

STRUKTURNÍ EKONOMETRICKÝ MODEL

jako obecná interdependentní soustava regresních rovnic

STRUKTURNÍ TVAR modelu je (základní) forma ekonometrického modelu, jejíž jednotlivé rovnice jsou přepisem vztahů vyvozených z ekonomické teorie (*konfirmatorní pojetí*) nebo verifikovaných hypotéz tvůrce modelu (*explorativní pojetí*) a která je charakteristická tím, že

- tvar matice B vztahů propojujících běžné endogenní proměnné je obecná matice $m \times m$ (mající však nulové diagonální prvky).
- v kovarianční matici Σ náhodných složek mohou být korelovány náhodné složky různých rovnic v témže čase, ne však náhodné složky v různých časových okamžicích/pozorováních (ani téže rovnice).

Strukturní tvar modelu se nejčastěji uvádí v zápisu (jde-li o zápis jen v proměnných)

$$(1) \quad y = B.y + C.x + \varepsilon$$

$y_{[m;1]}$ je vektor m běžných endogenních proměnných soustavy m rovnic

$x_{[q;1]}$ je vektor q predeterminovaných proměnných soustavy m rovnic

$B_{[m;m]}$ je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným

$C_{[m;q]}$ je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným

$\varepsilon_{[m;1]}$ je vektor m náhodných složek (poruch, disturbancí) soustavy.

Normování matice B :

abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou (běžnou endogenní) proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B nulové hodnoty (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. $I - B$ předpokládáme, že má plnou hodnost m (dále budeme pracovat s inverzí matice $I - B$). Matice C nebývá zpravidla nijak normována

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však **nesmí být ve všech rovnicích soustavy obsaženy všechny vysvětlující proměnné: proto musí být určitá část koeficientů v maticích B a C nulová.**

Jiná častá forma zápisu strukturního tvaru (jde-li o zápis jen v proměnných) je

$$(2) \quad B.y + C.x = E$$

kde význam všech veličin (proměnných i parametrů) je shodný s předchozí specifikací (1), avšak normování matice B je odlišné :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & b_{34} & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

Pracujeme-li s pozorovanými hodnotami, pak strukturní tvar (1) zapsat jako:

$$(2a) \quad Y = Y.B' + X.C' + E$$

$$(2b) \quad y_{ti} = \sum_{j=1}^m y_{tj} \beta_{ji} + \sum_{k=1}^q x_{tk} \gamma_{ki} + \varepsilon_{ti}$$

$Y_{[T;m]}$ je matice pozorování m vysvětlujících b.endog. proměnných soustavy

$X_{[T;q]}$ je matice pozorování q vysvětlujících predet. proměnných soustavy

$B'_{[m;m]}$ je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným

$C'_{[q;m]}$ je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným

$\varepsilon_{[T;m]}$ je matice „pozorování“ m náhodných složek soustavy .

Všimněme si rozdílů mezi oběma tvary zápisu strukturního tvaru v (1) a (2) :

- V (1) stojí matice parametrů B , C vůči vektorům proměnných y, x nalevo :
Matice B zde obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných 1. regresní rovnice v 1. řádku až koeficienty m -té regresní rovnice v m -tém řádku. Matice C podobně obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných 1. regresní rovnice v 1. řádku až koeficienty u těchto proměnných m -té regresní rovnice v m -tém řádku.
- V (2a) jsou transponované matice parametrů B' , C' vůči maticím Y, X napravo.

První sloupec matice B' obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných 1. regresní rovnice.... až m -tý sloupec matice B' obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných m -té regresní rovnice. Podobně :

1. sloupec matice C' obsahuje regresní koeficienty u predeterminov. proměnných první regresní rovnice až m -tý sloupec C' obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných m -té regresní rovnice.

Obsah j -tého řádku matice B zapsané v (1) je tedy totožný s obsahem j -tého sloupce B' v zápisu (2a) ; $j = 1, 2, \dots, m$. Podobně, obsah k -tého řádku matice B zapsané v (1) je totožný s obsahem k -tého sloupce B' v zápisu (2a); $k = 1, 2, \dots, q$.

Normování matice B : abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou (běžnou endogenní) proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B nulové hodnoty (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. $I - B$ předpokládáme, že má plnou hodnost m (dále budeme pracovat s inverzí matice $I - B$). Matice C nebývá zpravidla nijak normována.

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však **nesmí být ve všech rovnicích obsaženy všechny vysvětlující proměnné : proto musí být určitá část koeficientů v maticích B a C nulová.**

Stochastické předpoklady modelu:

(a) $E(\varepsilon_{ti}) = 0 \quad t = 1, 2, \dots, T ; i = 1, 2, \dots, m$

Náhodné složky jsou centrovány (u kterékoliv rovnice a v kterémkoliv čase) .

(b) $E(\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{sj}) = \partial_{ts} \cdot \sigma_{ij} \quad t, s = 1, 2, \dots, T ; i, j = 1, 2, \dots, m$,

kde symbol ∂_{ts} se nazývá „Kroneckerovo delta“ a nabývá pouze dvou hodnot

$$\partial_{ts} = 1 \text{ pro } t = s$$

$$\partial_{ts} = 0 \text{ pro } t \neq s$$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelovány v různých obdobích, ale mohou být korelovány v témže čase (mezi různými rovnicemi).

(c) $E(x_{ti}, \varepsilon_{tj}) = 0 \quad t = 1, 2, \dots, T ; i = 1, 2, \dots, q ; j = 1, 2, \dots, m$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelované s predeterminovanými proměnnými kterékoliv jiné rovnice v kterémkoliv časovém okamžiku.

(d) $\text{hodnost}(I_m - B) = m$

Podmínka (d) má ten důsledek, že v modelu jsou hodnoty vysvětlovaných běžných endogenních jednoznačně určeny pomocí predeterminovaných proměnných a náhodných složek modelu (je možno odvodit tzv. redukovanou formu modelu).

Kovarianční matice celé soustavy rovnic $\Phi_{[Tm;Tm]}$ má následující tvar :

$$\Phi = \text{Cov}(\varepsilon) = E(\varepsilon \cdot \varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \cdot I_T & \sigma_{12} \cdot I_T & \dots & \sigma_{1m} \cdot I_T \\ \sigma_{21} \cdot I_T & \sigma_{22} \cdot I_T & \dots & \sigma_{2m} \cdot I_T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1} \cdot I_T & \sigma_{mm} \cdot I_T & \dots & \sigma_{mm} \cdot I_T \end{pmatrix}$$

$$= \Sigma \otimes I_T$$

K odhadu modelu tvaru (1) nelze korektně použít obyčejnou metoda nejmenších čtverců OLS ani zobecněnou metodu nejmenších čtverců GLS, neboť tyto neposkytují konzistentní odhady. Konzistentní odhady získáme složitějšími odhadovými technikami, které byly za tímto účelem vyvinuty.

Počet vysvětlujících proměnných modelu $m + q$ (a tedy i počet vysvětlujících proměnných každé rovnice $m_i + q_i$) nesmí být větší než počet pozorování T .

Další užitečný zápis strukturního tvaru interdependentního modelu

Ize provést tak, že v každé rovnici vyjádříme datové struktury (přes T pozorování) jen ve vztahu k proměnným skutečně přítomným v této rovnici :

Libovolnou pevně zvolenou (i – tou) rovnici zapíšeme jako

$$(4) \quad y_i = Y_i \beta^*_{.i} + X_i \gamma^*_{.i} + \varepsilon_i \quad , \text{ kde}$$

$y_{.i}$... **T-složkový vektor běžné endogenní proměnné** vysvětlované i-tou rovnicí

$Y_{.i}$ **$T \times m_i$ matice složená z m_i vektorů pozorování běžných endogenních proměnných skutečně přítomných jako vysvětlující v i-té rovnici.**

Očíslování těchto vektorů je takové, že:

- první rovnice se závisle proměnnou $y_{.1}$ obsahuje jako vysvětlující vektory $y_{.2}, y_{.3}, \dots, y_{.m_1+1}$,

- druhá rovnice se závisle proměnnou $y_{.2}$ obsahuje jako vysvětlující případně navíc vektory $y_{.m_1+2}, y_{.m_1+3}, \dots, y_{.m_2}$ atd.

Množiny těchto vysvětlujících proměnných zpravidla nebudou disjunktní.

$X_{.i}$... **$T \times q_i$ matice složená z q_i vektorů pozorování predeterminovaných proměnných skutečně přítomných jako vysvětlující v i-té rovnici.**

Očíslování těchto vektorů je takové, že :

první rovnice obsahuje jako vysvětlující vektory $x_{.1}, x_{.2}, x_{.3}, \dots, x_{.q_1}$,

druhá rovnice obsahuje případně navíc vektory $x_{.q_1+1}, x_{.q_1+2}, \dots, x_{.q_2}$ atd.

Množiny těchto vysvětlujících proměnných opět zpravidla nebudou disjunktní.

$\varepsilon_{.i}$... **T-složkový vektor náhodných složek i-té regresní rovnice**

$\beta^*_{.i}$.. **m_i - složkový vektor strukturních parametrů příslušných běžným endogenním proměnným skutečně přítomným v i-té rovnici**

$\gamma^*_{.i}$... **q_i - složkový vektor strukturních parametrů příslušných predeterminovaným proměnným skutečně přítomným v i-té rovnici.**

Vektor $\beta^*_{.i}$ je tedy subvektorem $\beta_{.i}$, pokud z něj odstraníme nulové koeficienty u běžných endogenních proměnných, podobně vektor $\gamma^*_{.i}$ je subvektorem $\gamma_{.i}$, když z $\gamma_{.i}$ odstraníme nulové koeficienty u nepřítomných predeterminovaných proměnných.

Zápis (4) na rozdíl od předchozích představuje takový strukturní model, do kterého jsou zahrnuta omezení daná nulovými hodnotami parametrů u vysvětlujících proměnných modelu, pokud se tyto nevyskytují v dané rovnici. Počet vysvětlujících proměnných tedy nebude maximální možný, tj. $m(m-1) + m \cdot q$ nýbrž „jen“ $\sum m_i + q_i$.

Model tvaru (2) resp. (3) je nejkomplicovanější možný lineární ekonometrický model.

Nejjednodušší vícerovnicový model je tzv. **soustava zdánlivě nezávislých lineárních regresních rovnic** („*seemingly unrelated regressions*“ neboli **SUR**), v níž nejsou přítomné žádné běžné endogenní proměnné jako vysvětlující :

$$Y = X \cdot C' + E \quad (3a)$$

$$y_{ti} = \sum_{k=1}^q x_{tk} \gamma_{ki} + \varepsilon_{ti} \quad (3b)$$

K získání konzistentních odhadů modelu tvaru (3) postačuje obyčejná metoda nejmenších čtverců OLS nebo zobecněná metoda nejmenších čtverců GLS uplatněná samostatně na každou rovnici zvlášť nebo souhrnně na všechny modelové rovnice. Metoda poskytne odhady s vlastnostmi rovnocennými jako u kvantifikace jednorovnicového modelu.

Vedle obou krajních situací (**soustava zdánlivě nezávislých regresních rovnic** a **obecný interdependentní model**) jsou typické ještě dvě další zvláštní formy, u kterých sice mohou být běžné endogenní proměnné přítomny na pravé straně, ale jen v určité přesně zadané podobě (jde o **rekursivní** resp. **blokově rekursivní tvar** ekonometrického modelu)

Různé formy specifikace (lineárního) strukturního modelu

verze 1

strukturní tvar
$$y = By + Cx + \varepsilon \quad (1A)$$

s normováním matice B:
$$\beta_{ii} = 0 \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m$$

příslušný redukovaný tvar:
$$y = (I - B)^{-1} Cx + (I - B)^{-1} \varepsilon \quad (1B)$$

verze 2

strukturní tvar
$$\widehat{B}y = \widehat{C}x + \varepsilon \quad (2A)$$

s normováním matice B:
$$\beta_{ii} = 1 \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m$$

příslušný redukovaný tvar:
$$y = \widehat{B}^{-1} \widehat{C}x + \widehat{B}^{-1} \varepsilon \quad (2B)$$

verze 3

strukturní tvar
$$\check{B}y + \check{C}x = \varepsilon \quad (3A)$$

normování matice B:
$$\beta_{ii} = 1 \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m$$

příslušný redukovaný tvar:
$$y = -\check{B}^{-1} \check{C}x + \check{B}^{-1} \varepsilon \quad (3B)$$

verze 4

strukturní tvar
$$\check{B}y + \check{C}x + \varepsilon = 0 \quad (4A)$$

normování matice B:
$$\beta_{ii} = 1 \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, m$$

příslušný redukovaný tvar :
$$y = -\check{B}^{-1} \check{C}x - \check{B}^{-1} \varepsilon \quad (4B)$$