : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  ... indikátor množiny  $M$ , tj.  $I_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$

$x(t-0)$ , resp.  $x(t+0)$  ... limita funkce  $x(t)$  zleva, resp. zprava v bodě  $t$ .

Budeme pracovat obecně s komplexními funkcemi (periodickými i neperiodickými) definovanými na celé reálné ose, např.  $x := x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Většinou se bude jednat o funkce z následujících funkcionálních prostorů, kde  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  je interval periody v případě periodických funkcí nebo  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$  v případě neperiodických funkcí:

$$L_p(\mathcal{J}) := \{x \mid x \text{ měřitelná a } \int_{\mathcal{J}} |x(t)|^p dt < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$$L_\infty(\mathcal{J}) := \{x \mid x \text{ měřitelná a ohraničená s.v.}\}.$$

**Norma v  $L_p(\mathcal{J})$ :**

$$\|x\|_p := \left( \int_{\mathcal{J}} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\infty} := \text{ess sup}_{t \in \mathcal{J}} |x(t)|$$

$L_p(\mathcal{J})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , je **Banachův prostor** nad  $\mathbb{C}$ .  
 $L_p := L_p(\mathbb{R})$ .

$L_2(\mathcal{J})$  je dokonce **Hilbertův prostor**, kde pro  $x, y \in L_2(\mathcal{J})$  :

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{y(t)} dt \text{ je vnitřní součin, přičemž}$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2 \text{ a}$$

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \text{ určuje ortogonalitu } x \text{ a } y.$$

Výše uvažujeme všude měřitelnost a integrovatelnost v Lebesgueově smyslu.

Interpretujeme-li funkci  $x$  jako signál (spojité měření nebo pozorování nějakých dat), pak hodnota  $\|x\|_2^2$  je úměrná energii signálu, tj.  $L_2(\mathcal{J})$  představuje třídu všech signálů o konečné energii na intervalu  $\mathcal{J}$ . Skutečně, uvažujme-li elektrický signál o napětí  $U(t)$  a proudu  $I(t)$  měřený během nějakého časového intervalu  $\mathcal{J}$  na odporu  $R$ , pak  $W(t) = U(t)I(t) = U(t)(U(t)/R) = U(t)^2/R$  je okamžitý výkon měřený v čase  $t \in \mathcal{J}$  a tedy integrální suma  $(\int_{\mathcal{J}} |W(t)|^2 dt)/R$  odpovídá energii tohoto signálu na celém intervalu  $\mathcal{J}$ .

Podobně se zavádí analogické prostory posloupností  $\{x_n\} := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (dále budou v některých případech indexovány alternativně celými čísly):

$$\ell_p := \{ \{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \} \text{ pro } 1 \leq p < \infty \text{ s normou}$$

$$\| \{x_n\} \|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\ell_{\infty} := \{ \{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \} \text{ s normou}$$

$$\| \{x_n\} \|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \text{ je vnitřní součin pro } \{x_n\}, \{y_n\} \in \ell_2.$$

$L_p(\mathcal{J})$  (a podobně  $\ell_p$ ) jsou uzavřené na sčítání, resp. odčítání, a násobení (komplexním) skalárem a tvoří tedy vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ .

Pro každé  $1 \leq p \leq \infty$  platí následující základní nerovnosti:

**Minkovského nerovnost:**  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$

**Hölderova nerovnost:**  $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$ , kde  $q = \frac{p}{p-1}$ , přičemž  $q = 1$  pro  $p = \infty$  a naopak.

$$\Downarrow p = q = 2$$

**Schwarzova nerovnost:**  $|\langle x, y \rangle| \leq \|xy\|_1 \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$

*Poznámka 1.1.*

(1)  $\mathcal{J}$  konečný interval  $\Rightarrow L_2(\mathcal{J}) \subset L_1(\mathcal{J})$

(2)  $\mathcal{J}$  nekonečný interval  $\Rightarrow L_2(\mathcal{J}) \not\subset L_1(\mathcal{J})$  a  $L_1(\mathcal{J}) \not\subset L_2(\mathcal{J})$ , např.  
 $\frac{1}{1+|t|} \in L_2(\mathcal{J}) - L_1(\mathcal{J}), \frac{1}{\sqrt{t}} I_{[0,1]} \in L_1(\mathcal{J}) - L_2(\mathcal{J}).$

**Lemma 1.2.**  $x \in L_p$ ,  $1 \leq p < \infty \Rightarrow \xi_n := \frac{1}{\delta} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} |x(t)|^p dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pro každé  $\delta > 0$ .

*Důkaz.* Sporem: Kdyby tvrzení neplatilo, pak  $\exists n_1 < n_2 < \dots$  tak, že  $\xi_{n_k} \geq \varepsilon > 0$  pro  $\forall k \in \mathbb{N}$  a vhodné  $\varepsilon > 0$ . Odtud:

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \delta \xi_{n_k} \geq \lim_{K \rightarrow \infty} K \delta \varepsilon = \infty, \text{ spor.} \quad \square$$

Dále uvedeme několik obecných definic a tvrzení pro Banachovy, resp. Hilbertovy prostory.

**Definice 1.3.** Je-li  $X$  Banachův prostor nad  $\mathbb{C}$  s normou  $\|\cdot\|_X$  (speciálně např.  $X = L_p(\mathcal{J})$ ) a  $G \subset X$ , pak  $\mathcal{L}(G)$  značí **lineární obal** množiny  $G$  a  $\overline{G}$  její **uzávěr** v  $X$ . Jestliže  $X = \overline{\mathcal{L}(G)}$ , budeme říkat, že  $G$  **generuje**  $X$ . **Bázi** prostoru  $X$  budeme rozumět posloupnost  $E = \{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ , která jej generuje tak, že každý prvek  $x \in X$  lze jediným způsobem vyjádřit jako (spočetnou) lineární kombinaci  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ ,  $x_i \in \mathbb{C}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) v  $X$ -konvergenci, tj.  $\|x - x_N\|_X \rightarrow 0$  pro  $N \rightarrow \infty$ , kde  $x_N = \sum_{i=1}^N x_i e_i$  značí  $N$ -tý částečný součet. Jednoznačně určená čísla  $x_i$  se nazývají **souřadnice** prvku  $x$  v bázi  $E$ . Báze se nazývá **bezpodmínečná**, jestliže nezáleží na způsobu uspořádání jejích prvků, tj. pro každé  $x \in X$  platí  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{p(i)} e_{p(i)}$  při libovolné permutaci  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Je-li  $X$  Hilbertův prostor, pak jeho báze se nazývá **ortonormální**, jestliže  $e_i \perp e_j$  pro  $i \neq j$  a  $\|e_i\|_2 = 1$  pro  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ .

#### Tvrzení 1.4.

*Nechť  $X$  je Hilbertův prostor a  $E = \{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ ,  $\|e_i\| = 1 \forall i \in \mathbb{N}$ , pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

- 1°  $E$  je ortonormální báze v  $X$ .
- 2°  $X = \overline{\mathcal{L}(E)}$  a  $x \in X$  libovolný  $\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ , kde  $x_i$  jsou jednoznačně určeny vztahem  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  (speciálně v  $X = L_2(\mathcal{J})$  je  $x_i = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{e_i(t)} dt$ ), přičemž součet řady je v  $X$ -konvergenci, tj.  $\|x - x_N\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , kde  $x_N = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ .
- 3° Platí tzv. **Parsevalova identita**:  
 $x \in X \Rightarrow \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ , neboli  $\{x_i\} \in \ell_2$ ,  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).
- 4° Platí tzv. **Besselova-Parsevalova identita**:  
 $x, y \in X \Rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ ,  $x_i = \langle x, e_i \rangle$ ,  $y_i = \langle y, e_i \rangle$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

Dle 2°–4° přiřazení  $x \mapsto \{x_i\}$  definuje zřejmě izomorfismus  $L_2(\mathcal{J}) \simeq \ell_2$  zachovávající normu i vnitřní součin.

**Definice 1.5.** Báze  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$  Hilbertova prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_X$ , (speciálně např.  $X = L_2(\mathcal{J})$ ) se nazývá **Rieszovou bázi**, jestliže existují konstanty  $A, B$ ,  $0 < A \leq B < \infty$  tak, že pro každé  $x \in X$ ,  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ ,  $\{x_i\} \in \ell_2$  je splněna nerovnost

$$A \|\{x_i\}\|_2^2 \leq \|x\|_X^2 \leq B \|\{x_i\}\|_2^2. \quad (1.1)$$

Platí následující tvrzení:

**Tvrzení 1.6.** *Ke každé Rieszově bázi  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$  Hilbertova prostoru  $X$  existuje jediná tzv. **duální Rieszova báze**  $E^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots\} \subset X$ , která je **biortogonální k**  $E$  v tom smyslu, že  $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Zejména tedy souřadnice  $x_i$  jsou podobně jako v ortonormálním případě jednoznačně určeny vztahem  $x_i = \langle x, e_i^* \rangle$  (speciálně v  $X = L_2(\mathcal{J})$  je  $x_i = \int_{\mathcal{J}} x(t) \overline{e_i^*(t)} dt$ ).*

Vidíme, že ortonormální báze je speciálním případem Rieszovy báze pro  $A = B = 1$  a  $E^* = E$ . Rieszova báze představuje tedy jakousi *skoro ortonormální bázi*, neboť není požadována striktní platnost Parsevalovy identity. Totiž  $\|x\|_2^2$  se může pohybovat v rozmezí vymezeném konstantami  $A$  a  $B$ .

Pro praktické výpočty jsou výhodné bezpodmínečné báze. Ortonormální báze zřejmě tuto vlastnost mají vzhledem k tvrzení 1.4, kde  $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$  konverguje absolutně a tedy bez ohledu na pořadí. Ukazuje se, že totéž platí pro každou Rieszovu bázi. Existuje totiž celá řada ekvivalentních podmínek, které charakterizují bezpodmínečné báze dokonce obecně v Banachových prostorech. Následující věta udává jednu takovou nutnou a postačující podmínku, která se právě pro Rieszovu bázi snadno ověří.

**Tvrzení 1.7** ([15, vztah (17.12), str. 499–500]). *Nechť  $X = \overline{\mathcal{L}(E)}$  je Banachův prostor generovaný posloupností  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ ,  $e_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N}$ . Pak  $E$  je bezpodmínečná báze  $X$  právě když  $\exists C, 1 \leq C < \infty$  :*

$\|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i e_i\|_X \leq C \|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_X$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $\beta_i, \alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $|\beta_i| \leq 1$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

**Důsledek 1.8.** *Každá Rieszova báze Hilbertova prostoru je bezpodmínečná.*

*Důkaz.* Nechť  $E$  je Rieszova báze Hilbertova prostoru  $X$ . Při označení jako v 1.5 a 1.7 pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\{\beta_i \alpha_i\}, \{\alpha_i\} \in \ell_2$ , jestliže položíme  $\alpha_i = \beta_i = 0$  pro  $i > n$ . Přitom zřejmě  $\|\{\beta_i \alpha_i\}\|_2 \leq \|\{\alpha_i\}\|_2$  vzhledem k  $|\beta_i| \leq 1$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , takže podle (1.1) dostáváme nerovnosti

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i e_i\|_X &\leq \sqrt{B} \|\{\beta_i \alpha_i\}\|_2 \leq \sqrt{B} \|\{\alpha_i\}\|_2 \text{ a} \\ \sqrt{A} \|\{\alpha_i\}\|_2 &\leq \|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_X, \text{ jejichž sloučení dává} \\ \|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i e_i\|_X &\leq \sqrt{B} \|\{\alpha_i\}\|_2 \leq (\sqrt{B}/\sqrt{A}) \|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_X. \end{aligned}$$

Stačí tedy položit  $C = \sqrt{B/A}$ . Je  $C \geq 1$ , neboť  $A \leq B$ . □

V dalších úvahách budeme výlučně pracovat s ortonormálními a Rieszovými bázemi pouze v prostoru  $X = L_2(\mathcal{J})$ , i když existují i obecnější přístupy — viz např. [9].

## 2. FOURIEROVA A WAVELETOVÁ ŘADA

Z matematického pohledu představuje waveletová analýza přímou analogii klasické Fourierovy analýzy  $T$ -periodických funkcí v  $L_2([a, b])$ ,  $b - a = T$ , použitou na případ neperiodických funkcí z  $L_2 := L_2(\mathbb{R})$ .

Fourierově řadě, která představuje vyjádření  $T$ -periodické funkce ve spočetné ortonormální bázi (indexované celými čísly)  $\{w(jt)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  harmonických kmitů odvozených z komplexní sinusové vlny  $w(t) = e^{i2\pi t/T}/\sqrt{T} = (\cos 2\pi t/T + i \sin 2\pi t/T)/\sqrt{T}$  pouhou změnou měřítka (frekvence) v závislosti na  $j$ , odpovídá **waveletová řada** jakožto rozvoj neperiodické funkce ve vhodné spočetné bázi opět určené jedinou funkcí  $\psi(t)$  nazývanou **mateřský wavelet (mother wavelet)**. Protože  $w(t)$  je funkce mající konečnou energii pouze na ohraničeném intervalu ( $\int_a^b |w(t)|^2 dt < \infty$ ), je třeba hledat  $\psi \neq w$ , která má konečnou energii na celé reálné ose. Taková funkce však musí podle 1.2 vymizet k nule pro  $t \rightarrow \pm\infty$  a dokonce se ukazuje (viz dále odst. 3), že za dodatečného předpokladu integrovatelnosti (tj.  $x \in L_1 \cap L_2$ ) musí měnit i znaménko, tj.  $\psi$  musí být tlumený kmit neboli **vlnka (=wavelet)**. V důsledku tohoto tlumení, které může být dokonalé v tom smyslu, že  $\psi$  je nenulová pouze na ohraničeném intervalu (říkáme, že má kompaktní nosič), nestačí generovat bázi pouhou změnou měřítka mateřského waveletu, ale navíc je nutné jej i posouvat. Waveletová báze se pak dostane jako spočetný dvojnásobně celými čísly indexovaný systém  $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , kde  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi\left(\frac{t-k2^{-j}}{2^{-j}}\right)$  a  $2^{j/2}$  je normalizační konstanta zajišťující konstantní (jednotkovou) normu  $\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2$ . V závislosti na vlastnostech obdržené waveletové báze (není jediná) se pak provádí klasifikace příslušného mateřského waveletu.

**Definice 2.1.** Označme  $E = \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ . Mateřský wavelet  $\psi$  se nazývá

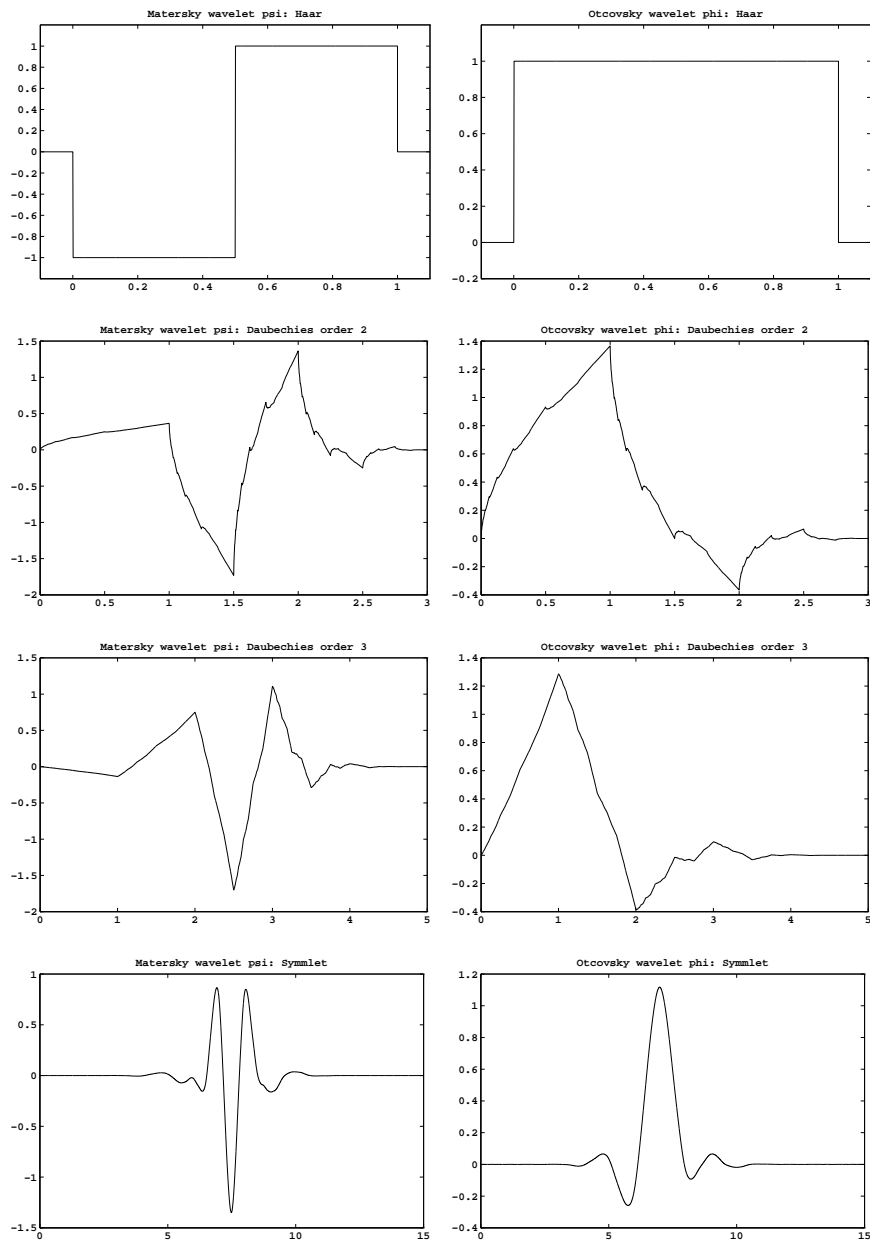
- (1) **ortogonální**, jestliže  $E$  je ortonormální báze v  $L_2$ :  
 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$ ;
- (2) **semiortogonální**, jestliže  $E$  je Rieszova báze v  $L_2$  a platí:  
 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0$  pro  $j \neq l$ ;
- (3) **biortogonální**, jestliže  $E$  je Rieszova báze v  $L_2$  a existuje jediný (viz 1.6) tzv. **duální wavelet**  $\psi^*(t)$  takový, že  $E^* = \{\psi_{l,m}^*\}_{l,m \in \mathbb{Z}}$  je duální Rieszova báze k  $E$  (ze symetrie plyne také, že  $\psi$  je duální k  $\psi^*$ );

Mateřský wavelet  $\psi$  se nazývá **waveletem s kompaktním nosičem (compactly supported wavelet)**, jestliže  $\{t \mid \psi(t) \neq 0\}$  je ohraničená množina.

Podle 1.6 je zřejmě (1) speciálním případem (3), kde  $\psi^* = \psi$ . Zejména tedy každý ortogonální wavelet je semiortogonální i biortogonální. Nejjednodušším a historicky nejstarším příkladem ortogonálního waveletu je tzv. **Haarova funkce**  $\psi_H$  definovaná předpisem

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

V nedávné době bylo nalezeno mnoho dalších ortogonálních waveletů, ukázky některých z nich i Haarova waveletu jsou na obr. 1a).



a) mateřský wavelet

b) otcovský wavelet

OBRÁZEK 1. Ukázky ortogonálních waveletů

Každá funkce  $x \in L_2([a, b])$ ,  $b - a = T$  je součtem své **Fourierovy řady**:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{j}{T} t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi \frac{j}{T} t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i2\pi \frac{j}{T} t}, \quad (2.1)$$

kde

$$c_j := c_j(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \underbrace{\langle x, e_j \rangle}_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^b x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i2\pi \frac{j}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_a^b x(t) e^{-i2\pi \frac{j}{T} t} dt \quad (2.2)$$

je tzv.  $j$ -tý **Fourierův koeficient** a  $\{c_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  je tzv. **fourierovské spektrum** funkce  $x(t) \in L_2([a, b])$ .

Podobně každá funkce  $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$  je součtem své **waveletové řady**

$$x(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}^*(t), \quad (2.3)$$

kde v případě biortogonálního, resp. ortogonálního ( $\psi^* = \psi$ ), mateřského waveletu a vzhledem k tvrzení 1.6

$$\begin{aligned} c_{j,k} := c_{j,k}(x) &= \langle x, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-k2^{-j}}{2^{-j}}\right)} dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

je tzv.  $(j, k)$ -tý **waveletový koeficient** a  $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  je tzv. **waveletové spektrum** funkce  $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ .

Konvergence Fourierovy, resp. waveletové řady, je v normě prostoru  $L_2([a, b])$ , resp.  $L_2(\mathbb{R})$ , tj.

$$\begin{aligned} \|x - x_N\|_2 &\rightarrow 0 \quad \text{pro } N \rightarrow \infty, \text{ resp.} \\ \|x - x_{N,M}\|_2 &\rightarrow 0 \quad \text{pro } N, M \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pro částečné součty

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{j=-N}^N c_j e^{i2\pi \frac{j}{T} t}, \text{ resp.} \\ x_{N,M}(t) &= \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-M}^M c_{j,k} \psi_{j,k}^*(t). \end{aligned}$$



Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme psát stručně  $c_j$  místo  $c_j(x)$  a  $c_{j,k}$  místo  $c_{j,k}(x)$ .

### Besselova-Parsevalova identita

- pro Fourierovu řadu:

$$\frac{1}{T} \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt = \frac{1}{T} \langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \overline{y_j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(x) \overline{c_j(y)}. \quad (2.5)$$

- pro waveletovou řadu:

Nechť  $\psi$  je ortogonální nebo biortogonální wavelet, pak

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt &= \langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}(x) \psi_{j,k}^*, \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} c_{l,m}^*(y) \psi_{l,m} \right\rangle = \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} c_{j,k}(x) \overline{c_{l,m}^*(y)} \langle \psi_{j,k}^*, \psi_{l,m} \rangle = \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}(x) \overline{c_{j,k}^*(y)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pro ortogonální wavelet dostáváme speciálně  $c_{j,k}^*(y) = c_{j,k}(y)$ , neboť  $\psi_{j,k}^* = \psi_{j,k}$ .

Z (2.5) a (2.6) dostaneme příslušné Parsevalovy identity jako speciální případ pro  $x = y$ :

### Parsevalova identita

- pro Fourierovu řadu:

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_a^b |x(t)|^2 dt}_{\text{střední výkon}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(x) \overline{c_j(x)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(x)|^2. \quad (2.7)$$

- pro waveletovou řadu:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{energie}} &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}(x) \overline{c_{j,k}^*(x)} \text{ pro biortogonální wavelet} \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}(x)|^2 \text{ pro ortogonální wavelet.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Při zpracování konečných diskretních dat vede numerický výpočet integrálu ve (2.2) na známý operátor **diskretní Fourierovy transformace**

(DFT), jehož inverze (IDFT) koresponduje s (2.1), kde nekonečnou řadu nahradíme pouze jejím částečným součtem. Podobně diskretizací (2.4) a (2.3) dostaneme příslušné operátory **diskrétní waveletové transformace** (DWT) a její inverze (IDWT). Pro jejich výpočet existují **rychlé algoritmy** (FWT=Fast Wavelet Transform) jakožto protějšek rychlé Fourierovy transformace (FFT=Fast Fourier Transform). Diskrétními operátory se v tomto příspěvku nebudeme nadále zabývat, podrobnosti může čtenář nalézt například v pracích [13, 14].

### 3. FOURIEROVA A WAVELETOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

V tomto odstavci ukážeme, že z vyjádření waveletových koeficientů lze vhodným infinitesimálním přechodem obdržet tzv. **integrální waveletovou transformaci** (IWT), která je opět analogií **integrální Fourierovy transformace** (IFT) získané z vyjádření pro Fourierovy koeficienty při  $T \rightarrow \infty$ . Existence inverzní waveletové transformace však bude vyžadovat, aby wavelet  $\psi$ , který je jádrem této transformace splňoval tzv. **podmínku přípustnosti**, resp. silnější **podmínku stability**. Jádro  $\psi$  budeme v tomto případě nazývat **základní**, resp. **dyadický**, wavelet.

Předpokládejme tedy nyní  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$  a  $x(t) \in L_2$ . Provedeme limitní přechod pro  $T \rightarrow \infty$ . Pak (2.2) přejde v **dopřednou integrální Fourierovu transformaci**

$$Tc_j = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi \frac{j}{T}t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt =: \hat{x}(f) \quad (3.1)$$

a (2.1) ve **zpětnou integrální Fourierovu transformaci**

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} Tc_j e^{i2\pi \frac{j}{T}t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} df. \quad (3.2)$$

Píšeme  $(\mathcal{F}x)(f) = \hat{x}(f)$  a  $(\mathcal{F}^{-}\hat{x})(t) = x(t)$ . Diskrétní frekvence  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $f_j = \frac{j}{T}$  přejdou v kontinuum frekvencí  $\{f\}_{f \in \mathbb{R}}$  a  $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  v kontinuílní spektrum  $\{\hat{x}(f)\}_{f \in \mathbb{R}}$ , z něhož  $\mathcal{F}^{-}$  rekonstruuje  $x(t)$  za jistých podmínek (viz dále věty o inverzi) analogicky jako Fourierova řada ve (2.1).

Protože  $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{y(t)} dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} Tc_j(x) \overline{Tc_j(y)}$ , přejdou při  $T \rightarrow \infty$  Parsevalovy identity (2.5) a (2.7) analogicky jako výše pořadě v

**Parsevalovy identity pro IFT**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\overline{\hat{y}(f)} df \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 df. \quad (3.4)$$

Ze (3.4) lze usuzovat, že  $\hat{x} \in L_2$  a následující tzv. **Plancherelova věta** toto potvrzuje a navíc řeší i problém inverze v  $L_2$ .

**Tvrzení 3.1** (Inverzní formule pro IFT v  $L_2$ ).

Definujeme-li integrály v (3.1) a (3.2) jako Cauchyho hlavní hodnotu v  $L_2$ -konvergenci (např. pro  $\mathcal{F} : \|\hat{x} - \int_{-N}^N x(t)e^{-i2\pi ft} dt\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ), pak pro  $\forall x \in L_2$  je rovněž  $\hat{x} \in L_2$ , platí (3.3), (3.4) a  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^-$  jsou navzájem inverzní lineární operátory  $L_2 \rightarrow L_2$  ( $\mathcal{F}^- = \mathcal{F}^{-1}$ ) zachovávající vnitřní součin a tedy i normu.

Problém inverze lze vyšetřovat i bodově, kdy integrály v (3.1) a (3.2) chápeme jako Lebesgueovy integrály na  $\mathbb{R}$ :

**Tvrzení 3.2** (Inverzní formule pro IFT v  $L_1$ ).

$x(t), \hat{x}(f) \in L_1 \Rightarrow x(t) = (\mathcal{F}^- \hat{x})(t)$  platí v každém bodě  $t$ , kde  $x$  je spojitá a  $\frac{1}{2}(x(t+0) + x(t-0)) = (\mathcal{F}^- \hat{x})(t)$  v každém bodě  $t$ , kde  $x$  má konečný skok.

**Důsledek 3.3.** Má-li  $x \in L_1$  konečnou variaci na každém uzavřeném a ohraničeném intervalu, pak  $x(t) = (\mathcal{F}^- \hat{x})(t)$  s.v.

*Poznámka 3.4.*

- (1)  $x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \mathcal{F}x$  v  $L_1$  a  $\mathcal{F}x$  v  $L_2$  splývají v tom smyslu, že jsou stejné s.v.
- (2) Ve 3.3 lze rovnost  $x(t) = (\mathcal{F}^- \hat{x})(t)$  pokládat za platnou pro každé  $t \in \mathbb{R}$ , jestliže přijmeme konvenci  $x(t) = \frac{1}{2}(x(t+0) + x(t-0))$  v každém bodě  $t$ , kde  $x(t)$  má konečný skok ( $x(t)$  má totiž pouze nespojitosti tohoto typu, a to nejvýše ve spočetně mnoha bodech).

Je dále zřejmé, že pomocí  $\mathcal{F}$  můžeme (2.2) přepsat do ekvivalentního tvaru

$$c_j(x) = \frac{1}{T}(\mathcal{F}x_T) \left( \frac{j}{T} \right), \quad \text{kde } x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ 0 & \text{pro } t \notin [a, b] \end{cases}. \quad (3.5)$$

Pro libovolné  $x(t), y(t) \in L_2$  a  $c \in \mathbb{C}$ ,  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  se snadno ověří následující vlastnosti operátorů  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^-$ :

$$(\mathcal{F}cx) = c(\mathcal{F}x) \quad (\mathcal{F}^- c\hat{x}) = c(\mathcal{F}^- \hat{x}) \quad (3.6)$$

$$(\mathcal{F}(x+y)) = (\mathcal{F}x) + (\mathcal{F}y) \quad (\mathcal{F}^-(\hat{x} + \hat{y})) = (\mathcal{F}^- \hat{x}) + (\mathcal{F}^- \hat{y}) \quad (3.7)$$

$$(\mathcal{F}x(\alpha t))(f) = \frac{1}{|\alpha|}(\mathcal{F}x)(f/\alpha) \quad (\mathcal{F}^- \hat{x}(\alpha f))(t) = \frac{1}{|\alpha|}(\mathcal{F}^- \hat{x})(t/\alpha) \quad (3.8)$$

$$(\mathcal{F}x(t-\beta))(f) = e^{-i2\pi f\beta}(\mathcal{F}x)(f) \quad (\mathcal{F}^- \hat{x}(f-\beta))(t) = e^{i2\pi t\beta}(\mathcal{F}^- \hat{x})(t) \quad (3.9)$$

$$x(t) \text{ reálná} \Rightarrow \hat{x}(-f) = \overline{\hat{x}(f)} \quad (3.10)$$

Dá se také ukázat, že

$$x \in L_1 \Rightarrow \hat{x}(f) \text{ je stejnoměrně spojitá funkce.} \quad (3.11)$$

Podobně limitním přechodem  $j \rightarrow \infty$  ve vyjádření (2.4) waveletových koeficientů  $c_{j,k}$  dostaneme z diskrétních posloupností parametrů měřítka (dilatace)  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $a_j = 2^{-j}$  a parametrů polohy  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $b_k = k2^{-j}$  pořadě kontinuum hodnot  $\{a\}_{a \in \mathbb{R}^+}$  a  $\{b\}_{b \in \mathbb{R}}$ . Připustíme-li i záporné hodnoty  $a$ , pak  $c_{j,k}$  přejdou v kontinuální waveletové spektrum závislé na  $a, b \in \mathbb{R}$  ve smyslu následující definice.

**Definice 3.5.** Integrální transformace  $\mathcal{W}_\psi$  určena vztahem

$$\tilde{x}(b, a) = (\mathcal{W}_\psi x)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad x \in L_2(\mathbb{R}), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

se nazývá **dopřednou (integrální) waveletovou transformací** indukovanou “waveletem”  $\psi$ .

Analogicky jako ve (3.5) je vzhledem k (2.4)  $(j, k)$ -tý **waveletový koeficient** funkce  $x(t)$  určen waveletovou transformací vyhodnocenou pro dyadickou pozici  $b = \frac{k}{2^j}$  a binární dilataci  $a = \frac{1}{2^j}$ :

$$c_{j,k} = (\mathcal{W}_\psi x)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right). \quad (3.13)$$

Podobně jako v případě  $\mathcal{F}$  se nyní budeme zabývat otázkou platnosti Parsevalových identit a problémem inverze operátoru  $\mathcal{W}_\psi$ . Ukazuje se, že  $\mathcal{W}_\psi$  bude mít obdobné vlastnosti jako  $\mathcal{F}$ , pokud se omezíme pouze na  $\psi \in L_2$  ve smyslu následující definice.

**Definice 3.6.** Funkce  $\psi \in L_2$  se nazývá **základní wavelet**, jestliže  $\psi$  splňuje tzv. **podmínku přípustnosti** (admissibility condition)

$$0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty. \quad (3.14)$$

Poznamenejme, že  $C_\psi > 0$  ve (3.14) vylučuje triviální základní wavelet  $\psi = 0$  s.v., neboť zřejmě platí  $C_\psi = 0 \Leftrightarrow \widehat{\psi}(f) = 0$  s.v.  $\Leftrightarrow \psi(t) = 0$  s.v.

**Lemma 3.7.** *Nechť  $\psi \in L_1 \cap L_2$  je základní wavelet, pak*

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.15)$$

*a tedy  $\psi$  je skutečně malá vlna (wavelet), neboť mění znaménko.*

*Důkaz.*  $\widehat{\psi}(f)$  je spojitá funkce dle (3.11). Kdyby  $\widehat{\psi}(0) \neq 0$ , pak

$|\widehat{\psi}(f)|^2 \geq K > 0$  v nějakém  $\delta$ -okolí bodu  $f = 0$ , tj.

$$C_\psi \geq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{K}{|f|} df = 2K \int_0^{\delta} \frac{1}{f} df = 2K [\ln |f|]_0^{\delta} = 2K (\ln \delta - \ln 0) = \infty, \text{ spor. } \quad \square$$

**Tvrzení 3.8** (Parsevalovy identity pro IWT).

Nechť  $\psi \in L_2$  je základní wavelet, pak  $\mathcal{W}_\psi$  splňuje pro  $\forall x, y \in L_2$  Parsevalovy identity ve tvaru

$$C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(b, a) \overline{\tilde{y}(b, a)} \frac{1}{a^2} da db \quad (3.16)$$

$$C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(b, a)|^2 \frac{1}{a^2} da db, \quad (3.17)$$

kde  $\tilde{x}(b, a) = (\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  a  $\tilde{y}(b, a) = (\mathcal{W}_\psi y)(b, a)$ .

Důkaz. Viz [6, Theorem 3.10, str. 62].  $\square$

V případě waveletů se problém inverze, tj. rekonstrukce  $x(t)$  z  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  rozpadá na čtyři případy v závislosti na míře znalosti  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$ .

(1)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe úplně pro každé  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Tvrzení 3.9** (1. inverzní formule pro IWT).

Nechť  $\psi \in L_2$  je základní wavelet, pak pro  $\forall x \in L_2$  a každý bod  $t$ , kde  $x$  je spojitá, platí rekonstrukční formule

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(b, a) \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right\} \frac{1}{a^2} da db. \quad (3.18)$$

Všimněme si, že zatímco v dopředné transformaci (3.12) se používá jádro  $\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$ , zde je užito  $\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$  s vahou  $|a|^{-\frac{1}{2}} a^{-2}$ , což opět ukazuje na analogický vztah jádra  $e^{-i2\pi ft} = e^{i2\pi ft}$  pro  $\mathcal{F}$  a jádra  $e^{i2\pi ft}$  pro  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Wavelet, který se užívá pro inverzní waveletovou transformaci  $\mathcal{W}_\psi^{-1}$  se nazývá **duál**  $\psi$  (nezaměňovat s pojmem duální wavelet zavedeném v definici 2.1). V tomto případě je tedy  $\overline{\psi}$  duál k  $\psi$ .

(2)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe částečně jen pro každé  $a > 0$  a  $b \in \mathbb{R}$ .

V tomto případě je rekonstrukce možná za tu cenu, že se výběr přípustných  $\psi$  ještě více omezí. Místo (3.14) budeme uvažovat poněkud přísnější podmínku, tzv. **zesílenou podmínku přípustnosti**:

$$0 < \frac{1}{2} C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{f} df = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-f)|^2}{f} df < \infty, \quad (3.19)$$

kde  $C_\psi$  je určena opět vztahem (3.14). Skutečně (3.19)  $\Rightarrow$  (3.14), neboť

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-f)|^2}{f} df = \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{-f} df, \quad (3.20)$$

takže součet obou integrálů dává (3.14).

Například reálná funkce  $\psi$  splňující (3.14) splňuje i (3.19), neboť dle (3.10)  $\widehat{\psi}(-f) = \overline{\widehat{\psi}(f)} \Rightarrow |\widehat{\psi}(-f)| = |\widehat{\psi}(f)|$ .

Tvrzení o inverzi zní nyní takto:

**Tvrzení 3.10** (2. inverzní formule pro IWT).

Nechť  $\psi \in L_2$  splňuje (3.19), pak  $\psi$  je základní wavelet a pro  $\forall x \in L_2$  a každý bod  $t$ , kde  $x$  je spojitá, platí rekonstrukční formule

$$x(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty a^{-\frac{5}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \tilde{x}(b, a) \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) db \right\} da. \quad (3.21)$$

Stejně jako v případě (1) je  $\bar{\psi}$  opět duálem k  $\psi$  se stejnou vahou, neboť pro  $a > 0$  je  $a^{-\frac{5}{2}} = |a|^{-\frac{1}{2}} a^{-2}$ .

(3)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe částečně jen pro  $a = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  a  $b \in \mathbb{R}$ .

Opět zůžeme výběr  $\psi$  dle následující definice:

**Definice 3.11.** Funkce  $\psi \in L_2$  se nazývá **dyadický wavelet**, jestliže existují konstanty  $0 < A \leq B < \infty$  takové, že platí tzv. **podmínka stability**

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}f)|^2 \leq B \quad \text{pro s.v. } f \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

**Tvrzení 3.12.** Dyadický wavelet  $\psi \in L_2$  splňuje

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{f} df, \quad \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-f)|^2}{f} df \leq B \ln 2. \quad (3.23)$$

*Důkaz.* Pro  $f > 0$  dostáváme z (3.22):  $\frac{A}{f} \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}f)|^2}{f} df \leq \frac{B}{f}$

a po zintegrování  $\int_1^2$ :

$$\begin{aligned} A[\ln |f|]_1^2 &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_1^2 \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}f)|^2}{f} df \stackrel{u=2^{-j}f}{=} \\ &\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{u} du \leq B[\ln |f|]_1^2 \quad \text{a po sečtení} \\ A \ln 2 &\leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{u} du \leq B \ln 2. \end{aligned}$$

Podobně obdržíme pro  $f < 0$  vynásobením  $-\frac{1}{f}$  a zintegrováním  $\int_{-2}^{-1}$  nerovnosti pro druhý integrál:  $A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-u)|^2}{u} du \leq B \ln 2. \quad \square$

**Důsledek 3.13.** Každý dyadický wavelet je základním waveletem splňujícím zesílenou podmínku přípustnosti (3.14) ve tvaru

$$2A \ln 2 \leq C_\psi \leq 2B \ln 2, \quad (3.24)$$

z níž při  $A = B$  dokonce plyne i (3.19), kde  $\frac{1}{2}C_\psi = A \ln 2$ .

*Důkaz.* (3.24) je přímým důsledkem (3.23), kde stačí sečíst oba integrály spolu s mezemi v nerovnostech a uvážit symetrii (3.20).  $\square$

Tvrzení o inverzi lze nyní formulovat následovně:

**Tvrzení 3.14** (3. inverzní formule pro IWT).

Nechť  $\psi \in L_2$  je dyadický wavelet, pak existuje funkce  $\psi^\diamond \in L_2$  nazývaná **dyadický duál** k  $\psi$  tak, že pro každou funkci  $x \in L_2$  a každé  $t \in \mathbb{R}$  platí rekonstrukční formule

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{3j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(b, 2^{-j}) \psi^\diamond \left( \frac{t-b}{2^{-j}} \right) db. \quad (3.25)$$

Speciálně lze zvolit  $\psi^\diamond = \psi^\circ$ , kde  $\psi^\circ$  je určena přímo waveletem  $\psi$  prostřednictvím své Fourierovy transformace  $\widehat{\psi^\circ}(f)$  podle vztahu

$$\widehat{\psi^\circ}(f) = \frac{\widehat{\psi}(f)}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-m}f)|^2}. \quad (3.26)$$

Poznamenejme ještě, že (3.25) se dostane z (3.21) (po vynásobení váhovou korekcí  $2/C_\psi$ ) jednoduše formálním nahrazením  $\int_0^\infty \# da$  diskrétní sumou získanou diskretizací měřítka  $a$  na síti  $\{a_j\}$ ,  $a_j = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  s nerovnoměrným krokem  $\Delta_j = a_{j-1} - a_j = 2^{-(j-1)} - 2^{-j} = 2^{-j}(2-1) = 2^{-j}$ . Pak  $a_j^{-\frac{5}{2}} \Delta_j = 2^{\frac{5j}{2}} 2^{-j} = 2^{\frac{3j}{2}}$  dává právě váhovou konstantu v (3.25).

*Poznámka 3.15.* Dá se ukázat (viz [6, str. 79–80]), že dyadický duál určený rovnicí (3.26) není obecně jediný možný, ale mohou existovat i další dyadické duály, z nichž žádný ovšem tuto rovnici nesplňuje (nerozlišujeme mezi funkcemi, které se liší na množině nulové míry). Následující tvrzení udává popis všech dyadických duálů k danému dyadickému waveletu  $\psi$ .

**Tvrzení 3.16** ([6, Theorem 3.16, str. 79–80]).

Nechť  $\psi \in L_2$  je dyadický wavelet a  $\psi^\diamond \in L_2$  funkce, pro niž

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi^\diamond}(2^{-j}f)|^2 < \infty. \quad (3.27)$$

Pak  $\psi^\diamond$  je dyadický duál k  $\psi$  právě když splňuje identitu

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}f)} \widehat{\psi^\diamond}(2^{-j}f) = 1 \quad \text{s.v.} \quad (3.28)$$

Pro dyadický duál  $\psi^\diamond$  jsou podmínky (3.27) a (3.28) přímým důsledkem rovnosti  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi^\diamond}(2^{-j}f)|^2 = 1$ , kterou (3.26) zjevně splňuje. Současně vidíme, že dyadický duál  $\psi^\diamond$  je sám dyadickým waveletem splňujícím (3.22) s konstantami  $A = B = 1$ .

(4)  $(\mathcal{W}_\psi)(b, a)$  známe jen diskrétně pro  $a = 2^{-j}$  a  $b = k2^{-j}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

Jestliže v (3.25) diskretizujeme polohovou proměnnou  $b$  pro každé fixované

$j \in \mathbb{Z}$  tentokrát rovnoměrně na síti  $\{b_k\}$ ,  $b_k = k2^{-j}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , přejde podobně jako v případě měřítka navíc také  $\int_{-\infty}^{\infty} \# db$  v diskrétní sumu a (3.25) na

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{3j}{2}} \underbrace{2^{-j}}_{\text{krok}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{x}\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right)}_{c_{j,k} \text{ dle (3.13)}} \psi^{\diamond}\left(\frac{t - k2^{-j}}{2^{-j}}\right) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}^{\diamond}(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tato rekonstrukční formule je podle očekávání ve tvaru waveletové řady, neboť tento případ odpovídá dle (3.13) vlastně znalosti waveletových koeficientů, kdy inverzní formule je dána waveletovou řadou (2.3). Výše popsaný postup je možno modifikovat použitím obecnější diskretizační sítě  $b_k = kb_02^{-j}$ , která umožňuje měnit velikost kroku vhodnou volbou parametru  $b_0 \in \mathbb{R}$  ((3.29) představuje speciální případ pro  $b_0 = 1$ ). Dostaneme tak poněkud obecnější pojetí waveletové řady, kdy bázové funkce  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi\left(\frac{t - k2^{-j}}{2^{-j}}\right)$  nahradíme obecnějšími funkcemi  $\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2} \psi\left(\frac{t - kb_02^{-j}}{2^{-j}}\right)$ . Celá teorie takto modifikovaných waveletových řad však zůstává s příslušnými změnami v platnosti.

*Poznámka 3.17.* Odvození (3.29) vyžaduje vyjasnění otázky, zda dyadický wavelet  $\psi$  je automaticky mateřským waveletem a jeho dyadický duál  $\psi^{\diamond}$  duálním waveletem  $\psi^*$  ve smyslu definice 2.1(3). Ukazuje se (viz [6, str. 71–74]), že každý biortogonální mateřský wavelet (a tedy potažmo i ortogonální a semiortogonální wavelet) je dyadickým waveletem. Dostáváme tedy celkem tyto implikace

$$\psi \text{ (semi)ortogonální} \Rightarrow \psi \text{ biortogonální} \Rightarrow \psi \text{ dyadický} \Rightarrow \psi \text{ základní.}$$

Implikace však nelze obecně obrátit, zejména tedy dyadický wavelet nemusí být nutně mateřským waveletem (viz [6, str. 79]). Stejně tak dyadický duál  $\psi^{\diamond}$  nemusí být nutně duální, tj. neplatí  $\psi^{\diamond} = \psi^*$ , neboť  $\psi^*$  existuje jediný, zatímco  $\psi^{\diamond}$  nikoliv dle 3.15. Tedy odpověď na položenou otázku je záporná a (3.29) nelze interpretovat tak, že platí pro každý dyadický wavelet  $\psi$  a jeho duál  $\psi^{\diamond}$ , nýbrž pouze pro některé speciální z nich.

*Poznámka 3.18.* Důkazy inverzních formulí (3.18), (3.21) a (3.25) lze nalézt například v monografii [6, kap. 3]. Jejich podrobný rozbor ukazuje, že pokud přijmeme konvenci z poznámky 3.4(2), tak vztahy (3.18) a (3.21) lze v analogii s tvrzením 3.2 použít i pro ta  $t$ , v nichž  $x(t)$  má konečný skok.



## 4. ČASOVĚ-FREKVENČNÍ SPEKTRÁLNÍ CHARAKTERISTIKA

V klasické fourierovské bázi je každá bázová funkce sinusový kmit, který ovlivňuje průběh  $x(t)$  stejnoměrně na celé reálné ose a má tedy **globální** účinek. Je to tedy funkce, která **není lokalizována v čase**, ale naopak je **ideálně lokalizována ve frekvenci** (její spektrum je jednobodové). Výpočet každého jednotlivého spektrálního koeficientu podle (2.2) tedy vyžaduje úplnou znalost funkce (signálu)  $x(t)$  v minulosti i budoucnosti. Nevýhoda této reprezentace se nejvýrazněji projeví u signálu, jehož dynamika (tj. frekvenční charakteristika) se s časem výrazně mění. Takový signál si vynucuje silné zastoupení velkého množství vysokofrekvenčních komponent (např. skokové změny se vymodelují až v limitě) neboli zabírá **široké frekvenční pásmo**. Prakticky nepříznivým důsledkem je velký objem dat spektra  $\{c_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  potřebný k vyhovujícímu popisu  $x(t)$ .

Vzniká tak požadavek vyšetřovat **lokální frekvenční charakteristiky** signálu postupně v čase. Standardní postup využívá tzv. **Fourierovu transformaci s váhovým oknem** (WFT = Windowed Fourier Transform), které postupně “klouže” po datech (kontinuálně nebo v diskrétních krocích) a vybírá tak z dat pro frekvenční analýzu pouze lokální úsek:

$$(\mathcal{F}^{\text{win}}x)(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)g(s-t)e^{-i2\pi fs} ds, \quad (4.1)$$

kde  $g(\cdot)$  je váhové okno (zpravidla gaussovské) se středem v 0. Použitím  $\mathcal{F}^{\text{win}}$  místo  $\mathcal{F}$  ve (3.5) dostaneme spektrum  $\{c_{j,t}\}_{j,t \in \mathbb{Z}}$ , pokud se omezíme pouze na diskrétní časové okamžiky  $t \in \mathbb{Z}$ . Jeho podobnost se spektrem (2.4) není jen formální. Stačí položit  $\gamma_{j,t}(s) = \overline{g(s-t)e^{-i2\pi \frac{t}{j}s}} = \overline{g(s-t)}e^{i2\pi \frac{t}{j}s}$  a (4.1) bude přesně tvaru (2.4). Jeden podstatný rozdíl zde však přece jenom je. Na rozdíl od  $\psi_{j,k}$  šířka  $\gamma_{j,t}$  ani posuv  $t$  nezávisí na  $j$ .

Protože frekvence je nepřímo úměrná délce cyklu, tak pro zachycení vysokofrekvenční informace vystačíme s kratším intervalem, zatímco pro zachycení nízkofrekvenční informace je naopak potřeba interval delší. Jinými slovy, potřebujeme mít flexibilní časové okno, které se automaticky zužuje, je-li střední frekvence jeho spektra vyšší a rozšiřuje, je-li tato frekvence nižší. Tuto vlastnost mají právě  $\psi_{j,k}$  (na rozdíl od  $\gamma_{j,t}$ ). Pro rostoucí  $j$  se  $\psi_{j,k}$  zužuje (šířka= $1/2^j$ ), podle (3.8) se pak ovšem  $\widehat{\psi}_{j,k}$  rozšiřuje a střední frekvence spektra spolu se šířkou pásma tedy rostou. Se zužováním je třeba rovněž zjemňovat posuv  $\frac{k}{2^j}$ , aby nevznikly časové díry nepokryté vysokofrekvenční informací. Aby se  $\psi_{j,k}$  mohly používat pro časově-frekvenční analýzu ve výše uvedeném smyslu, musí být tedy dobře lokalizovány současně v čase i ve frekvenci. Vzhledem ke (3.8) jsou to ovšem protichůdné požadavky, kterým lze rozumně vyhovět pouze v případě, že jak  $\psi(t)$  tak  $\widehat{\psi}(f)$  se rychle tlumí (konvergují k nule) pro  $t, f \rightarrow \pm\infty$ . Navíc musíme pro  $\psi$  a  $\widehat{\psi}$  a následně i pro

$\psi_{j,k}$  a  $\widehat{\psi}_{j,k}$  být schopni určit jejich střed a šířku, které dále definujeme v 4.1. Taková funkce  $\psi$ , resp.  $\widehat{\psi}$  se pak nazývá **váhovou funkcí časového**, resp. **frekvenčního okna**.

**Definice 4.1.** Funkce  $0 \neq w(t) \in L_2$  se nazývá **váhová funkce okna** (stručně **okno**), jestliže rovněž  $tw(t) \in L_2$ . **Střed**  $t^*$  a **poloměr**  $\Delta_w$  okna  $w$  jsou pak definovány vztahy

$$t^* = \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|w(t)|^2 dt \quad (4.2)$$

a

$$\Delta_w = \frac{1}{\|w\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)|w(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Číslo  $2\Delta_w$  nazýváme **šířkou okna**  $w$ .

Ve statistické terminologii můžeme  $t^*$  volně interpretovat jako “střední hodnotu” a  $\Delta_w$  jako “směrodatnou odchylku” rozložení výkonu  $|w(t)|^2$  funkce (signálu)  $w(t)$ .

*Poznámka 4.2.*

(1) Ověříme nejprve, že za předpokladů uvedených v definici 4.1 integrály (4.2) a (4.3) skutečně existují a jsou konečné, a že tedy pojmy střed a poloměr jsou definovány korektně.

$w(t), tw(t) \in L_2 \Rightarrow |w(t)|^2, t^2|w(t)|^2 \in L_1$ , takže

$$|t||w(t)|^2 \leq |w(t)|^2 \quad \text{pro } |t| \leq 1 \Rightarrow |t||w(t)|^2 \in L_1([-1, 1]) \text{ a}$$

$$|t||w(t)|^2 \leq t^2|w(t)|^2 \quad \text{pro } |t| > 1 \Rightarrow |t||w(t)|^2 \in L_1(\mathbb{R} - [-1, 1]).$$

Celkem tedy  $|t||w(t)|^2 \in L_1$ , což spolu s  $|w(t)|^2 \in L_1$  a  $t^2|w(t)|^2 \in L_1$  zaručuje existenci a konečnost integrálů (4.2) a (4.3).

(2) Navíc dokonce platí  $w(t) \in L_1$ : totiž kromě  $(1+|t|)|w(t)| \in L_2$  (přímý důsledek  $w(t), tw(t) \in L_2$ ) je zřejmě také  $(1+|t|)^{-1} \in L_2$ , takže  $\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt = \langle (1+|t|)|w(t)|, (1+|t|)^{-1} \rangle < \infty$ .

V dalších úvahách bude roli  $w(t)$  hrát základní wavelet  $\psi(t)$  a jeho Fourierova transformace  $\widehat{\psi}(f)$ . Proto navíc předpokládáme  $t\psi(t), f\widehat{\psi}(f) \in L_2$ . Na základě poznámky 4.2(2) je zejména  $\psi \in L_1 \cap L_2$  a proto podle lemmatu 3.7 platí (3.15) a  $\psi$  je tedy vlnka.

Substituce  $u = \frac{t-b}{a}$  v integrálech (4.2) a (4.3) dá zřejmě pro  $w\left(\frac{t-b}{a}\right)$  střed  $b + at^*$  a poloměr  $|a|\Delta_w$ . Pak tedy waveletová transformace (3.12) lokalizuje signál  $x(t)$  v “časovém okně”

$$[b + at^* - |a|\Delta_\psi, b + at^* + |a|\Delta_\psi].$$

Je-li podobně  $f^*$  a  $\Delta_{\widehat{\psi}}$  pořadě střed a poloměr váhové funkce  $\widehat{\psi}$ , pak vzhledem k Besselově-Parsevalově identitě (3.3) přejde (3.12) při užití (3.8) a (3.9) v

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_\psi x)(b, a) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} |a| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f) e^{-i2\pi f b} \overline{\widehat{\psi}(af)} df = \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f) e^{i2\pi f b} \overline{\widehat{\psi}(af)} df, \end{aligned} \quad (4.4)$$

takže vzhledem k  $|e^{i2\pi f b} \overline{\widehat{\psi}(af)}| = |\widehat{\psi}(af)|$  tatáž veličina  $(\mathcal{W}_\psi x)(b, a)$  lokalizuje frekvenční spektrum  $\widehat{x}(f)$  také ve “frekvenčním okně”

$$\left[ \frac{f^*}{a} - \frac{1}{|a|} \Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{f^*}{a} + \frac{1}{|a|} \Delta_{\widehat{\psi}} \right].$$

Celkem tedy dostáváme “časově-frekvenční okno”

$$[b + at^* - |a| \Delta_\psi, b + at^* + |a| \Delta_\psi] \times \left[ \frac{f^*}{a} - \frac{1}{|a|} \Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{f^*}{a} + \frac{1}{|a|} \Delta_{\widehat{\psi}} \right].$$

Věnujme nyní pozornost speciálnímu případu  $a = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , který se uplatňuje při rekonstrukci typu (3) a (4) v odst. 3. Dostaneme tak soubor frekvenčních oken

$$B_j := \left( 2^j f^* - 2^j \Delta_{\widehat{\psi}}, 2^j f^* + 2^j \Delta_{\widehat{\psi}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Jestliže cíleně zvolíme  $\psi$  tak, aby střed  $f^*$  a poloměr  $\Delta_{\widehat{\psi}}$  odpovídajícího frekvenčního okna  $\widehat{\psi}$  byly svázány vztahem  $f^* = 3\Delta_{\widehat{\psi}}$ , pak

$B_j = (2^{j+1} \Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+2} \Delta_{\widehat{\psi}}]$  rozdělují kladnou frekvenční osu  $(0, \infty)$  na disjunktní frekvenční pásma s délkou  $2^{j+1} \Delta_{\widehat{\psi}}$  exponenciálně rostoucí v závislosti na  $j$ .

Potom užitím waveletové integrální transformace (3.12) zjistíme časové intervaly  $[b + 2^{-j} t^* - 2^{-j} \Delta_\psi, b + 2^{-j} t^* + 2^{-j} \Delta_\psi]$ , na nichž spektrální obsah signálu  $x$  s frekvencemi v pásmu  $B_j$  je signifikantní, tj. hodnota  $\tilde{x}(b, 2^{-j}) = |(\mathcal{W}_\psi x)(b, 2^{-j})|$  je nad jistou zvolenou prahovou hodnotou (threshold).

Základem jakési zobecněné waveletové filtrace signálu  $x$  je potom následující obecný postup:

1. Výpočet  $\tilde{x}(b, 2^{-j})$ , resp.  $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$
2. Vhodná modifikace těchto veličin na základě jejich signifikantnosti
3. Zpětná rekonstrukce modifikovaného signálu podle (3.25), resp. podle (2.3).

Modifikaci většinou provádíme s cílem signál **vyhladit**, tj. vyloučit z něj náhodnou šumovou složku. Ta ovšem nejvíce přispívá k vysokofrekvenčním

komponentám signálu, které proto při modifikaci podle vhodné strategie potlačujeme. Těmto otázkám se budeme podrobněji věnovat v následujícím odstavci.

## 5. WAVELETOVÉ VYHLAZOVÁNÍ (FILTRACE)

### Formulace úlohy

Uvažujme aditivní model

$$y(t) = x(t) + e(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde  $y(t)$  jsou pozorované hodnoty,  $x(t) \in L_2$  je neznámá odhadovaná funkce a  $e(t)$  je bílý šum. V diskrétním případě  $y(t)$  jsou ovšem pozorovány pouze na konečné diskrétní většinou ekvidistantní síti  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Vzhledem k linearitě (2.4) dostáváme

$$c_{j,k}(y) = c_{j,k}(x) + c_{j,k}(e)$$

kde  $c_{j,k}(y)$ ,  $c_{j,k}(x)$  a  $c_{j,k}(e)$  jsou waveletové koeficienty pořadě ve waveletových řadách pro  $y(t)$ ,  $x(t)$  a  $e(t)$ . Cílem waveletového vyhlazování je nalezení vhodného modifikačního předpisu  $\mu(\cdot)$  takového, že  $\mu(c_{j,k}(y)) = \hat{c}_{j,k}(x) \approx c_{j,k}(x)$  je dobrým odhadem  $c_{j,k}(x)$ . Tento přístup představuje opět analogii s fourierovskou filtrací, kde modifikujeme Fourierovy koeficienty  $c_j(y)$ . Důležitým speciálním případem je **lineární filtrace**, kde  $\mu(c_j(y)) = \mu_j c_j(y)$ ,  $\mu_j \geq 0$  a  $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  je tzv. **přenosová charakteristika filtru**. Pro pevné  $k$  je příspěvek každého koeficientu  $c_{j,k}(y)$  pouze lokální, takže waveletová reprezentace dovoluje tímto způsobem konstruovat **lokálně adaptivní filtry**, což je její vynikající **nový rys** ve srovnání s klasickými fourierovskými filtry, kde efekt je globální.

Běžně se používají čtyři modifikační techniky pro waveletové koeficienty. První z nich operuje na datech (koeficientech) lineárně, zbývající tři nelineárně.

#### 1. Positive scaling

$$\hat{c}_{j,k}^{\text{pos}} = \mu_{j,k} c_{j,k}(y), \quad \mu_{j,k} \geq 0,$$

která je přímým zobecněním výše zmíněné přenosové charakteristiky.

#### 2. Tvrdé prahování (hard thresholding)

Všechny waveletové koeficienty pod jistou prahovou hodnotou  $\lambda > 0$  se vynulují a ostatní se ponechají beze změny:

$$\hat{c}_{j,k}^{\text{hard}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } |c_{j,k}| < \lambda \\ c_{j,k} & \text{pro } |c_{j,k}| \geq \lambda \end{cases}.$$

### 3. Měkké prahování (soft thresholding)

Velikosti všech waveletových koeficientů se sníží o prahovou hodnotu  $\lambda > 0$ :

$$\widehat{c}_{j,k}^{\text{soft}} = \text{sign}(c_{j,k}) \max(0, |c_{j,k}| - \lambda).$$

### 4. Kvantilové prahování (quantile thresholding)

Podobné jako (2), místo  $\lambda$  se však použije kvantil z množiny všech waveletových koeficientů, tj. např. se vynuluje 30% nejmenších waveletových koeficientů.

Donoho a Johnstone [3, 4, 5] navrhli metodu pro v jistém smyslu optimální volbu prahové hodnoty  $\lambda$ , která je buď univerzální  $\lambda = \sqrt{2 \ln n}$ , kde  $n$  je počet dat, nebo specifická pro každou úroveň měřítka  $j$  ( $\lambda = \lambda_j$ ). Tyto a jiné podobné metody se staly známými pod anglickými názvy **wavelet shrinkage** nebo **wavelet de-noising**.

Při praktických výpočtech ovšem  $c_{j,k}$  počítáme pomocí DWT s využitím vhodného rychlého algoritmu FWT.

Na obr. 2 je ukázka waveletového vyhlazení signálu s nespojitými skoky kontaminovaného simulovaným šumem. V levém sloupci jsou odshora dolů uvedeny pořadě data zašuměná, vyhlazená a originální bez šumu. V pravém sloupci jsou grafy odpovídajících waveletových koeficientů, kde  $k$  je vyneseno na vodorovné ose a  $j$  na svislé ose (číslo 1 odpovídá maximální úrovni). Pro vyhlazení bylo použito Donoho-Johnstonova měkkého prahování. Nespojitě skoky jsou velmi dobře zachyceny s podstatně menším zkreslením (rozvlněním v důsledku tzv. Gibbsova jevu) než by tomu bylo v případě klasické fourierovské filtrace.

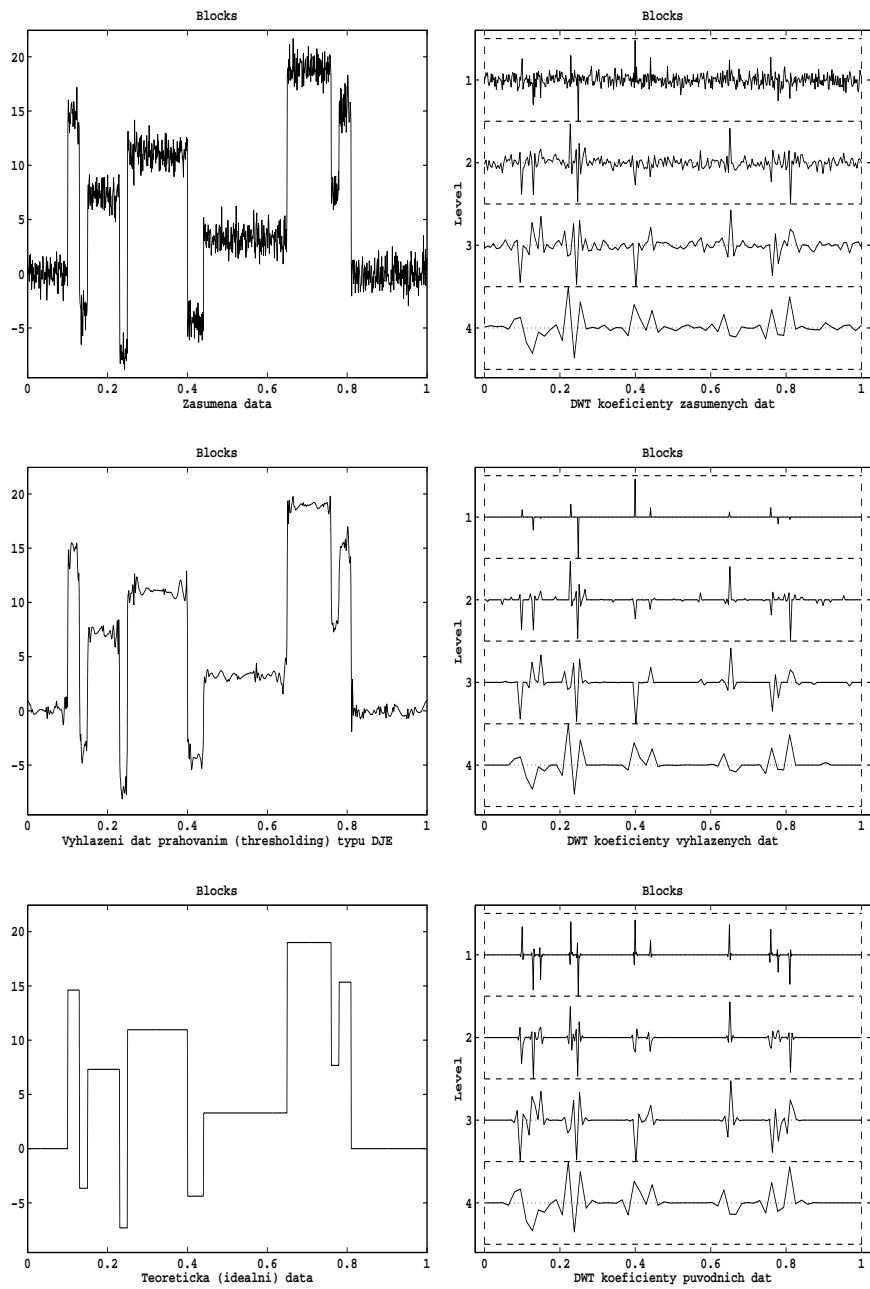
Další ukázky waveletového vyhlazování dat z oblasti životního prostředí lze nalézt v [17].

## 6. MR-ANALÝZA

MR-analýza, neboli analýza o více úrovních rozlišení (z angl. multiresolution analysis), umožňuje jednoduchou aplikací vhodné dvojice lineárních filtrů postupně snižovat nebo zvyšovat rozlišovací schopnost waveletové aproximace.

Nechť  $\psi$  je nějaký mateřský wavelet (ortogonální, semiortogonální nebo biortogonální). Pro každé  $j \in \mathbb{Z}$  uvažujme (uzavřené) podprostory v  $L_2$  generované těmito částečnými součty waveletové řady:

$$W_j = \overline{\mathcal{L}(\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}})} = \{g_j(t) \mid g_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)\} \quad (6.1)$$



OBRÁZEK 2. Ukázka vyhlazení měkkým prahováním

a

$$V_j = \overline{\mathcal{L}(\{\psi_{i,k}\}_{i,k \in \mathbb{Z}, i < j})} = \{x_j(t) \mid x_j(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{i,k} \psi_{i,k}(t)\}. \quad (6.2)$$

Protože waveletový rozvoj (2.3) libovolné funkce  $x \in L_2$  lze přepsat jako

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(t), \quad \text{kde } g_j \in W_j, \quad (6.3)$$

přičemž  $g_j \in W_j$  jsou zřejmě určeny jednoznačně, můžeme celý prostor  $L_2$  psát jako přímý součet ( $\dot{+}$ ) podprostorů  $W_j$

$$L_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \dots \quad (6.4)$$

Je-li mateřský wavelet  $\psi$  ortogonální nebo semiortogonální, pak zřejmě  $W_i \perp W_j$  (podprostory jsou k sobě kolmé) pro  $i \neq j$  a přímý součet (6.4) přejde v ortogonální součet ( $\oplus$ ):

$$L_2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (6.5)$$

Platí následující tvrzení

**Tvrzení 6.1.** *Pro každé  $j \in \mathbb{Z}$  platí*

$$V_j = \overline{\mathcal{L}(\cup_{i=-\infty}^{j-1} W_i)} = \sum_{i=-\infty}^{j-1} W_i = \cdots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1} \quad (6.6)$$

a systém podprostorů  $\{V_j\} := \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  má následující vlastnosti:

- 1°  $\dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$  neboli  $V_{j-1} \subset V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$
- 2°  $\mathcal{L}(\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j) = L_2$
- 3°  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- 4°  $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$ , resp.  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$
- 5°  $x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2t) \in V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$   
 $[\Rightarrow (x(t) \in V_0 \Leftrightarrow x(2^j t) \in V_j), j \in \mathbb{Z}]$ .

*Důkaz.* Rovnice (6.6) a vlastnosti 1° – 4° jsou zřejmé. Vlastnost 5° plyne z následující identity

$$\psi_{j,k}(2^s t) = 2^{-\frac{s}{2}} 2^{\frac{j+s}{2}} \psi(2^j(2^s t) - k) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi_{j+s,k}(t); \quad j, k, s \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$

Pak totiž  $x(t) \in V_j \Rightarrow x(t)$  je lineární kombinací  $\psi_{i,k}(t)$ ,  $i \leq j-1$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$  je lineární kombinací  $\psi_{i,k}(2^s t)$ ,  $i \leq j-1$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$  je lineární kombinací  $\psi_{i+s,k}(t)$ ,  $i \leq j-1$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t)$  je lineární kombinací

$\psi_{n,k}(t)$ ,  $n \leq j + s - 1$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(2^s t) \in V_{j+s}$ . Implikaci  $\Rightarrow$  pak dostaneme pro  $s = 1$  a implikaci  $\Leftarrow$  pro  $s = -1$ .  $\square$

**Definice 6.2.** Řekneme, že funkce  $\phi(t) \in L_2$  **generuje MR-analýzu**  $\{V_j\}$  v  $L_2$ , jestliže generuje posloupnost podprostorů  $\{V_j\}$  s vlastnostmi 1°, 2°, 3° a 5° předpisem

$$V_j = \overline{\mathcal{L}(\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}})}, \text{ kde } \phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = 2^{\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - k2^{-j}}{2^{-j}}\right), \quad (6.8)$$

přičemž  $E_0 = \{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  je Rieszovou bází podprostoru  $V_0$ . Snadno se ověří, že pak také  $E_j = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  jsou Rieszovy báze  $V_j$  pro každé  $j \in \mathbb{Z}$ . Funkci  $\phi(t)$  nazýváme **funkcí měřítka (scaling function) pro MR-analýzu**  $\{V_j\}$ . Zřejmě podobně jako pro  $\psi$  platí  $\|\phi\|_2 = \|\phi_{j,k}\|_2 = 1$  pro každé  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

**Tvrzení 6.3.** *Jestliže  $\phi \in L_2$  generuje MR-analýzu  $\{V_j\}$ , pak*

$$6^\circ \quad x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(t + 2^{-j}) \in V_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

*Důkaz.* 6° plyne podobně jako 5° v důkazu tvrzení 6.1 z identity

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t + s2^{-j}) &= 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j(t + s2^{-j}) - k) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - (k - s)) \\ &= \phi_{j,k-s}(t); \quad j, k, s \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.9)$$

pro  $s = \pm 1$ .  $\square$

*Poznámka 6.4.* Dá se ukázat (viz [6, str. 121]), že

- a) 6°  $\Rightarrow$  3°
- b) 6°  $\Rightarrow$  4° v tom smyslu, že pro každé  $j$  existuje  $W_j$  takové, že  $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$ .

Nemusí však existovat funkce  $\psi$ , která tyto  $W_j$  generuje vztahem (6.1). V důsledku toho se při definici MR-analýzy a funkce měřítka někdy místo 1°, 2°, 3°, 5° předpokládá platnost 1°, 2°, 5° a 6°, takže potom MR-analýza  $\{V_j\}$  v  $L_2$  má všechny vlastnosti 1°–6°. Zde budeme však vždy předpokládat navíc (6.1). V tomto případě se někdy funkce měřítka  $\phi$  nazývá **otcovský wavelet (father wavelet)**, neboť s mateřským waveletem  $\psi$  tvoří přirozenou dvojici. Říkáme pak také, že dvojice  $(\phi, \psi)$  **generuje v  $L_2$  MR-analýzu**  $\{V_j\}$ . Ukázky dvojic  $(\phi, \psi)$  jsou na obr. 1, kde mateřský wavelet je ve sloupci a) a odpovídající otcovský wavelet ve sloupci b).

Nechť  $(\phi, \psi)$  generují MR-analýzu  $\{V_j\}$  v  $L_2$ . Podle (6.2) a (6.3) je  $x_j(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} g_i(t) \approx x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i(t)$  pro každou funkci  $x \in L_2$ .

Přitom  $x_j \in V_j \Rightarrow x_j \xrightarrow{L_2} x$  pro  $j \rightarrow \infty$ .

Tedy  $x_j \in V_j$  aproximuje  $x$  až do  $(j-1)$ -té úrovně rozlišení neboli vzhledem k (4.5) zachycuje frekvenční obsah až do pásma  $B_{j-1}$  včetně. Pak

- $j \rightarrow \infty \Rightarrow$  přesnější aproximace (jemněji zachycuje variabilitu)
- $j \rightarrow -\infty \Rightarrow$  hrubší aproximace  
(ztráta energie modelující variabilitu — rozmazání)



Dostáváme následující vztahy:

$$\begin{aligned} x_j \in V_j &\Rightarrow x_j(t) \stackrel{(6.8)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \phi(2^j t - k); \\ c^j &:= \{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} g_j \in W_j &\Rightarrow g_j(t) \stackrel{(6.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi(2^j t - k); \\ d^j &:= \{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$4^\circ \Rightarrow x_j(t) = x_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (6.12)$$

kde posloupnosti souřadnic  $c^j$  a  $d^j$  jsou jednoznačně určeny, neboť  $\underbrace{\{\phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}_{2^{-\frac{j}{2}} \phi_{j,k}}$  a  $\underbrace{\{\psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}_{2^{-\frac{j}{2}} \psi_{j,k}}$  tvoří Rieszovu bázi pořadě ve  $V_j$  a  $W_j$ .

### Dekompozice v MR-analýze (výpočet $c^{j-1}$ a $d^{j-1}$ pomocí $c^j$ )

Při dekompozici snižujeme úroveň rozlišení o jedna. K tomu bude potřeba vyjádřit  $\phi(2^j t - k) \in V_j$  z (6.10) ve tvaru (6.12).

**Tvrzení 6.5.** *Existují posloupnosti  $a := \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, b := \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$  takové, že platí*

$$\underbrace{\phi(2t - l)}_{\in V_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \underbrace{a_{2k-l} \phi(t - k)}_{\in V_0} + \underbrace{b_{2k-l} \psi(t - k)}_{\in W_0} \right] \quad \forall l \in \mathbb{Z} \quad a, t \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

*Důkaz.* Tvrzení zřejmě platí pro  $l \in \{0, 1\}$ , neboť  $\phi(2t - l) \in V_1$  a tedy při  $j = 1$  existuje podle (6.10)–(6.12) vyjádření

$$\begin{aligned} \phi(2t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m} \phi(t - m) + b_{2m} \psi(t - m)] \quad \text{pro } l = 0 \\ \phi(2t - 1) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m-1} \phi(t - m) + b_{2m-1} \psi(t - m)] \quad \text{pro } l = 1. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že (6.13) platí pro libovolné  $l \in \mathbb{Z}$ .

a)  $l \equiv 2r$  sudé:

$$\begin{aligned} \phi(2t - l) &= \phi(2(t - r)) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m} \phi(t - r - m) + b_{2m} \psi(t - r - m)] = \\ &\stackrel{k=r+m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-2r} \phi(t - k) + b_{2k-2r} \psi(t - k)]. \end{aligned}$$

b)  $l \equiv 2r + 1$  liché:

$$\begin{aligned} \phi(2t - l) &= \phi(2(t - r) - 1) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_{2m-1} \phi(t - r - m) + b_{2m-1} \psi(t - r - m)] = \\ &\stackrel{k=r+m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-2r-1} \phi(t - k) + b_{2k-2r-1} \psi(t - k)]. \end{aligned}$$

□

**Důsledek 6.6.** *Platí tzv. dekompoziční vztah (decomposition relation):*

$$\underbrace{\phi(2^j t - l)}_{\in V_j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{[a_{2k-l}\phi(2^{j-1}t - k)]}_{\in V_{j-1}} + \underbrace{b_{2k-l}\psi(2^{j-1}t - k)}_{\in W_{j-1}} \quad \forall j, l \in \mathbb{Z} \ a \ t \in \mathbb{R}. \quad (6.14)$$

*Důkaz.* Plyne z (6.13), jestliže za  $t$  dosadíme  $2^{j-1}t$ .  $\square$

**Tvrzení 6.7** (Algoritmus dekompozice: výpočet  $c^{j-1}$  a  $d^{j-1}$  z  $c^j$ ).

*Pro  $c^j$  a  $d^j$  ze (6.10) a (6.11) platí následující rekurentní vztah:*

$$c_k^{j-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{2k-l} c_l^j \stackrel{2k-l=n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n c_{2k-n}^j \quad (6.15)$$

$$d_k^{j-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{2k-l} c_l^j \stackrel{2k-l=n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n c_{2k-n}^j, \quad (6.16)$$

kde  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  a  $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jsou posloupnosti z dekompozičního vztahu (6.14).

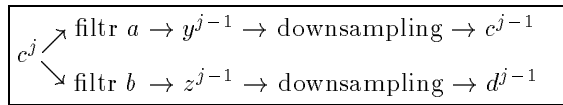
*Důkaz.*

$$\begin{aligned} x_j(t) &\stackrel{(6.10)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j \phi(2^j t - l) = \\ &\stackrel{(6.14)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{2k-l}\phi(2^{j-1}t - k) + b_{2k-l}\psi(2^{j-1}t - k)] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{2k-l} c_l^j}_{c_k^{j-1}} \right) \phi(2^{j-1}t - k) + \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{2k-l} c_l^j}_{d_k^{j-1}} \right) \psi(2^{j-1}t - k) = \\ &= x_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) \end{aligned}$$

z jednoznačnosti rozkladu (6.12) a posloupností souřadnic  $c^{j-1}$  a  $d^{j-1}$ .  $\square$

Označíme-li  $y^{j-1} = \{y_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  a  $z^{j-1} = \{z_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  pro každé  $j \in \mathbb{Z}$ , pak (6.15) a (6.16) definují dva lineární konvoluční filtry pořadě s impulzními odezvami  $a$  a  $b$  pro výpočet  $y^{j-1} = a * c^j$  a  $z^{j-1} = b * c^j$ , kde  $*$  je symbol operátoru lineární konvoluce. Po vynechání hodnot s lichými indexy (tzv. downsampling) dostáváme  $c_k^{j-1} = y_{2k}^{j-1}$  a  $d_k^{j-1} = z_{2k}^{j-1}$ .

Schématicky tedy můžeme algoritmus dekompozice znázornit takto:



## Rekonstrukce v MR-analýze (výpočet $c^j$ pomocí $c^{j-1}$ a $d^{j-1}$ )

Při rekonstrukci naopak zvyšujeme úroveň rozlišení o jedna. K tomu je třeba vyjádřit  $\phi(2^{j-1}t-k)$  a  $\psi(2^{j-1}t-k)$  z (6.10) a (6.11) pomocí  $\phi(2^j t-k)$ .

**Tvrzení 6.8.** *Existují posloupnosti  $p := \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $q := \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$  takové, že platí*

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2t-n) \quad (6.17)$$

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \phi(2t-n). \quad (6.18)$$

*Důkaz.*  $\{p_n\}$  a  $\{q_n\}$  existují podle (6.10), neboť  $\phi \in V_0 \subset V_1$  dle 1° a  $\psi \in W_0 \subset V_1$  dle 4°.  $\square$

**Důsledek 6.9.** *Platí tzv. vztahy dvou měřítek (two-scale relations):*

$$\phi(2^{j-1}t-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t-k) \quad (6.19)$$

$$\psi(2^{j-1}t-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} \phi(2^j t-k). \quad (6.20)$$

*Důkaz.* V (6.17) a (6.18) dosadíme  $2^{j-1}t-l$  místo  $t$ :

$$\begin{aligned} \phi(2^{j-1}t-l) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2(2^{j-1}t-l)-n) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \phi(2^j t-2l-n) \stackrel{k=2l+n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t-k). \end{aligned}$$

Podobně pro  $\psi$ .  $\square$

**Tvrzení 6.10** (Algoritmus rekonstrukce: výpočet  $c^j$  z  $c^{j-1}$  a  $d^{j-1}$ ).

*Pro  $c^j$  a  $d^j$  ze (6.10) a (6.11) platí následující rekurentní vztah:*

$$c_k^j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} c_l^{j-1} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} d_l^{j-1}, \quad (6.21)$$

*kde  $p = \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  a  $q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jsou posloupnosti ze vztahů dvou měřítek (6.19) a (6.20).*

*Důkaz.* Užitím (6.10)–(6.12) dostáváme

$$\begin{aligned}
x_j(t) &= x_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) = \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{j-1} \phi(2^{j-1}t - l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l^{j-1} \psi(2^{j-1}t - l) \stackrel{(6.19)}{=} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ c_l^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{k-2l} \phi(2^j t - k) + d_l^{j-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_{k-2l} \phi(2^j t - k) \right] = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} (p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}) \right]}_{c_k^j} \phi(2^j t - k),
\end{aligned}$$

neboť posloupnost souřadnic  $c^j$  je určena jednoznačně.  $\square$

Označíme-li  $y^{j-1} = \{y_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  a  $z^{j-1} = \{z_m^{j-1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  pro každé  $j \in \mathbb{Z}$ , kde pro každé  $l \in \mathbb{Z}$  klademe

$$\left. \begin{aligned}
y_{2l}^{j-1} &= c_l^{j-1} & z_{2l}^{j-1} &= d_l^{j-1} \\
y_{2l+1}^{j-1} &= 0 & z_{2l+1}^{j-1} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{tzv. upsampling,}$$

pak vztah (6.21) určuje dva lineární konvoluční filtry pořadě s impulzními odezvami  $p$  a  $q$  pro výpočet  $c^j = p * y^{j-1} + q * z^{j-1}$ .

Schématicky tedy můžeme algoritmus rekonstrukce znázornit takto:

$$\boxed{
\begin{array}{l}
c^j \swarrow + \leftarrow \text{filtr } p \leftarrow y^{j-1} \leftarrow \text{upsampling} \leftarrow c^{j-1} \\
\swarrow + \leftarrow \text{filtr } q \leftarrow z^{j-1} \leftarrow \text{upsampling} \leftarrow d^{j-1}
\end{array}$$

Na obr. 3 je ukázka MR-analýzy aplikované na záznam průměrných měsíčních průtoků na řece Morava v Kroměříži v letech 1916–1991 převzatý z [17].

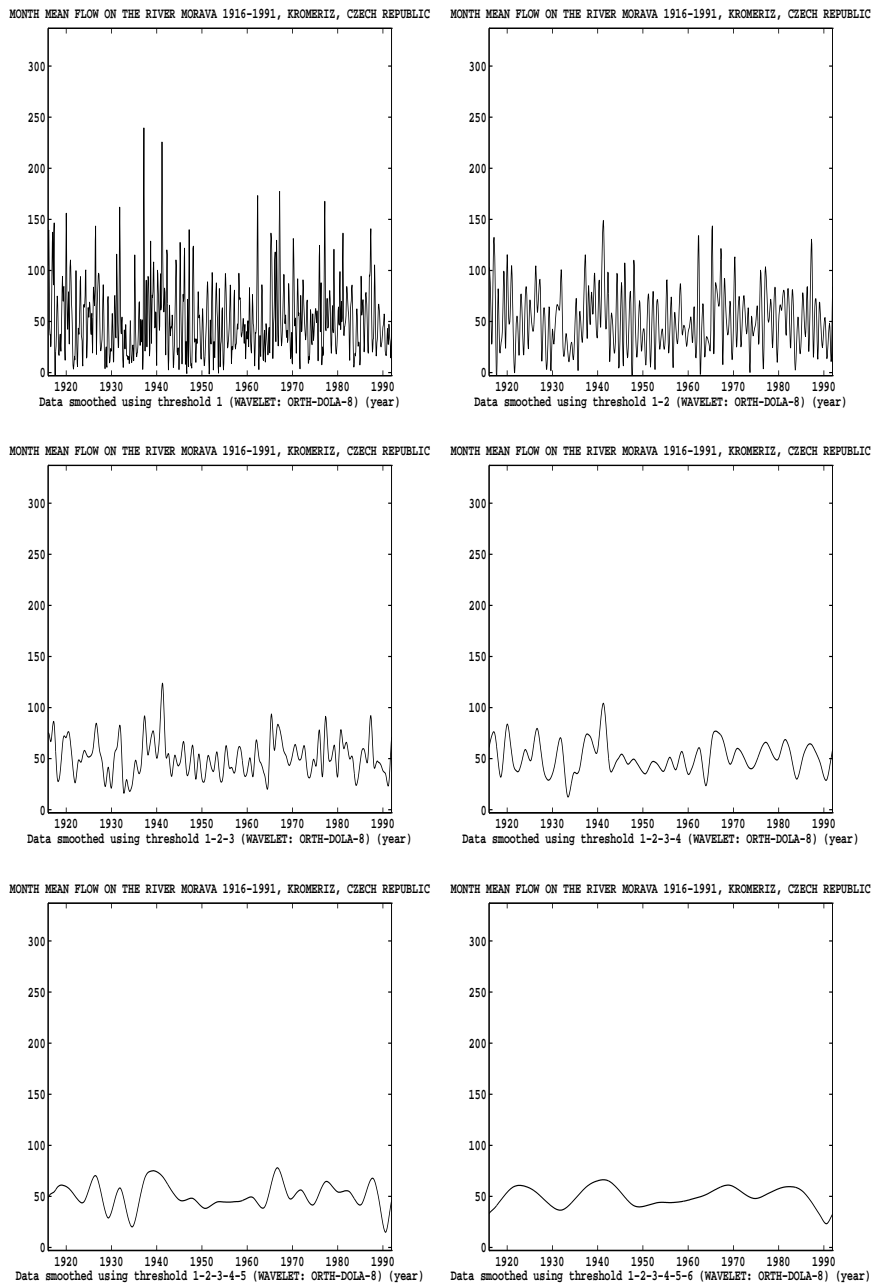
Šest grafů uspořádaných zleva doprava a odshora dolů ukazuje vyhlazení dat s vynulovanými waveletovými koeficienty pořadě v úrovních 1,1–2, . . . , 1–6. Zde 1 odpovídá nejvyšší úrovni aproximace, tj.  $x_{j_{\max}} \in V_{j_{\max}}$ . Z grafů je zřejmý postupný úbytek v rozlišení detailů pro  $j \leq j_{\max}, j_{\max} - 1, \dots$ .

## 7. INFORMACE O SOFTWARE

Existuje několik komerčních i nekomerčních podpůrných softwarových balíků pro práci s wavelety, z nichž bych zmínil tyto:

### WAVELET TOOLBOX:

Firemní komerční knihovna (toolbox) pro numerický výpočetní systém MATLAB firmy MathWorks, Inc. (USA). Doporučuje se používat spolu s další



OBRÁZEK 3. Ukázka MR-analýzy

firemní knihovnou pro zpracování signálů (Signal Processing Toolbox). Pochází z Francie, kde jeho předchozí verze byla známa pod názvem MICRONDE ([10]). V České republice jej spolu se systémem MATLAB a dalšími firemními toolboxy distribuuje firma HUMUSOFT, s.r.o. Praha.

#### WAVBOX 4:

Jedná se o komerční nefiremní toolbox pro MATLAB (viz [16]), jehož starší verze jsou nekomerční a volně dostupné přes FTP. Autorem je Carl Taswell, Stanford University, USA. Jedná se o velmi bohatou a na dalších toolboxech plně nezávislou knihovnu dodávanou vlastně ve zdrojovém tvaru (218 tzv. m-souborů MATLABu, 850 kB). Ukázky na obrázcích 1–3 byly zpracovány právě tímto softwarem.

#### S+WAVELETS:

Komerční firemní přídatný modul do statistického systému S-PLUS firmy StatSci (USA) v tuzemsku distribuovaný firmou Trilobyte, Ltd.

#### WAVETHRESH:

Nekomerční knihovna v jazyce S (předchůdce S-PLUS), jejímiž autory jsou G. P. Nason a B. W. Silverman. Návod k instalaci a použití tohoto softwaru je v [12].

## 8. ZÁVĚR

Pokud si na závěr položíme otázku, zda se při analýze dat vyplatí používat wavelety či nikoli, pak odpověď samozřejmě závisí na typu zpracovávaných dat. Vzhledem k mnoha dobrým vlastnostem představují však rozhodně aparát, který není vhodné ignorovat.

Ve prospěch waveletů hovoří především myšlenková jednoduchost blízka zaběhaným fourierovským přístupům. Oproti nim však nabízí větší pružnost danou lokálním charakterem příspěvků jednotlivých waveletových koeficientů ve waveletové řadě. Například při waveletové filtraci tedy postupujeme obdobně jako při fourierovské filtraci, ovšem s tím podstatným rozdílem, že při redukci  $c_{j,k}$  je vliv shlazení pouze lokální v závislosti na zvoleném  $k$  a nikoliv globální. Waveletový filtr tedy poskytuje **významnou novou kvalitu** v tom, že se může **adaptovat** na lokální charakter dat [1]. Tam kde data vykazují vyšší dynamiku, tj. nesou užitečnou informaci ve vyšších frekvenčních pásmech, můžeme míru redukce vysokofrekvenčních komponent snížit (neboli snížit prahovou hodnotu signifikantnosti) a naopak postupovat v místech, kde je změna jen pozvolná. Tím se odstraňuje hlavní nevýhoda fourierovské filtrace, která v takovém případě má tendenci dynamický úsek přehlédnout. Typickým příkladem může být rozvlnění v okolí nespojitých změn (Gibbsův jev), které jsou ve fourierovském rozvoji dobře vymodelovány až v limitě. V případě waveletů je tento efekt podstatně menší (viz obr. 2), neboť dobrého zachycení skokové změny dosáhneme ponecháním pouze těch

waveletových koeficientů, které modelují průběh v okolí nespojitosti. To co je ovšem v tomto případě výhodou waveletové filtrace, může v jiné situaci působit potíže. Jestliže data jsou zatížena silně nestacionárním šumem, pak úseky s vyšší mírou chybového rozptylu mohou být mylně považovány za dynamické a tedy nedostatečně vyhlazeny. Toto je ovšem spíše problém volby správné strategie vyhlazení, než samotného principu waveletové filtrace.

Dalším nezanedbatelným argumentem ve prospěch waveletů je také výpočetní efektivita. Jestliže pro výpočet DFT existují rychlé algoritmy FFT s výpočtovou složitostí řádu  $O(n \log_2(n))$ , pak v případě FWT složitost mnohdy klesá dokonce až na  $O(n)$ .

Jako žádná jiná metoda, nejsou ovšem ani wavelety universální všelék pro všechny typy úloh, ale v každém případě významně obohacují repertoár dosud běžně používaných technik.

#### LITERATURA

- [1] Felix Abramovich, Yoav Benjamini and Yosef Hochberg, *Adaptive thresholding of wavelet coefficients*, In: Abstracts of the conference "Wavelets and Statistics", Villard-de-Lans, France (Grenoble, France) (Anestis Antoniadis, ed.), XV Recontres Franco-Belges de Statisticiens, Université Pierre Mendès France et Laboratoire IMAG-LMC, November 1994.
- [2] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [3] David L. Donoho and Iain M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*, Technical report, Stanford University, Department of Statistics, Stanford CA 94305, July 1994.
- [4] ———, *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage*, *Biometrika* **81** (1994), 425–455.
- [5] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkycharian and D. Picard, *Wavelet shrinkage: Asymptopia ?*, *J. Royal Statist. Soc. B* **57** (1995), no. 2, 301–337.
- [6] Charles K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 1, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1992.
- [7] Charles K. Chui, *Wavelets: A tutorial in theory and applications*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 2, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1992.
- [8] Yves Meyer, *Wavelets, algorithms & applications*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1993.
- [9] ———, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [10] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, *Un logiciel de traitement par ondelettes de signaux et d'images*, In: Abstracts of the conference "Wavelets and Statistics", Villard-de-Lans, France (Grenoble, France) (Anestis Antoniadis, ed.), XV Recontres Franco-Belges de Statisticiens, Université Pierre Mendès France et Laboratoire IMAG-LMC, November 1994 (French).
- [11] Karel Najzar, *Wavelety a řešení okrajových úloh*, In: sborník kursu Programy a algoritmy numerické matematiky 7, Bratřikov, 13.6–17.6.1994 (Praha), Matematický ústav AV ČR, 1994, pp. 146–154.
- [12] Guy P. Nason and Bernard W. Silverman, *The Discrete Wavelet Transform in S*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **3** (1994), 163–191, (available from anonymous FTP: ftp.statistics.bristol.ac.uk/pub/reports/.../tdwtis.ps.gz).

- [13] Olivier Rioul, *A discrete-time multiresolution theory*, IEEE Transactions on Signal Processing **41** (1993), no. 8, 2591–2606.
- [14] Olivier Rioul and Pierre Duhamel, *Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms*, IEEE Transactions on Information Theory **38** (1992), no. 2, 569–586.
- [15] Ivan Singer, *Bases in Banach spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [16] Carl Taswell, *WavBox 4.3b (Wavelet Toolbox for MATLAB 4.2c)*, January 1996, (Internet URL: <http://www.wavbox.com>).
- [17] Vítězslav Veselý, *Kernel and wavelet smoothing: Basic theory and examples of practical data analysis*, In: Proceedings and abstracts of ESES'96 — Environmental Statistics and Earth Science, Brno (I. Horová, J. Jurečková and J. Vosmanský, ed.), Masaryk University of Brno, Czech Rep., August 1996, pp. 163–174.
- [18] Gilbert G. Walter, *Wavelets and other orthogonal systems with applications*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY, MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ, JANÁČKOVO  
NÁM. 2A, 662 95 BRNO

*E-mail address:* `vesely@math.muni.cz`