Rozhodněte o konvergenci, případně absolutní konvergenci nekonečné řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n!)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(3n)^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}n}{2^n(n+1)}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)^3}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+2n}$

Postup řešení

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n} = \frac{2}{3} \leq 0,7 < 1$, podle podílového kritéria konverguje absolutně.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n!)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{(n!)^2}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = 0 < 1$, podle limitního podílového kritéria konverguje absolutně.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = 4$, diverguje.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(3n)^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt[n]{5}}{3n} = 0$, podle odmocninového kritéria konverguje absolutně.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}n}{2^n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} 3\frac{(3)^n n}{2^n(n+1)} = 3\lim_{n\to\infty} (\frac{3}{2})^n \frac{n}{n+1} = \infty$, nekonverguje, není splněna nutná podmínka konvergence.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)^3}$

$a_n = \frac{2(n+2)-1}{(n+2)^3} = 2\frac{n+2}{(n+2)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} = 2\frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+2)^3} < 2\frac{1}{(n+2)^2}$, tedy podle srovnávacího kritéria konverguje absolutně.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+2n}$

$|a_n| = \frac{n+1}{(n+1)^2-1} > \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)}$, podle srovnávacího kritéria absolutně nekonverguje,

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2n} = 0$, nutná podmínka konvergence je splněna, navíc: $|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{n+2}{(n+2)^2-1} - \frac{n+1}{(n+1)^2-1} = \frac{(n+2)((n+1)^2-1)-(n+1)((n+2)^2-1)}{((n+2)^2-1)((n+1)^2-1)} = \frac{-(n+2)(n+1)-1}{((n+2)^2-1)((n+1)^2-1)} < 0$, tedy posloupnost absolutních hodnot členů je klesající, takže původní alternující řada konverguje relativně.