

REDUKOVANÝ TVAR EKONOMETRICKÉHO MODELU

REDUKOVANÝ TVAR modelu je taková forma ekonometrického modelu, v níž každá rovnice popisuje závislost jediné běžné endogenní proměnné toliko na predeterminovaných proměnných a na náhodných složkách modelu. **Koeficienty**, které tento tvar obsahuje, **vyjadřují přímo kvantitativní závislosti vysvětlovaných běžných endogenních proměnných na vysvětlujících predeterminovaných proměnných.**

Matematický zápis redukováného tvaru závisí na tom, zda výchozí strukturní tvar zapíšeme v „symbolickém tvaru“ nebo v zápise „s pozorováními“ a rovněž na tom, který ze zápisů strukturního tvaru uijeme.

1. Redukovaný tvar odvozený ze strukturního zapsaného „symbolicky“

Vzme-li strukturní tvar v podobě

$$(1) \quad y = B \cdot y + C \cdot x + \varepsilon, \text{ potom}$$

dospějeme k redukovánému tvaru převedením matice běžných endogenních proměnných nalevo a násobením vzniklého vztahu zleva maticí $(I - B)^{-1}$, o níž jsme dříve předpokládali, že je regulární: Dostaneme

$$(2) \quad y = (I - B)^{-1} Cx + (I - B)^{-1} \varepsilon, \text{ v němž}$$

jednotlivé výrazy jsou sloupcovými vektory, jak je patrné z dimenzí jednotlivých výrazů

$$y_{[m,1]} = (I - B)^{-1}_{[m,m]} C_{[m,q]} x_{[q,1]} + (I - B)^{-1}_{[m,m]} \varepsilon_{[m,1]}$$

Redukovaný tvar zapsaný „symbolicky“ lze zapsat typičtěji jako

$$(3) \quad y = \Pi x + v, \text{ v němž}$$

$$(4A) \quad \Pi = (I - B)^{-1} C \text{ je matice parametrů redukováného tvaru rozměrů } [m;q].$$

$$(4B) \quad v = (I - B)^{-1} \varepsilon \text{ je vektor náhodných složek reduk. tvaru rozměrů } [m;1].$$

Poznámka

2. Redukovaný tvar odvozený ze strukturního zapsaného „v pozorováních“

Vyjdeme-li ze strukturního tvaru modelu zapsaného „v pozorováních“ jako :

$$(11) \quad Y = Y \cdot B' + X \cdot C' + E, \text{ kde}$$

$Y_{[T;m]}$ je matice T pozorování m b.endogenních proměnných soustavy

$X_{[T;q]}$ je matice T pozorování q predeterminovaných proměnných soustavy

$B_{[m;m]}$ je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným

$C_{[m;q]}$ je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným

$E_{[T;m]}$ je matice „pozorování“ m náhodných složek (poruch) soustavy ,

pak získáme redukovaný tvar převedením běžných endogenních proměnných nalevo a násobením vzniklého vztahu zprava regulární maticí $(I - B')^{-1}$:

$$(12) \quad Y_{[T;m]}(I - B')_{[m;m]} = X_{[T;q]} \cdot C'_{[q;m]} + E_{[T;m]}$$

$$(13) \quad Y = X \cdot C' (I - B')^{-1} + E \cdot (I - B')^{-1}$$

Ve světle předchozího značení je matice $C \cdot (I - B')^{-1}$ maticí transponovanou k Π . O významu prvků této matice často nazývaných **multiplikátory** byla řeč již dříve.

Redukovaný tvar zápise „s pozorováními“ (13) zapíšeme ve vyjádření

$$(13a) \quad Y = X \cdot \Pi' + V'$$

$\Pi' = C' (I - B')^{-1}$ je matice parametrů redukovaného tvaru rozměrů $[q;m]$.

$V' = E' (I - B')^{-1}$ je matice náhodných složek redukovaného tvaru rozměrů $[T;m]$.

Přirozenou otázkou, máme-li redukovaný tvar zapsán v pozorováních, je, jak je možno z pozorovaných hodnot obsažených v maticích X, Y poříditi nějaký odhad matice Π ?¹

Odhad matice koeficientů redukovaného tvaru získáme nejnázem pomocí

prosté/obyčejné metody nejmenších čtverců OLS jako

$$\hat{\Pi}_{[q;m]} = (X'X)^{-1} X'Y$$

¹ Obecně řečeno, je statistický odhad matice Π vždy jednodušší, než odhad strukturních parametrů matic B, C . Intuitivně i proto, že je jich počtem zřetelně méně a dostupná informace obsažená v maticích X, Y je pro oba případy shodná: .

tzn. pomocí OLS-regrese všech m běžných endogenních proměnných na všech q predeterminovaných proměnných. (Matice X, Y mají shodný význam jako dříve)

Kovarianční matici náhodných složek v redukováného tvaru označíme Ω . Má tvar

$$\Omega = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1'}$$
 , protože platí

$$\Omega = \text{Cov}(v) = E(v \cdot v') = (I - B)^{-1} \cdot E(\varepsilon, \varepsilon') \cdot (I - B)^{-1'} = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1'}$$

Jiný možný zápis redukováného tvaru vychází ze zápisu strukturního tvaru

(zápis přes všech m rovnic pro pevné pozorování t) :

$$(I - B)y_t = Cx_t + \varepsilon_t \quad \text{neboli po úpravě}$$

$$y_t = (I - B)^{-1} \cdot Cx_t + (I - B)^{-1} \varepsilon_t$$

$$y_t = \Pi x_t + v_t \quad , \text{ kde nyní zapíšeme}$$

$$\Pi_{[m;q]} = (I - B)^{-1}_{[m;q]} \cdot C_{[m;q]} \quad v_{t[T;1]} = (I - B)^{-1}_{[m;m]} \varepsilon_{t[T;1]}$$

Vektor v_t náhodných složek redukováného tvaru definovaný (pro pevné t) jako

$$v_t = (I - B)^{-1} \cdot \varepsilon_t \text{ má tyto vlastnosti :}$$

a) $E(v_t) = 0$, protože $E(v_t) = E[(I - B)^{-1} \varepsilon_t] = (I - B)^{-1} E\varepsilon_t = 0$.

b) $\text{Cov}(v_t) = (I - B)^{-1} \cdot \Sigma \cdot (I - B)^{-1'}$, protože

$$E[v_t \cdot v_t'] = (I - B)^{-1} \cdot E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t') \cdot (I - B)^{-1'} = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1'} = \Omega$$

c) $E(v_t, v_s) = 0$, protože $E[v_t \cdot v_s'] = E[(I - B)^{-1} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_s' (I - B)^{-1'}]$

pro $t \neq s$ $= [(I - B)^{-1} E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s') (I - B)^{-1'}] = 0$

Parametry matice redukováného tvaru, kterých je dohromady $m \cdot q$ (včetně případných nulových hodnot parametrů) označíme π_{ij} . Lze je vyjádřit jako

$$\pi_{ij} = \sum_{k=1}^m \gamma_{ik} \cdot \beta^{kj} \quad , \text{ kde}$$

β^{kj} je prvek k -tého řádku a j -tého sloupce matice $(I - B)^{-1}$

Poznámka 1 Vztah mezi parametry strukturního tvaru (matice B, C) a parametry redukováného tvaru (matice Π) není rovnocenný : Z prvků matic B, C lze jednoznačně určit prvky matice Π , protože matice $(I - B)$ je nesingulární. Naproti tomu z prvků matice Π není možné jednoznačně určit prvky *obou* matic B, C :

Porovnání počet parametrů strukturního tvaru je celkem $m \cdot (m-1) + m \cdot q$
 počet parametrů redukovaného tvaru celkem jen $m \cdot q$.

Ve schématickém vyjádření :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{31} & \dots & \pi_{5q} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \dots & \pi_{2q} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{32} & \dots & \pi_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \pi_{m3} & \dots & \pi_{mq} \end{pmatrix}$$

Matice parametrů redukovaného tvaru II je obecná matice. Zatímco matice B a C budou mít zpravidla větší počet nulových prvků, počet nulových prvků matice II bude relativně malý.

Příklad: ilustrující postup výpočtu je maximálně zjednodušen²

Uvažujme jednoduchý třírovnicový makroekonomický model se dvěma rovnicemi chování a jednou identitou ve tvaru

$$C_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t \quad - \text{ lineární spotřební funkce (1)}$$

$$I_t = c_3 + b_2 Y_t + c_2 Y_{t-1} + w_t \quad - \text{ lineární investiční funkce (2)}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad - \text{ bilanční identita důchodu (3)}$$

Význam jednotlivých proměnných :

C_t spotřeba domácností v čase t

I_t investice do soukromého sektoru v čase t

Y_t národní důchod v čase t

jsou 3 běžné endogenní proměnné ($m^* = 3$)³

" I " jedničkový vektor

Y_{t-1} ... národní důchod v (předcházejícím) čase $t-1$

G_t veřejné (vládní) výdaje v čase t

jsou 3 predeterminované proměnné ($q = 3$)

u_t náhodná složka 1. rovnice

w_t náhodná složka 2. rovnice

jsou 2 náhodné složky dvou stochastických rovnic

Lineární spotřební funkce (1) vyjadřuje závislost aktuální spotřeby na aktuální úrovni důchodu (už ne na zpožděných hodnotách důchodu a spotřeby).

Lineární investiční funkce (2) vyjadřuje závislost aktuálních investic na současné a o jedno období zpožděné hodnotě důchodu. Zanedbán je možný vliv důchodu zpožděného o více období.

Bilanční identita důchodu(3) propojuje důchod s investicemi, spotřebou a objemem veřejných výdajů při zanedbání salda zahraničních vztahů (export-import) (obchodních, peněžních) a bilance mimořádných výnosů/ztrát.

² Ve spotřební funkci např. chybí zpožděná hodnota spotřeby C_{t-1} , v investiční funkci nevystupuje úroková míra, identita důchodu je „ochuzena“, o čistý export, přírůstek zásob, saldo ztrát atd.

³ Větší význam pro operace s modelem (při kvantifikaci parametrů) má však nikoliv celkový počet rovnic (zde označený m^*), ale počet stochastických rovnic m (získaných po vyloučení identity).

Redukovaná forma modelu je takové vyjádření, ve kterém jsou běžné endogenní proměnné popsány jen pomocí predeterminovaných proměnných I , Y_{t-1} , G_t a náhodných složek u_t , w_t . V důsledku přítomnosti identity půjde vždy pouze o 2 běžné endogenní proměnné.

Postup výpočtu redukované formy modelu

V úvahu přichází výpočet buď prostým dosazováním (postupnou eliminací) nebo maticovými operacemi. Přitom musíme nejprve zvolit, které 2 ze 3 přítomných běžných endogenních proměnných necháme v redukované formě :

3. běžná endogenní proměnná se vyloučí při eliminaci identity.

Zvolme postup s eliminací proměnné I_t : substituujeme

$$(2) \quad I_t = c_3 + b_2 \cdot Y_t + c_2 Y_{t-1} + w_t$$

a dosadíme rovnice do (3).

První modelová rovnice zůstane ve tvaru

$$(1a) \quad C_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t$$

Druhá modelová rovnice tak přejde na tvar

$$(2-3) \quad -C_t + (1 - b_2) \cdot Y_t = c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + w_t$$

Nyní obě rovnice (1a) a (2-3) přepíšeme do maticového tvaru :

$$(4) \quad (I - B) \cdot Y = C \cdot X + I \cdot \varepsilon$$

$$(4a) \quad \begin{bmatrix} 1 & -b_1 \\ -1 & 1-b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Nyní musíme osamostatnit výraz pro každou z obou zbývajících běžných endogenních proměnných, tj. pro C_t a Y_t : Učiníme to invertováním matice

$(I_m - B)^{-1}$ a vynásobením matic C a I na pravé straně maticí $(I - B)^{-1}$:

Protože determinant matice $I_m - B$ je roven $|I - B| = 1 - b_1 - b_2$

a inverzní matice k $I_m - B$ má tvar

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{|I - B|} \begin{bmatrix} 1 - b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dostaneme:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

a dále roznásobením

$$\begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \left\{ \begin{bmatrix} c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 & b_1 c_2 & b_1 \\ c_1 + c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix} \right\}$$

Odtud vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

(5a)

$$C_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 + b_1 c_2 Y_{t-1} + b_1 G_t + (1-b_2) u_t + b_1 w_t \}$$

$$(5b) \quad Y_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_1 + c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + u_t + w_t \}$$

Matice parametrů redukovaného tvaru modelu , která má obecný tvar

$$(6a) \quad \Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{pmatrix}$$

s tímto vyjádřením vztahů mezi parametry strukturního a redukovaného tvaru

$$(6b) \quad \Pi = \begin{pmatrix} \frac{c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3}{1-b_1-b_2} & \frac{b_1 c_2}{1-b_1-b_2} & \frac{b_1}{1-b_1-b_2} \\ \frac{c_1 + c_3}{1-b_1-b_2} & \frac{c_2}{1-b_1-b_2} & \frac{1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}$$

Zde máme celkem 5 parametrů (omezeného) strukturního tvaru b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 a celkem 6 nenulových parametrů (omezeného) redukovaného tvaru $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}$.

Všimněme si ještě rozdílu mezi počty parametrů strukturního a redukovaného tvaru, jestliže bereme v úvahu omezení položená na parametry modelu :

Neomezený strukturní tvar modelu (1), (2-3) má celkem $2.1+2.3 = 8$ parametrů

Neomezený redukovaný tvar modelu má celkem jen $2.3 = 6$ parametrů

Omezený strukturní tvar modelu má celkem jen 5 parametrů zatímco

Omezený redukovaný tvar modelu má celkem 6 parametrů

Poznámka 2 Zznamenejme, že inverzi v $(I_m - B)$ lze provést jen tehdy, jestliže platí

$$b_1 + b_2 \neq 1$$

Parametr b_1 přitom pochází z rovnice spotřeby, zatímco parametr b_2 z na ní nezávislé rovnice investic. Zmíněné omezení tedy nemá ekonomickou příčinu.

Poznámka 3 Zatímco každé omezení položené na parametry *strukturního tvaru* znamená snížení počtu odhadovaných *parametrů strukturního tvaru* o 1, neplatí zdaleka obdobná relace pro parametry redukovaného tvaru: protože jsou parametry určeny vztahem (6b), jen zřídkakdy nabude parametr *omezeného redukovaného tvaru* hodnotu 0.

V předchozím případě jsme postupovali tak, že jsme se zaměřili na vyloučení běžné endogenní proměnné *investice*. Mohli jsme však také postupovat tak, že bychom pomocí identity vyloučili např. proměnnou *spotřeba* (nebo *důchod*).

Ukážeme, že při odvození redukované formy nezáleží na tom, kterou z běžných endogenních veličin na počátku vylučujeme, jinými slovy, že ta část (ten řádek) redukované formy, která je společná oběma postupům (zde tvar rovnice pro důchod) zůstane beze změn.

$$(6b) \quad \Pi = \begin{pmatrix} \frac{c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3}{1 - b_1 - b_2} & \frac{b_1 c_2}{1 - b_1 - b_2} & \frac{b_1}{1 - b_1 - b_2} \\ \frac{c_1 + c_3}{1 - b_1 - b_2} & \frac{c_2}{1 - b_1 - b_2} & \frac{1}{1 - b_1 - b_2} \end{pmatrix}$$

Poznámka 4 Poněkud předběhneme, uvedeme-li, že klíčovou záležitostí pro možnost odhadu parametrů modelu je kladná odpověď na otázku, zda lze ze znalosti matice Π získat jednoznačně všechny strukturní parametry. V našem případě to možné je, protože např.

$$\text{zřejmě} \quad b_1 = \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}} \quad c_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{13}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{23}}$$

$$\text{dále: z } 1 - b_1 - b_2 = \frac{b_1}{\pi_{13}} \quad b_2 = 1 - b_1 - \frac{b_1}{\pi_{13}} = 1 - \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}} - \frac{\pi_{13}}{\pi_{13} \cdot \pi_{23}} = \frac{\pi_{23} - \pi_{13} - 1}{\pi_{23}}$$

Protože $1 - b_1 - b_2 = \pi_{23}$, máme dále $c_1 + c_3 = \pi_{23} \cdot \pi_{13}$

$$c_1(1 - b_2) + b_1 c_3 = \pi_{11} \cdot \pi_{23}$$

$$c_1 \left(1 - \frac{\pi_{23} - \pi_{13} - 1}{\pi_{23}}\right) + \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}} \cdot c_3 = \pi_{11} \cdot \pi_{23} \quad c_1 \left(\frac{\pi_{13} + 1}{\pi_{23}}\right) + \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}} \cdot c_3 = \pi_{11} \cdot \pi_{23}$$

Postup 2

Eliminujeme nyní *spotřebu* z identity (3), kde dostaneme $C_t = Y_t - I_t - G_t$

a dosadíme do první rovnice

$Y_t - I_t + G_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t$, načež ji upravíme do tvaru

$$(1 - b_1)Y_t - I_t = c_1 - G_t + u_t$$

Současně ve druhé rovnici převedeme běžné endogenní Y_t, I_t proměnné nalevo

$$I_t - b_2 \cdot Y_t = c_3 + c_2 \cdot Y_{t-1} + w_t$$

a vytvoříme maticovou podobu strukturního tvaru s těmito dvěma běžnými endogenními proměnnými:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} 1 & -b_2 \\ -1 & 1-b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_t \\ u_t \end{pmatrix}$$

(Nejprve jsme zapsali rovnici pro investice, potom rovnici pro důchod). Dále již postupujeme obvyklým způsobem:

Invertujeme matici $(I_2 - B)$ a dostaneme (determinant je opět roven $1 - b_1 - b_2$)

$$(I_2 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-b_1}{1-b_1-b_2} & \frac{b_2}{1-b_1-b_2} \\ \frac{1}{1-b_1-b_2} & \frac{1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}$$

a po vynásobení matic C a I na pravé straně maticí $(I - B)^{-1}$ máme (8)

$$\begin{pmatrix} I_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_t \\ u_t \end{pmatrix}$$

Odtud vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

$$I_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_3 - b_1 c_3 + c_1 b_2 + (c_2 - c_2 b_1) Y_{t-1} + b_2 G_t + (1-b_1) u_t + b_2 w_t \}$$

$$Y_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_1 + c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + u_t + w_t \} \quad (9a-b)$$

Konečně ukážeme, že i třetí postup (s vyloučením důchodu Y_t) vede k získání rovnic redukovaného tvaru pro investice I_t a spotřebu C_t :

Postup 3

Do obou rovnic (1), (2) dosadíme za důchod Y_t z identity (3). Máme soustavu

$$C_t = c_1 + b_1(C_t + I_t + G_t) + u_t \quad (1^*)$$

$$I_t = c_3 + b_2(C_t + I_t + G_t) + c_2 Y_{t-1} + w_t \quad (2^*)$$

kteřou opět přepíšeme do maticové podoby

$$(10) \quad \begin{bmatrix} 1-b_1 & -b_1 \\ -b_2 & 1-b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & b_1 \\ c_3 & c_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Opět invertujeme matici $(I_2 - B)$ a dostaneme (determinant je i zde roven hodnotě $1 - b_1 - b_2$)

$$(I_2 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-b_2}{1-b_1-b_2} & \frac{b_1}{1-b_1-b_2} \\ \frac{b_2}{1-b_1-b_2} & \frac{1-b_1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}, \text{ takže dostaneme}$$

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ b_2 & 1-b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & 0 & b_1 \\ c_3 & c_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ b_2 & 1-b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Odtud již snadno vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

$$C_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 + b_1 c_2 Y_{t-1} + b_1 G_t + (1-b_2) u_t + b_1 w_t \}$$

(11a-b)

$$I_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} \cdot \{ c_1 b_2 + c_3 - b_1 c_3 + (c_2 - b_1 c_2) Y_{t-1} + b_2 G_t + (1-b_1) u_t + b_2 w_t \}$$

I v tomto případě jsme se tedy dopracovali k tvarům shodným s předchozími výsledky. Srovnej (11a) s (5a), resp. (11b) s (9a).

Poznámka 4 Povšimněme-si, že omezení na parametry modelu $b_1 + b_2 \neq 1$, podmiňující vyvození redukovaného tvaru modelu, je nezávisle na tom, který ze tří postupů jsme pro odvození redukovaného tvaru přijali.