Masarykova univerzita v Brně
Ekonomicko–správní fakulta

Matematika B

distanční studijní opora

Miloslav Mikulík
Luboš Bauer

Brno 2005

Socrates
Grundtvig

Education and Culture

Tento projekt byl realizován za finanční podpory Evropské unie v rámci programu SOCRATES — Grundtvig.
Za obsah produktu odpovídá výlučně autor, produkt nereprezentuje názory Evropské komise a Evropská komise neodpovídá za použití informací, jež jsou obsahem produktu.

This project was realized with financial support of European Union in terms of program SOCRATES — Grundtvig.
Author is exclusively responsible for content of product, product does not represent opinions of European Union and European Commission is not responsible for any uses of informations, which are content of product

Recenzoval: Doc. RNDr. Jindřich Klapka, CSc.

Matematika B

Vydala Masarykova univerzita v Brně

Ekonomicko–správní fakulta

Vydání první

Brno, 2005

ISBN 80-210-3640-0

Identifikace modulu

Znak

- KMMATB

Název

- Matematika B

Určení

- kombinované bakalářské studium

Garant/autor

- doc. RNDr. M. Mikulík, CSc.

Spoluautor

- RNDr. L. Bauer, CSc.

Cíl

Vymezení cíle

Cílem textu „Matematika B“ je přiblížit čtenáři ty partie matematiky, které jsou potřebné ve statistice a řadě ekonomických disciplín. Cílem textu není naučit studenta provádět perfektně numerické výpočty. Jde o to, aby čtenář **pochopil** jednotlivé matematické pojmy a naučil se je používat při řešení úloh ekonomického charakteru. To ale neznamená, že by se neměl brát zřetel i na numerickou stránku.

Dovednosti a znalosti získané po studiu textů

Student by se měl naučit kritickému přístupu k numerickým výpočtům, obzvláště v případě, že nad jejich prováděním nemá dostatečnou kontrolu (zaokrouhlování čísel, nevhodný výpočtový postup atd.). Student by měl získat schopnost používat posloupnosti a řady a to zejména ve finanční matematice. Měl by získat dostatečné znalosti z diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné a více proměnných potřebné v aplikacích.

Časový plán (Pro celý předmět)

- prezenční část 12 hodin
- samostudium 102 hodin
- elaboráty 16 hodin

Celkový studijní čas: 130 hodin

Způsob studia

Studijní pomůcky

doporučená literatura:

- Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*. ISBN 80-85849-78-X
- Jan Coufal, Jindřich Klůfa, Miloš Kaňka, Jiří Henzler: *Učebnice Matematiky pro ekonomické fakulty*. ISBN 80-7187-1484

Vybavení

– internet

Návod práce se studijními texty

Učební text předpokládá znalost středoškolské matematiky minimálně v rozsahu uvedeném v učebním textu „Matematika A“.

Učební text „Matematika B“ je rozdělen do osmi kapitol. Každá kapitola je dále členěna do podkapitol.

Na začátku každé kapitoly je uveden cíl, kterého by se studiem kapitoly mělo dosáhnout. Na konci kapitoly je shrnutí učiva a úlohy k procvičení. Na uvedený cíl i na uvedený souhrn je nutno se dívat orientačně. Jsou zde uvedeny pouze hlavní body. Jednotlivé kapitoly je nutno studovat podrobněji.

Jednotlivé pojmy jsou sice zaváděné definicemi a vztahy mezi nimi matematickými větami, avšak nedoporučuji se definicím a větám učit „slovo od slova“. Je nutno všemu porozumět a říci to vlastními slovy, případně s doprovodným náčrtkem. Jde o znalosti a ne o definice a věty.

Doufám, že zvolená úprava textu zvýší jeho čitelnost. Zavádění vybraných důležitých pojmů a jejich vlastností je vloženo do rámečků. Na text vytištěný malým písmem se dívejte jen jako na orientační text. Slouží k získání nadhledu.

Na odhad potřebný k samostudiu se dívejte jen orientačně. Látka obsažená v „Matematika B“ je částečně probírána (nebo má být probírána) na gymnáziích. Záleží tedy na znalostech, s nimiž ke studiu přistupujete.

Upozorňuji, že důkazy vět nejsou předmětem zkoušky. Kdo však chce látce dokonale porozumět, neměl by je zcela zavhrnout.

Několik poznámek ke studiu.

Bylo by ideální, abyste na každé soustředění byli připraveni, to znamená, abyste studovali látku dopředu. Na soustředěních byste se mohli pak zaměřit na část nepochopeného textu.

Během semestru musíte vypracovat dva eleboráty, jejichž zadání dostanete od svého tutora s termínem odevzdání. Tutor má právo tento termín posunout.

Dovoluji si Vás upozornit, že tato forma studia vyžaduje pravidelnost a soustavnost. V tomto učebním textu se seznamujete s větším počtem pojmů než v „Matematice A“. Proto je nutno pravidelně studovat.

Informace o zkoušce. Každý musí složit zkoušku v termínu, který je stanoven studijním řádem. Zkouška sestává ze dvou částí: z písemné a z ústní. Obě tyto části absolvujete ve stejný den. Písemná zkouška obsahuje 4–6 otázek, výpočet příkladů a případně teoretické otázky. Obtížnost příkladů je stejná jako u příkladů na konci každé kapitoly, resp. u příkladů v textu. U zkoušky můžete používat kalkulačku a seznam vzorců, které si vlastnoručně napíšete.

Ústní zkouška je zaměřena převážně na teorii. *Upozorňuji, že důkazy vět se nezkoušejí. Definice a věty se neučte doslova. Uvádějte je vlastními slovy.*

Obsah

Stručný obsah

Úplný obsah

Úvod

Úvod

Znalosti diferenciálního a integrálního počtu jsou předpokladem při řešení řady ekonomických problémů. Výklad je zaměřen na výklad matematického aparátu potřebného při řešení konkrétních problémů. I tak je rozsah poměrně značný. Řešení praktických úloh je nutno většinou provádět na počítači. Proto porozumění jednotlivým pojmům a vztahům mezi nimi je důležitější než mechanické počítání.

Tento učební text vychází z pilotní verze studijního textu Matematika B. Některé pasáže z pilotní verze byly přepracované. Doufám, že to přispělo ke zvýšení srozumitelnosti výkladu. Přesto se může stát, že při studiu narazíte na překlep. Předem se za každý případný překlep omlouvám. Prosím, abyste mne informovali o Vašich potížích při studiu tohoto textu. (Tel. 601 305677).

Rád bych poděkoval panu Bc. Davidu Holcovi, který text nejen pečlivě vysázel, ale i vytvořil všechny obrázky uvedené v textu. Jimi přispěl nemalou mírou k jeho čitelnosti. Zároveň mu děkuji za tvůrčí přístup při přepisování textu.

Autor

- Zavedení pojmu posloupnosti
- Aritmetická a geometrická posloupnost
- Limita posloupností
- Vlastnosti posloupností reálných čísel
- Posloupnosti funkcí
- Nekonečné řady
- Řady funkcí
- Shrnutí, úlohy

1. Posloupnosti a řady

Cíl kapitoly

- Seznámit se s pojmem posloupnosti, zejména posloupnosti reálných čísel.
- Seznámit se s aritmetickými a geometrickými posloupnostmi. Pro tyto posloupnosti zvládnout výpočet n–tého členu užitím prvního členu a diference u aritmetické posloupnosti a prvního členu a kvocientu u geometrické posloupnosti. Osvojit si výpočet prvních n členů těchto posloupností.
- Seznámit se s pojmem limity posloupnosti reálných čísel a s pojmem divergence posloupnosti reálných čísel.
- Naučit se určovat limitu posloupnosti vytvořené z jiných posloupností, jejichž limity jsou známé.
- Seznámit se se zavedením Eulerova čísla e.
- Seznámit se s pojmem nekonečné číselné řady a se způsobem zavedení jejího součtu. Seznámení se s pojmem divergence číselné řady.
- Zavedení pojmu absolutní konvergence řad.
- Seznámit se s metodami na určování konvergence resp. divergence nekonečné číselné řady.
- Seznámit se se základními pojmy posloupností funkcí a řad funkcí.

Časová zátěž

Předpokládaná náročnost je 10 hodin.

Úvod. V této kapitole pojednáme o posloupnostech a řadách. S těmito pojmy jste se již setkali. Hlavní pozornost věnujte aritmetickým a geometrickým řadám. Mají uplatnění např. ve finanční matematice. V aplikacích se setkáváme i s posloupnostmi a řadami funkcí. Číselná řada představuje číslo, ovšem jen v případě, že je konvergentní. Proto je v této kapitole věnována pozornost i metodám na zjišťování konvergence řady. Kriteria pro zjišťování konvergence řad není nutno znát zpaměti, ale je nutno se v nich dobře orientovat a správně je aplikovat v konkrétních případech.

Posloupnosti a řady se často používají v numerických metodách matematiky.

1.1 Zavedení pojmu posloupnosti

příklady posloupností

Začněme s několika příklady.

Příklad 1.1. Předpokládejme, že na začátku roku je založen účet se vstupním vkladem Z. Úrok ve výši $p\%$ se k vkladu připisuje vždy na konci roku a takto vzniklá částka se dále úročí. Určete částku S_n, na níž se vstupní kapitál Z zúročí za n let.

Řešení. Úrok se počítá podle vzorce

$$u = K \cdot i \cdot t, \tag{1.1}$$

kde $i = \frac{p}{100}$, t je doba v rocích, K kapitál, z něhož se počítá úrok. Za první rok se vložený kapitál Z zvýší o úrok Zi, tedy na částku

$$S_1 = Z + Zi. \tag{1.2}$$

Je tedy na začátku druhého roku na účtě kapitál

$$S_1 = Z(1 + i). \tag{1.3}$$

Tento kapitál vzroste za druhý rok o úrok $S_1 i$, tedy na částku

$$S_2 = S_1 + S_1 i. \tag{1.4}$$

Je tedy po druhém roce na účtě podle (1.3), (1.4) kapitál

$$S_2 = Z(1 + i)^2.$$

Tímto způsobem postupujeme dále. Po n-tém roce je na účtě kapitál

$$S_n = Z(1 + i)^n.$$

Je-li např. $p = 2\%$, $Z = 1000\,\text{Kč}$, je za 10 let na účtě kapitál

$$S_{10} = 1000 \cdot (1 + 0,02)^{10},$$

to jest

$$S_{10} = 1219 \text{ Kč}.$$

Ke každému přirozenému číslu n jsme tedy přiřadili číslo S_n. Budeme říkat, že čísla

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

tvoří (nekonečnou) posloupnost.

Příklad 1.2. Uvažujme interval $\langle a, b\rangle$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou čísla, pro něž platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1.5}$$

Potom k číslu n je přiřazeno n intervalů

$$\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle.$$

Toto rozdělení označme D_n.

Budeme říkat, že

$$D_1, D_2, D_3, \ldots \tag{1.6}$$

tvoří posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Přikročme nyní k definování posloupnosti.

Definice 1.1. (Posloupnost)
Nechť M je množina nějakých objektů. Každé zobrazení definované na množině přirozených čísel se závislým oborem M nazveme *(nekonečnou) posloupností* v M. Každé zobrazení definované na množině $\{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme konečnou posloupností.

Jestliže M je množina reálných (komplexních) čísel, budeme mluvit o posloupnosti reálných (komplexních) čísel.

Nechť $a(n)$ je funkce definovaná na množině přirozených čísel. Jak bylo uvedeno, tvoří čísla

$$a(1), a(2), \dots \tag{1.7}$$

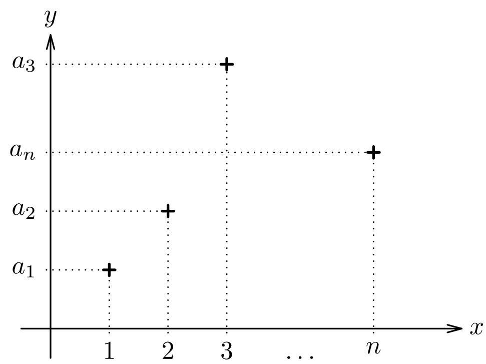
posloupnost. Místo $a(n)$ jsme zvyklí u posloupností psát a_n. Číslo a_n nazýváme n-tým členem posloupnosti. Posloupnost (1.7) lze pak psát jako

$$a_1, a_2, \dots \tag{1.8}$$

nebo jako

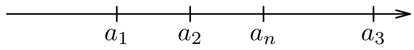
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,. \tag{1.9}$$

Na obr. 1.1 je znázorněno několik členů dané posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel.



Obrázek 1.1: Body reprezentující členy posloupnosti.

Ke grafickému znázornění posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel stačí většinou znázornit průměty bodů $[n, a_n]$, $n = 1, 2, \dots$ do osy y. Tuto osu jsme zvyklí kreslit na vodorovnou přímku. Viz obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Znázornění posloupnosti.

Jako příklad uveďme posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Jestli n-tý člen této posloupnosti označíme a_n, to jest, jestliže $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, je např. $a_5 = \frac{1}{25}$, $a_7 = \frac{1}{49}$, atd.

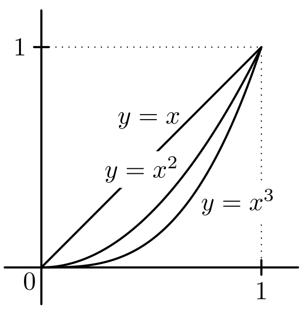
Jestliže M je množina funkcí, definovaných na intervalu I, budeme mluvit o posloupnosti funkcí. Jestliže se tedy ke každému přirozenému číslu n přiřadí funkce $f_n(x)$, $x \in I$, dostáváme posloupnost

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots \qquad x \in I.$$

Zapisujeme ji též jako

$$\{f(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in I.$$

Jako příklad uveďme posloupnost funkcí $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Na obr. 1.3 jsou nakresleny první tři členy této posloupnosti.



Obrázek 1.3: Posloupnosti funkcí $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zopakujme si následující speciální číselné posloupnosti, které byste měli znát z dřívějšího studia.

1.2 Aritmetická a geometrická posloupnost

aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost. Číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme aritmetickou, jestliže existuje takové číslo d, zvané *diference*, že

$$a_{n+1} - a_n = d, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.10}$$

Jako příklad uveďme posloupnost

$$\left\{\frac{n+3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.11}$$

Označíme-li $a_n = \frac{n+3}{5}$ pro $n = 1, 2, \dots$, dostáváme

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+3}{5} - \frac{n+3}{5}.$$

Po úpravě

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5} \qquad \text{pro } n = 1, 2, \dots .$$

Je tedy posloupnost (1.11) aritmetická.

Aritmetická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena např. prvním členem a_1 a diferencí d. Potom

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad n = 2, 3, \dots \tag{1.12}$$

V různých aplikacích se pracuje se součtem s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Připomeňme si, že

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{1.13}$$

Jako příklad si uveďme aritmetickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v níž

$$a_1 = \frac{4}{5}, \quad d = \frac{1}{5}. \tag{1.14}$$

V tomto případě je podle (1.12)

$$a_n = \frac{4}{5} + (n-1) \cdot \frac{1}{5}.$$

Po úpravě dostáváme

$$a_n = \frac{n+3}{5}.$$

Např. $a_5 = \frac{5+3}{5}$, to jest $a_5 = \frac{8}{5}$. V tomto příkladě je např. podle (1.13)

$$s_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5,$$

takže po dosazení

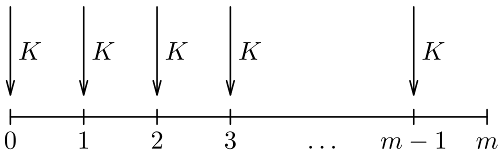
$$s_5 = \frac{\frac{4}{5} + \frac{8}{5}}{2} \cdot 5.$$

Po vyčíslení dostáváme

$$s_5 = 6.$$

Příklad 1.3. Předpokládejme, že na konto v peněžním ústavu začneme ukládat částku K na začátku každé m-tiny roku (m je dané přirozené číslo). Částka K uložená na začátku j-té m-tiny roku, $j = 1, 2, \dots, m$, se úročí danou úrokovou mírou $p\%$ po dobu $t = \frac{m-j+1}{m}$ roku. Na konci roku se úroky připisují najednou na uvedené konto. Určeme uloženou částku i s úrokem z této částky za dobu jednoho roku.

Řešení. Na obr. 1.4 je na číselné ose vyznačeno rozdělení roku na m stejně dlouhých období a vyznačeny vklady ve výši K na začátku každé m-tiny roku. Položme $i = \frac{p}{100}$. První vklad se úročí po dobu celého roku, takže je



Obrázek 1.4: Znázornění vkladů.

z něho podle (1.1) úrok ve výši

$$u_1 = Ki\frac{m}{m}.$$

Druhý vklad se úročí po dobu $\frac{m-1}{m}$ roku, takže ke konci roku je z něho úrok

$$u_2 = Ki\frac{m-1}{m}.$$

Tímto způsobem dále postupujeme. Poslední m-tý vklad se úročí po dobu $\frac{1}{m}$ roku, takže ke konci roku je z něho úrok

$$u_m = Ki\frac{1}{m}.$$

Čísla $u_1, u_2, \dots, u_m$ tvoří m členů aritmetické posloupnosti. Jejich součet je

$$s_m = K\frac{i}{m}(m + (m-1) + \dots + 2 + 1)$$

a podle (1.13) odtud dostáváme

$$s_m = K\frac{i}{m}\frac{m+1}{2}m,$$

to jest

$$s_m = K\frac{m+1}{2}i.$$

Na konci roku bude na účtu celkem částka S rovna uložené částce mK vkladů plus úroky ve výši s_m. Je tedy

$$S = mK + K\frac{m+1}{2}i.$$

Úpravou dostáváme

$$S = mK\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right). \tag{1.15}$$

geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost. Číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme geometrickou, jestliže existuje takové číslo q, zvané *kvocient*, že

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{1.16}$$

Jako příklad uveďme posloupnost $\left\{\frac{2^n}{3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Abychom dokázali, že tato posloupnost je geometrická, položme $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ a vypočítejme $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dostáváme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+2}} = \frac{2}{3} \qquad \text{pro } n = 1, 2, \dots .$$

Je tedy daná posloupnost geometrická s kvocientem $q = \frac{2}{3}$.

Geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena např. prvním členem a_1 a kvocientem q. Potom

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n = 2, 3, \dots \tag{1.17}$$

V různých aplikacích se pracuje se součtem s_m prvních m členů posloupnosti. Připomeňme si, že

$$s_m = a_1 \frac{1 - q^m}{1 - q} \qquad \text{pro } q \neq 1. \tag{1.18}$$

Skutečně,

$$s_m = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{m-1}.$$

Úpravou

$$s_m = a_1(1 + q + \dots + q^{m-1}). \tag{1.19}$$

Poněvadž

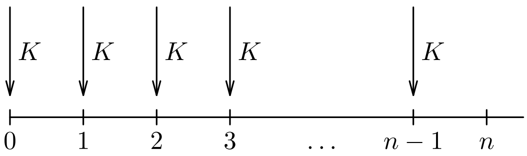
$$(1 - q) \cdot (1 + q + \dots + q^{m-1}) = 1 - q^m, \tag{1.20}$$

dostáváme z (1.19), (1.20) vztah (1.18).

Jako praktický příklad na geometrickou posloupnost je možno uvést výše uvedený příklad 1.1 nebo následující příklad.

Příklad 1.4. Předpokládejme, že na začátku každého roku se uloží na konto částka K. Na konci každého roku se stav konta zvýší o úrok. Určeme částku S na kontě po n letech při roční úrokové míře p%.

Řešení. Na obr. 1.5 jsou na číselné ose vyznačeny vklady na začátku každého roku. Označme $i = \frac{p}{100}$ a počítejme stav konta po n letech. První vklad se



Obrázek 1.5: Znázornění vkladů.

podle příkladu 1.1 zúročí po n letech na částku

$$S_1 = K(1+i)^n. \tag{1.21}$$

Druhý vklad se podle příkladu 1.1 zúročí po $n-1$ letech na částku

$$S_2 = K(1+i)^{n-1}. \tag{1.22}$$

Tímto způsobem pokračujeme dále, až poslední vklad se podle příkladu 1.1 zúročí za jeden rok na částku

$$S_n = K(1+i). \tag{1.23}$$

Stav konta S po n letech bude tedy roven

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n. \tag{1.24}$$

Dosazením (1.21), (1.22), (1.23) do (1.24) dostáváme

$$S = K(1+i)\left[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right]. \tag{1.25}$$

Výraz v hranaté závorce je součet n členů geometrické posloupnosti. Podle (1.18) dostáváme z (1.25)

$$S = K(1+i)\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}.$$

Tedy

$$S = K\frac{1+i}{i}\left((1+i)^n - 1\right). \tag{1.26}$$

1.3 Limita posloupností

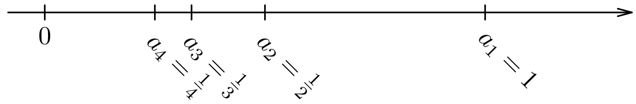
limita posloupnosti

Začněme s několika příklady, jimiž se pokusíme přiblížit čtenáři pojem limity posloupnosti.

Příklad 1.5. Uvažujme posloupnost reálných čísel

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.27}$$

Položme $a_n = \frac{1}{n}$. Znázorněme si několik členů této posloupnosti na číselné ose, viz obr. 1.6. Vidíme, že s rostoucím n se číslo a_n „přibližuje“ k nule, avšak žádné číslo z a_n není rovno 0. Po precizování slova „přibližuje se“ budeme říkat, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnu 0.



Obrázek 1.6: První členy posloupnosti $\{1/n\}$.

Příklad 1.6. Uvažujme posloupnost reálných čísel

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.28}$$

Položme $a_n = \frac{n^2+1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Je tedy

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{5}{2}, \quad a_3 = \frac{10}{3}, \quad a_4 = \frac{17}{4}, \ldots$$

Vidíme, že množina čísel obsahující všechna čísla a_n není shora ohraničená. Budeme říkat, že posloupnost (1.28) diverguje k $+\infty$. Opět je nutno precizovat, co znamená, že posloupnost diverguje k $+\infty$.

Příklad 1.7. Uvažujme posloupnost reálných čísel

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.29}$$

Položme $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Tedy

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1, \ldots$$

Vidíme, že množina obsahující všechna čísla a_n, to jest množina $\{-1, 1\}$, je jak shora, tak i zdola oharničená, avšak čísla a_n se s rostoucím n „nepřibližují“ k žádnému číslu. Budeme říkat, že posloupnost (1.29) diverguje (osciluje).

Po tomto úvodu přikročme k *zavedení pojmu limita posloupnosti*.

Definice 1.2. (Limita posloupnosti)

Nechť M je množina nějakých objektů s metrikou ρ. Dále nechť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.30}$$

je posloupnost prvků z M. Řekneme, že $\alpha \in M$ je *limitou posloupnosti* (1.30), a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \text{nebo} \quad a_n \xrightarrow{\rho} \alpha \ (\text{pro } n \to \infty),$$

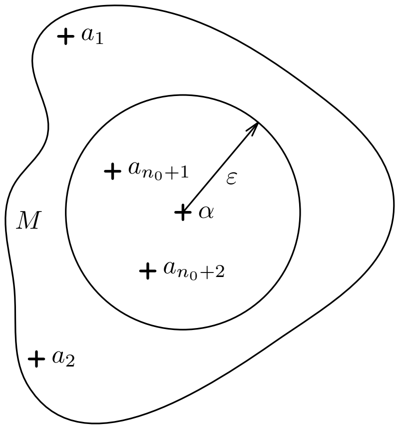
jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$\rho(a_n, \alpha) < \varepsilon.$$

Jestliže posloupnost (1.30) má v M limitu, nazveme ji *konvergentní*. Jestliže posloupnost (1.30) nemá v M limitu, nazveme ji *divergentní*.

Poznámka. Definice 1.2 nic nevypovídá o způsobu nalezení limity posloupnosti. Uvádí pouze jak zjistit, zda určité $\alpha \in M$ je nebo není její limitou. (Jak to zjistit, může být v konkrétních úlohách obtížný problém.)

Na obr. 1.7 je znázorněna konvergentní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou α.



Obrázek 1.7: K definici limity posloupnosti.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, potom $\rho(a_n, \alpha) < \varepsilon$ pro $n > n_0$. Body $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ (tedy konečný počet bodů) mohou mít od α libovolnou vzdálenost. Jestliže

$$\rho(a_n, \alpha) < \varepsilon \tag{1.31}$$

platí pro všechna n s výjimkou konečného počtu bodů, říkáme, že (1.31) platí *skoro všude*.

Definici limity posloupnosti prvků z metrického prostoru M můžeme tedy pozměnit takto:

Definice. Nechť M je množina s metrikou ρ. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in M$, *konverguje k* $\alpha \in M$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ je $\rho(a_n, \alpha) < \varepsilon$ pro skoro všechna n.

Věta 1.1. (Počet limit)

Každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M s metrikou ρ má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M, která má alespoň dvě limity, označme je α, β, kde $\alpha \neq \beta$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Potom existují taková n_1, n_2, že

$$\begin{aligned} \rho(a_n, \alpha) &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n > n_1 \\ \rho(a_n, \beta) &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n > n_2. \end{aligned}$$

Položme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Potom pro $n > n_0$ platí

$$\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, a_n) + \rho(a_n, \beta) < \varepsilon. \tag{1.32}$$

Poněvadž α, β jsou pevné body v M a $\alpha \neq \beta$, nemůže (1.32) platit pro libovolné $\varepsilon > 0$. Má tedy každá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M nejvýše jednu limitu. □

Jestliže množinou M v definici 1.2 je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a vzdálenost v ní je definovaná vztahem $\rho(x, y) = |y - x|$ pro $x, y \in \mathbb{R}$, lze definici 1.2 nahradit následující definicí.

Definice 1.3. (Limita číselné posloupnosti)

Nechť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.33}$$

je posloupnost reálných čísel. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost (1.33) má limitu rovnu α a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha, \quad \text{resp.} \quad a_n \to \alpha \text{ (pro } n \to \infty), \tag{1.34}$$

jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takový index n_0, že pro všechny indexy $n > n_0$ je

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon. \tag{1.35}$$

Jestliže neexistuje vlastní limita $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, potom posloupnost (1.33) nazýváme divergentní.

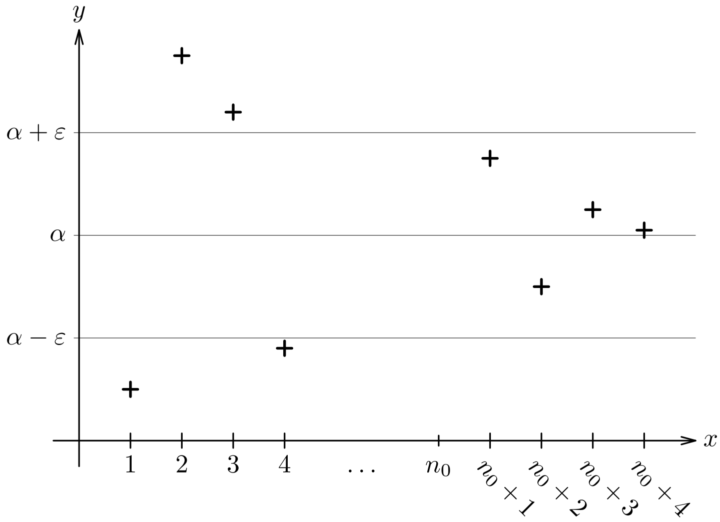
Poznámka. Vztah (1.35) lze nahradit ekvivalentním vztahem

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon, \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.36}$$

Na obr. 1.8 je znázorněno několik členů posloupnosti (1.33) reálných čísel s limitou α.

divergentní posloupnosti

Rozdělení divergentních posloupností reálných čísel. Divergentní posloupnosti se dělí do následujících skupin.



Obrázek 1.8: K definici limity posloupnosti reálných čísel.

a) Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)$, jestliže k libovolnému číslu K existuje takové číslo n_0, že pro všechna n, pro něž je $n > n_0$, platí

$$a_n > K \qquad (a_n < K).$$

Místo rčení „posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$“ se používá též rčení „posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $+\infty$ $(-\infty)$“.

b) Jestliže posloupnost reálných čísel je divergentní a nemá ani nevlastní limitu $+\infty$ ani nevlastní limitu $-\infty$, říkáme, že *osciluje*.

Nechť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.37}$$

je posloupnost reálných čísel. Jestliže

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (-\infty),$$

říkáme, že posloupnost (1.37) diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$. Jestliže neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, říkáme, že posloupnost (1.37) osciluje.

Příklad 1.8. Nechť c je libovolné reálné číslo. Položme

$$a_n = c \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné reálné číslo. Položme $n_0 = 1$. Potom pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Je tedy skutečně $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. $\square$

Příklad 1.9. Posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je konvergentní a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Důkaz: Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$. Nechť n_0 je číslo pro něž je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Je-li tedy $n > n_0$, je $n > \frac{1}{\varepsilon}$, takže $a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$. To znamená, že pro $n > n_0$ je $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Je tedy skutečně $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\square$

Příklad 1.10. Nechť $a_n = n^2$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $+\infty$.

Důkaz: Předpokládejme, že k je libovolné číslo větší než 1. Zvolme n_0 tak, že $n_0 > k$. Potom pro všechna $n > n_0$ je $a_n = n^2 > n_0^2 > k^2$, takže $a_n > k$. Odtud lehce nahlédneme, že $a_n > k$ pro libovolné k. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. $\square$

Příklad 1.11. Nechť $a_n = (-1)^n$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní ani nevlastní limitu, tedy osciluje.

Uvažujme tyto možné případy.

a) Poněvadž pro $K = 2$ není $a_n > K$ pro žádné n, není $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
b) Poněvadž pro $K = -2$ není $a_n < K$ pro žádné n, není $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
c) Předpokládejme, že existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom v intervalu $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ nemohou ležet současně čísla $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, neboť $|a_{2n} - a_{2n+1}| = 2 > \varepsilon$. Tedy číslo α není limitou vyšetřované posloupnosti.

Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy nemá ani vlastní ani nevlastní limitu, tedy osciluje.

Příklad 1.12. Uvažujme posloupnost bodů z $\mathbb{R}^2$

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}, \tag{1.38}$$

kde $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. V $\mathbb{R}^2$ uvažujme Euklidovskou metriku ρ. Ukažme, že limitou posloupnosti (1.38) je bod $[1, 0]$. Skutečně, zvolme $\varepsilon > 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < \varepsilon < 1$. Potom

$$\rho([a_n, b_n], [1, 0]) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}.$$

Tedy pro $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$ je $\rho([a_n, b_n], [1, 0]) < \varepsilon$. Posloupnost (1.38) tedy konverguje k bodu $[1, 0]$.

Vybraná posloupnost. Nechť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.39}$$

je posloupnost a nechť

$$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$$

je taková posloupnost přirozených čísel, že

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots .$$

Potom posloupnost

$$\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$$

nazýváme *vybranou* posloupností z posloupnosti 1.39.

Příklad 1.13. Nechť $k_i = 2i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Potom posloupnost

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$$

je vybraná z posloupnosti

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots .$$

Je zřejmé, že jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom $\lim\limits_{i\to\infty} a_{k_i} = \alpha$.

Posloupnosti reálných čísel

Definice 1.4. (Ohraničená posloupnost)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *shora (zdola) ohraničená*, jestliže množina P, obsahující právě všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je shora (zdola) ohraničená. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ohraničená*, je-li zdola i shora ohraničená.

Příklad 1.14. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, neboť $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ pro všechna $n = 1, 2, \ldots$.

Definice 1.5. (Posloupnost neklesající)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taková posloupnost reálných čísel, že

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \dots \qquad (a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \dots).$$

Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající (rostoucí)*.

Příklad 1.15. Posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, neboť

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

pro $n = 1, 2, \dots$.

Definice 1.6. (Posloupnost nerostoucí)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nerostoucí (klesající)*, jestliže

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \dots \qquad (a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \dots).$$

Příklad 1.16. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, neboť

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

pro $n = 1, 2, \dots$.

Pro neklesající (nerostoucí) posloupnosti platí tyto dvě věty:

Věta 1.2. (Věta o existenci limity)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a neklesající (nerostoucí) posloupnost reálných čísel. Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \sup_n a_n = \alpha \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \inf_n a_n = \alpha\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Důkaz provedeme pro neklesající posloupnosti. Nechť $\sup\limits_n a_n = \alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak podle definice suprema existuje n_0 tak, že

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} < \alpha.$$

Potom ale pro všechna $n \geq n_0$ je

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha.$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

Podobně se dokáže další část věty. Tento důkaz ponecháváme čtenáři. □

Věta 1.3. (Věta o existenci limity)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající (nerostoucí) a neohraničená posloupnost. Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Důkaz: Důkaz vyplývá z definice nevlastních čísel $-\infty, \infty$. □

1.4 Vlastnosti posloupností reálných čísel

Věta 1.4.

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \text{kde } A \in \mathbb{R}^{*}\ {}^{1)}. \tag{1.40}$$

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA, \qquad \text{pokud } cA \text{ má smysl.} \tag{1.41}$$

Důkaz: Mohou nastat tyto případy.

α) Nechť $A \in \mathbb{R}$ a nechť $c > 0$. Podle definice vlastní limity posloupnosti k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové n_0, že

$$A - \frac{\varepsilon}{c} < a_n < A + \frac{\varepsilon}{c} \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.42}$$

Vynásobíme-li (1.42) číslem c, dostáváme

$$cA - \varepsilon < ca_n < cA + \varepsilon.$$

Je tedy v tomto případě

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA = c \lim_{n\to\infty} a_n.$$

---

1) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

β) Nechť $A \in \mathbb{R}$ a nechť $c < 0$. Podle definice vlastní limity posloupnosti k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že

$$A + \frac{\varepsilon}{c} < a_n < A - \frac{\varepsilon}{c} \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.43}$$

(Zvažte, že $\frac{\varepsilon}{c} < 0$.) Vynásobíme-li (1.43) daným záporným číslem c, dostáváme

$$cA - \varepsilon < ca_n < cA + \varepsilon \qquad \text{pro } n > n_0.$$

Je tedy v tomto případě

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA = c \lim_{n\to\infty} a_n.$$

γ) Je-li $c = 0$, $A \in \mathbb{R}$, je $ca_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$, takže

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = 0 = cA.$$

δ) Je-li $c = 0$, $A = +\infty$, resp. $A = -\infty$, nemá cA smysl.

ε) Nechť $A = \infty$, $c > 0$. Potom k libovolnému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 tak, že

$$a_n > \frac{K}{c} \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.44}$$

Vynásobením (1.44) číslem c dostáváme

$$ca_n > K \qquad \text{pro } n > n_0.$$

Je tedy v tomto případě

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = \infty.$$

φ) Nechť $A = \infty$, $c < 0$. Potom k libovolnému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 tak, že

$$a_n > -\frac{K}{c} \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.45}$$

Vynásobením (1.45) číslem c ($c < 0$ dle předpokladu) dostáváme

$$ca_n < -K \qquad \text{pro } n > n_0.$$

Je tedy v tomto případě

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = cA = -\infty.$$

Podobně se dokáže případ, kdy $A = -\infty$. $\square$

Věta 1.5.

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou takové posloupnosti reálných čísel, že*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B, \qquad \textit{kde } A, B \in \mathbb{R}^{*\,2)}. \tag{1.46}$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \tag{1.47}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B, \tag{1.48}$$

a je-li navíc $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \tag{1.49}$$

pokud pravé strany v (1.47), (1.48), (1.49) *mají význam.*

Důkaz: Dokážeme (1.47). Vztahy (1.48), (1.49) se dokazují analogicky. Mohou nastat tyto případy.

α) Nechť $A = a$, $B = b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Existují tedy n_1, n_2 tak, že

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n > n_1, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n > n_2. \tag{1.50}$$

Položme

$$n_0 = \max(n_1, n_2). \tag{1.51}$$

Potom

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n > n_0. \tag{1.52}$$

Užitím (1.52) dostáváme

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \tag{1.53}$$
$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Je tedy v tomto případě

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b = A + B.$$

β) Nechť $A = \infty$, $B = b \in \mathbb{R}$. Potom $A + b = \infty$. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, existuje n_1 tak, že

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \text{pro } n > n_1. \tag{1.54}$$

---

2) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, k libovolnému K existuje n_2 tak, že

$$K - b + \varepsilon < a_n < \infty \qquad \text{pro } n > n_2. \tag{1.55}$$

Položme

$$n_0 = \max(n_1, n_2).$$

Potom pro $n > n_0$ platí (1.54), (1.55). Součtem (1.54), (1.55) dostáváme

$$K < a_n + b_n < \infty \qquad \text{pro } n > n_0. \tag{1.56}$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

γ) Případ, kdy $A = a \in \mathbb{R}$, $B = \infty$, se dokáže analogicky jako bod β).

δ) Nechť $A = \infty$, $B = \infty$. Potom k libovolnému K existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je

$$a_n > \frac{K}{2}, \quad b_n > \frac{K}{2}.$$

Odtud dostáváme pro $n > n_0$

$$a_n + b_n > \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

Podobně se dokazuje (1.47) v Ostatních případech. □

Příklad 1.17. Vypočítejte

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1}, \qquad c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n}.$$

Řešení.

a) Pokusme se aplikovat větu 1.5.

- Položme $a_n = n + 1$, $b_n = n^2 + 1$, $n = 1, 2, \dots$. Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Aplikací (1.49) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$. Avšak $\frac{\infty}{\infty}$ není definováno v $\mathbb{R}^*$. Tedy tento způsob výpočtu nevede k cíli.
- Výraz $\frac{n+1}{n^2+1}$ napřed zjednodušíme. Dělíme-li čitatele i jmenovatele číslem n^2, dostáváme

$$\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Položme

$$c_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad d_n = 1 + \frac{1}{n^2}.$$

Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d_n = 1.$$

Podle (1.49) je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) • Položme
$$a_n = n^2 + 1, \quad b_n = n + 1.$$
Zřejmě
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (n^2 + 1) = \infty,\\ \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} (n + 1) = \infty.\end{aligned}$$
Aplikací (1.49) bychom dostali
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}.$$
Avšak $\frac{\infty}{\infty}$ není v $\mathbb{R}^*$ definováno, takže tímto způsobem nelze vypočítat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$.

• Výraz $\frac{n^2+1}{n+1}$ upravme. Zřejmě
$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} = \frac{n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$
Položme
$$d_n = n + \frac{1}{n}, \quad c_n = 1 + \frac{1}{n}.$$
Podle (1.49) je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

c) • Položme
$$a_n = 2n^2 + 1, \quad b_n = n^2 + n.$$
Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, takže opět $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n}$ nelze počítat jako $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

• Výraz $\frac{2n^2+1}{n^2+n}$ upravme. Zřejmě
$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}.$$
Položme
$$d_n = 2 + \frac{1}{n^2}, \quad c_n = 1 + \frac{1}{n}.$$
Podle (1.49) je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})} = \frac{2}{1} = 2.$$

Zavedení Eulerova čísla

V matematice hraje velkou úlohu *Eulerovo číslo*, které se všeobecně značí e. Toto číslo bylo již sice zavedeno v učebním textu „Matematiky A“, v dalším však ukážeme zavedení čísla e podrobněji.

Věta 1.6. (Eulerova číslo)
Posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.57}$$

jsou konvergentní a mají stejnou limitu. Označíme ji e *a nazveme Eulerovým číslem. Tedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je rostoucí a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je klesající.*
Číslo e *je iracionální a platí*

$$a_n < e < b_n \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots.$$

Důkaz: Především dokažme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená. Užitím binomické věty dostáváme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

To jest

$$a_n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}. \tag{1.58}$$

Poněvadž

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n} = \\ &= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right),\end{aligned}$$

dostáváme z (1.58)

$$\begin{aligned}a_n &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned} \tag{1.59}$$

Z (1.59) dostáváme

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned} \tag{1.60}$$

Poněvadž
$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1} \qquad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-1,$$
dostáváme porovnáním (1.59), (1.60)
$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{pro } n = 1, 2, \dots, \tag{1.61}$$
takže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Dokažme nyní, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená. Nahradíme-li ve vyjádření (1.59) všechny výrazy $(1 - \frac{k}{n})$ číslem 1, tedy větším číslem, dostáváme
$$a_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}. \tag{1.62}$$
Poněvadž
$$\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1.63}$$
dostáváme z (1.62)
$$a_n \le 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$
Poněvadž $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ je součet n členů geometrické posloupnosti, dostáváme
$$a_n \le 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 3.$$
Je tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora ohraničená. Poněvadž $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zároveň rostoucí, je podle věty 1.2 konvergentní.

Označme
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$
Tedy pro každé n je
$$a_n < e. \tag{1.64}$$
Položme nyní
$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1.65}$$
a dokažme, že $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Užitím binomické věty dostáváme (bereme dva členy rozvoje)
$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \binom{n+2}{1} \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}. \tag{1.66}$$
Z (1.66) vyplývá
$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}. \tag{1.67}$$
Násobením (1.67) výrazem $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$ dosáváme
$$\left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{1.68}$$
Odtud
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{1.69}$$

Násobíme-li (1.69) výrazem $\frac{n}{n+1}$, dostáváme

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

takže

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Je tedy posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

Dokažme nyní, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e. \tag{1.70}$$

Skutečně, vztah (1.65) lze přepsat na tvar

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{1.71}$$

Podle věty 1.5 je tedy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e. \tag{1.72}$$

S ohledem na (1.64) dostáváme

$$a_n < e < b_n \qquad \text{pro } n = 1, 2, \ldots$$ □

Lze tedy e vypočíst s libovolnou předem zvolenou absolutní chybou. Pro $n = 10$ dostáváme

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} < e < \left(1+\frac{1}{10}\right)^{11},$$

takže

$$2{,}59 < e < 2{,}86.$$

Důkaz, že číslo e je iracionální, nebudeme provádět.

Poznámka. Existuje řada jiných způsobů k získání aproximace čísla e s požadovanou přesností.

1.5 Posloupnosti funkcí

Limita posloupnosti funkcí.

Definice 1.7. (Bodová konvergence)

Nechť

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in I \tag{1.73}$$

je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Potom řekneme, že (1.73) konverguje bodově k funkci $f(x)$, $x \in I$, jestliže pro každé $\overline{x} \in I$ konverguje číslená posloupnost

$$\{f_n(\overline{x})\}_{n=1}^{\infty}$$

k číslu $f(\overline{x})$. Píšeme pak $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$.

Příklad 1.18. Uvažujme posloupnost funkcí

$$\{x^n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in \langle 0, 1\rangle. \tag{1.74}$$

V každém bodě $\overline{x} \in \langle 0, 1)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}^n = 0$$

a pro $x = 1$ je $x^n = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$, takže

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}^n = 1 \quad \text{pro } \overline{x} = 1.$$

Limitou posloupnosti (1.74) je tedy funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \in \langle 0, 1), \\ 1 \text{ pro } x = 1. \end{cases}$$

Všimněme si, že funkce x^n, $n = 1, 2, \ldots$ jsou funkce spojité na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, avšak jejich (bodovou) limitou je funkce $f(x)$, která je nespojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Definice 1.8. (Stejnoměrná konvergence)

Nechť

$$\{f(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in I, \tag{1.75}$$

je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Řekneme, že posloupnost (1.75) konverguje stejnoměrně k funkcí $f(x)$ na intervalu I, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Poznámka. Lehce nahlédneme, že jestliže posloupnost (1.75) stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu I, potom též bodově konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu I. Opak neplatí. Konverguje-li posloupnost funkcí (1.73) bodově k funkci $f(x)$ na intervalu I, nemusí tato posloupnost na intervalu I konvergovat stejnoměrně k funkci $f(x)$. Např. posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, ale nekonverguje na něm stejnoměrně. (Dokažte!)

Příklad 1.19. Nechť

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Potom

$$\rho(f_n(x), 0) = \frac{1}{n}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, konverguje posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ k funkci $f(x) \equiv 0$.

V tomto případě jsou jak funkce $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, tak i funkce $f(x) \equiv 0$ spojité na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. To platí obecně.

> *Nechť posloupnost spojitých funkcí*
>
> $$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in I,$$
>
> *konverguje stejnoměrně na intervalu I k funkci $f(x)$. Potom funkce $f(x)$ je spojitá na I.*

1.6 Nekonečné řady

1.6.1 Číselné řady

zavedení pojmu

Budiž dána posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots, \tag{1.76}$$

utvořený pomocí čísel dané posloupnosti, nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Zavádíme pro něj též označení

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.77}$$

Čísla a_n nazýváme *členy nekonečné řady*, a číslo a_n n–tým členem. V dalším budeme užívat také názvu řada místo nekonečná řada. Označme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Tedy

$$s_1 = a_1,\ \ s_2 = a_1 + a_2, \dots$$

Číslo s_n nazýváme *n–tým částečným součtem řady* (1.76).

řady konvergentní a řady divergentní

Mohou nastat dva případy:

a) Posloupnost
$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \tag{1.78}$$
je konvergentní a má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, kde $s \in \mathbb{R}$; řadu (1.76) nazýváme pak *konvergentní* a říkáme, že má součet s. Symbol (1.76) nebo (1.77) značí pak současně řadu i její součet.

b) Posloupnost (1.78) částečných součtů je divergentní; řadu (1.76) nazýváme pak *divergentní* a symbol (1.76) nebo (1.77) nemá pak význam čísla, má pouze význam řady.

V případě divergence řady (1.76) jsou možné tyto případy:

I. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$; říkáme pak, že řada (1.76) *diverguje k* $+\infty$ a symbol (1.76) nebo (1.77) značí pak také $+\infty$.

II. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$; říkáme pak, že řada (1.76) *diverguje k* $-\infty$ a symbol (1.76) nebo (1.77) značí pak také $-\infty$.

III. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá ani limitu, ani nevlastní limitu; říkáme pak, že řada (1.76) *osciluje*.

Jako příklad uveďme tuto řadu.

Příklad 1.20.

geometrická řada

Řadu

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + \dots \tag{1.79}$$

nazýváme *geometrickou řadou s kvocientem* q. Její částečný součet s_n je

$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q} \text{ pro } q \neq 1.$$

Pro $|q| < 1$ je řada (1.79) konvergentní a má součet

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Pro $a > 0$ ($a < 0$), $q \geq 1$, řada (1.79) diverguje k $+\infty$ ($-\infty$) a pro $a \neq 0$, $q \leq -1$, řada (1.79) osciluje.

Ukažme to. Dostáváme

$$s_n = a(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}),$$

Uvážíme-li, že

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}),$$

dostáváme pro $q \neq 1$

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1.80}$$

Je-li $|q| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, takže

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Zbývající část důkazu přenechávám čtenáři.

Vyšetřete konvergenci geometrické řady pro případ $|q| = 1$.

Věta 1.7. (Harmonická řada)

Řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

diverguje. Tuto řadu nazýváme obyčejnou harmonickou řadou, *krátce harmonickou řadou.*

Důkaz: Posloupnost částečných součtů $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí. Zřejmě

$$s_2 = \frac{3}{2},$$
$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k}, \qquad k=1,2,\dots$$

Je tedy

$$s_{2^{k+1}} > s_{2^k} + 2^k\frac{1}{2^{k+1}},$$
$$s_{2^{k+1}} > s_{2^k} + \frac{1}{2}.$$

Takže posloupnost $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ je shora neomezená. Tedy posloupnost $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ je divergentní a tedy i posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ je divergentní. □

Příklad 1.21. Řada

$$1+(-1)+1+(-1)+\dots+(-1)^{n-1}+\dots = 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots \quad (1.81)$$

osciluje, neboť posloupnost jejích částečných součtů je $1,0,1,0,\dots$.

Příklad 1.22. Řada

$$[1+(-1)]+[1+(-1)]+\dots+[1+(-1)]+\dots \quad (1.82)$$

konverguje a má součet roven 0, protože posloupnost jejich částečných součtů je $0,0,\dots,0,\dots$. Všimněme si, že řada (1.81) vzniká z řady (1.82) pouhým vynecháním hranatých závorek a mění se tím charakter řady. U konečných součtů se s ničím podobným nesetkáváme. Přesto však zde platí:

věty o konvergenci řad

Věta 1.8.

Nechť $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots = s$, *kde* s *může být též* $+\infty$, *nebo* $-\infty$. *Nechť* $k_1, k_2, \dots$ *je vybraná posloupnost přirozených čísel; potom platí*

$$(a_1+a_2+\dots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\dots+a_{k_2})+ \\ +(a_{k_2+1}+a_{k_2+2}+\dots+a_{k_3})+\dots = s. \quad (1.83)$$

Důkaz: Je-li $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$; posloupnost částečných součtů řady (1.83) je zřejmě posloupnost $s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, \ldots$ vybraná z posloupnosti částečných součtů řady (1.76) a má tedy tutéž limitu. □

Hlavní význam věty 1.8 je v její platnosti pro konvergentní řady.

Příklad 1.23. Jaká částka D, vložená na začátku roku, poskytne stálé pobírání důchodu ve výši a Kč, vyplácené na konci každého roku při neměnné nominální úrokové míře j?

Řešení. Uvažujme roční úrokovu míru $j = \frac{p}{100}$, kde p je procentní úroková míra. Potom kapitál K na začátku roku se za jeden rok zúročí na částku $S = K + Kj$, tj. na částku $S = K(1+j)$. Tedy kapitál na konci roku je „ekvivalentem“ částku $K = S\frac{1}{1+j}$. Zavedeme označení

$$v = \frac{1}{1+j}.$$

Je tedy $K = Sv$. Počítejme hodnotu vypláceného důchodu k začátku prvního roku, kdy byla uložena částka D. Zřejmě k začátku prvního roku je hodnota první splátky $a \cdot v$, hodnota druhé splátky je $a \cdot v^2$, atd.. Je tedy

$$D = a \cdot v \ + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \ldots . \tag{1.84}$$

Jde o součet geometrické řady s kvocientem $q = v$. Poněvadž $0 < q < 1$, je

$$D = \frac{a \cdot v}{1 - v} = \frac{a}{j}.$$

Rovnice (1.84) vyjadřuje vztah mezi vloženou částkou D a ekvivalentních hodnot všech částek a přepočítaných k začátku 1. roku.

Věta 1.9. (Nutná podmínka konvergence řady)

Je-li řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{1.85}$$

konvergentní, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz: Platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, značí-li s_n n–tý částečný součet řady (1.85). Platí však také $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Dále dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

podle věty 1.5. □

Je tedy podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nutná pro konvergenci řady (1.85), není však postačující, jak vidíme na příkladě harmonické řady.

Věta 1.10.

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady reálných čísel, které se liší jen v konečném počtu členů. Potom obě tyto řady současně konvergují nebo divergují.*

Důkaz: Důkaz přenechávám čtenáři. □

Věta 1.11. (Součet nekonečných řad)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ *jsou konvergentní řady. Nechť* c, A, $B \in \mathbb{R}$ *jsou libovolná čísla. Potom je:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = As + Bt.$$

Důkaz: Značíme-li

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n, \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n,$$

mají vyšetřované dvě řady n–tý částečný součet cs_n resp. $As_n + Bt_n$. Podle věty 1.5 je pak

$$\lim_{n\to\infty} (cs_n) = cs, \quad \lim_{n\to\infty} (As_n + Bt_n) = As + Bt.$$ □

Nalezení součtu nekonečné řady je obtížná úloha. Proto se často musíme spokojit s vyšetřením, zda daná řada konverguje nebo diverguje. Jestliže se zjistí, že řada je konvergentní, lze aproximovat její součet jejím n–tým částečným součtem s_n. Ale i pak je třeba vyšetřit, jak velké musí být n, aby s_n aproximovalo součet řady s dostatečnou přesností.

V dalším textu budeme problematiku konvergence vyšetřovat pro řady určitých tříd (to jest řad s jistými vlastnostmi). Poznamenejme, že bez vyšetření, zda řada je konvergentní, by bylo chybné aproximovat součet řady číslem s_n. Řada by mohla být divergentní.

Pro jednotlivé třídy řad si uvedeme podmínky — kritéria, při jejichž splnění řada je konvergentní nebo divergentní.

kriteria konvergence řad s nezápornými členy

Řady s nezápornými členy

Jestliže pro každý člen řady (1.76) platí $a_n \geq 0$, nazýváme řadu (1.76) *řadou s nezápornými členy*. Pro částečné součty s_n řady s nezápornými členy je zřejmě $s_n \leq s_{n+1}$. Posloupnost částečných součtů takové řady je tedy neklesající. *Řada s nezápornými čísly proto buďto diverguje k* $+\infty$*, nebo konverguje k číslu z* $\mathbb{R}$. V prvním případě není posloupnost částečných součtů shora omezená, ve druhém případě je shora omezená.

Věta 1.12. (Srovnávací kriterium I.)

Nechť

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \tag{1.86}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots, \tag{1.87}$$

jsou řady s nezápornými členy. Nechť platí $a_n \leq b_n$ *pro všechna* n*. Potom platí:*

a) *Je-li řada* (1.87) *konvergentní, je i řada* (1.86) *konvergentní.*

b) *Je-li řada* (1.86) *divergentní, je i řada* (1.87) *divergentní.*

Důkaz: Označíme-li s_n částečné součty řady (1.86) a σ_n částečné součty řady (1.87), platí $s_n \leq \sigma_n$. Je-li (1.87) konvergentní, je posloupnost $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ shora ohraničená, takže i posloupnost $s_1, s_2, s_3, \dots$ je shora ohraničená a tedy řada (1.86) je konvergentní. Tím je dokázáno tvrzení a).
Nechť řada (1.86) je divergentní. Kdyby řada (1.87) byla konvergentní, musela by i řada (1.86) být konvergentní podle a), což je spor s předpokladem. Tím je dokázáno tvrzení b). □

Poznámka. Jestliže $a_n \leq b_n$ pro $n = 1, 2, \dots$, potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme minorantní vzhledem k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazýváme majorantní vzhledem k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 1.24. Určeme konvergenci řady

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \tag{1.88}$$

Nechť řadou (1.86) je vyšetřovaná řada a řadou (1.87) nechť je řada

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots \tag{1.89}$$

Zřejmě platí

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n} \quad \text{pro } n > 1.$$

Mezi prvními členy obou řad platí rovnost. Dokážeme-li, že řada (1.89) je konvergentní, je podle věty 1.12 řada (1.88) konvergentní. Vyšetřeme tedy řadu (1.89). Zřejmě

$$a_1 = 1,\ a_n = \frac{1}{(n-1)n} \quad \text{pro } n = 2, 3, \dots .$$

Lehce se přesvědčíme, že

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Je tedy

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Úpravou dostáváme

$$s_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2,$$

takže řada (1.87) je konvergentní.

Poněvadž řada (1.88) je řada s kladnými členy a je minorantní ke konvergentní řadě (1.89), je řada (1.88) konvergentní.

Věta 1.13. (Konvergence řady (1.90))

Řada

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \tag{1.90}$$

je pro $s \le 1$ divergentní a pro $s > 1$ je konvergentní.

Důkaz: Důkaz provedeme jen pro $s \le 1$. Pro $s = 1$ je řada (1.90) harmonická a tedy divergentní. Nechť tedy $s < 1$. Potom

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^s}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Poněvadž harmonická řada diverguje, podle věty 1.12 diverguje i řada (1.90).

□

Z věty 1.12, v níž řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je geometrickou, plyne tato věta.

Věta 1.14. (Cauchyovo kritérium)

Nechť

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{1.91}$$

je řada s nezápornými členy.

I. *Jestliže existuje q, $0 < q < 1$, tak, že platí $\sqrt[n]{a_n} < q$ pro všechna $n \geq k$, je řada (1.91) konvergentní.*

II. *Jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho n, je řada (1.91) divergentní.*

Důkaz: S ohledem na větu 1.10 se omezíme na případ $k = 1$.

I. Nechť existuje takové q, že $0 < q < 1$ a $\sqrt[n]{a_n} < q$ pro všechna n. Potom řada
$$q + q^2 + q^3 + \dots \tag{1.92}$$
je pro toto q konvergentní. Z podmínky $\sqrt[n]{a_n} < q$ plyne, že $a_n < q^n$. Je tedy řada (1.91) minorantní k řadě (1.92) a tedy podle věty 1.12 je konvergentní.

II. Zkonstruujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ takto: Pro každé n, pro nějž je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ položme $b_n = 1$ a pro každé n, pro nějž je $\sqrt[n]{a_n} < 1$, položme $b_n = 0$. Takto vytvořená řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je zřejmě divergentní. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je majorantní k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle věty 1.12 je tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

□

Příklad 1.25. Dokažme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1.93}$$

je konvergentní a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \tag{1.94}$$

je divergentní.

Řešení. Dokažme, že řada (1.93) je konvergentní. Zřejmě $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$, takže podle věty 1.14 je řada (1.93) konvergentní.

Dokažme, že řada (1.94) je divergentní. Zřejmě $\sqrt[n]{\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{5}{2} > 1$, takže podle věty 1.14 je řada (1.94) divergentní.

Při aplikování věty 1.14 bývá často obtížné určit q, pro nějž je $\sqrt[n]{a_n} < q$ pro všechna n. Uveďme si následující větu 1.15, kterou se lze v některých případech vyhnout hledání q, které splňuje podmínky věty 1.14.

Věta 1.15. (Limitní Cauchyovo kritérium)

Nechť

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{1.95}$$

je řada s nezápornými členy. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je řada* (1.95) *konvergentní, je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *(nebo rovna* $+\infty$*), je řada* (1.95) *divergentní.*

Důkaz: Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1$, potom lze zvolit q tak, že $\alpha < q < 1$. Zvolíme-li $q - \alpha = \varepsilon$, existuje přirozené číslo n_0 tak, že $\alpha - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \alpha + \varepsilon = q$ pro všechna $n > n_0$. Položme $k = n_0 + 1$. Potom $\sqrt[n]{a} < q$ pro všechna $n \geq k$. Vyšetřovaná řada je konvergentní podle věty 1.12.
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha > 1$. Zvolme $\varepsilon = \alpha - 1$. Potom existuje přirozené n_0 tak, že $1 = \alpha - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \alpha + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Zvolíme-li $k = n_0 + 1$, platí $\sqrt[n]{a_n} > 1$ pro všechna $n \geq k$, tedy řada je divergentní podle věty 1.12.
□

Zřejmě věta 1.15 *nic neříká o případu, kdy* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

kritéria konvergence řad s kladnými členy

Uveďme si ještě následující kritérium.

Věta 1.16. (Srovnávací kritérium II.)

Nechť

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \tag{1.96}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots \tag{1.97}$$

jsou řady s kladnými členy (tj. $a_n > 0$, $b_n > 0$ *pro všechna* n*). Nechť platí*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \text{pro všechna } n. \tag{1.98}$$

Potom platí:

I. *Je-li* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

II. *Je-li* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Důkaz: Z (1.98) pro $n \geq 1$ dostáváme

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_n}{b_1},$$

tj.

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \qquad \text{pro všechna } n.$$

I. Konverguje-li řada (1.97), konverguje i řada

$$\frac{a_1}{b_1} b_1 + \frac{a_1}{b_1} b_2 + \cdots + \frac{a_1}{b_1} b_n + \ldots$$

(podle věty 1.11 pro $c = \frac{a_1}{b_1}$). Podle věty 1.12 konverguje tedy i řada (1.96).

II. Diverguje-li řada (1.96), nemůže řada (1.97) konvergovat, neboť by podle I. musela konvergovat i řada (1.96) proti předpokladu. □

Věta 1.17. (d'Alembertovo kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *je řada s kladnými členy.*

I. *Existuje-li číslo* $0 < q < 1$ *tak, že*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < q$$

pro všechna n, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergentní.*

II. *Jestliže*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$$

pro nekonečně mnoho n, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *divergentní.*

Důkaz: Tvrzení I. vyplývá z věty 1.16, zvolíme-li za řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ a za řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ pro $0 < q < 1$.

Tvrzení II. vyplývá z věty 1.16, zvolíme-li řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, že $a_n = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$, a za řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. □

Z této věty bezprostředně plyne tzv. limitní d'Alembertovo kritérium:

Věta 1.18. (Limitní d'Alembertovo kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Je-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, je-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Důkaz: Důkaz je veden podobně jako důkaz věty 1.15. Přenechávám jej čtenáři. □

Tato věta nic neříká o případu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$**.**

Příklad 1.26. Dokažme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.99}$$

je konvergentní pro každé $x \geq 0$.

Skutečně. Pro $x = 0$ je řada evidentně konvergentní. Nechť tedy x je libovolné kladné číslo. Potom řada (1.99) je číselná řada s kladnými členy. Poněvadž

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$, je podle limitního d'Alembertova kriteria řada (1.99) pro toto x konvergentní. Poněvadž x je libovolné kladné číslo, je řada (1.99) konvergentní pro každé $x \geq 0$.

Řady s obecnými členy. Absolutní konvergence

absolutní konvergence řad

Předpoklad o nezápornosti členů dané řady není vždy splněn. V některých případech k vyšetření těchto řad použijeme řadu, jejíž členy jsou rovny absolutním hodnotám členů původní řady. Platí pak tato věta.

Věta 1.19.

Konverguje-li řada

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \dots, \tag{1.100}$$

pak konverguje i řada $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$.

Důkaz: Předpokládejme, že (1.100) konverguje. Utvořme řady

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \dots, \tag{1.101}$$

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \dots, \tag{1.102}$$

kde $b_n = a_n$, je-li $a_n > 0$ a $b_n = 0$, je-li $a_n \leq 0$, $c_n = |a_n|$, je-li $a_n < 0$, a $c_n = 0$, je-li $a_n \geq 0$. Řady (1.101) a (1.102) jsou řady s nezápornými členy a protože platí $b_n \leq a_n$, $c_n \leq |a_n|$ pro každé n, jsou konvergentní podle věty 1.12. Řada (1.101) nechť má součet b, řada (1.102) součet c. Zřejmě platí $a_n = b_n - c_n$ pro každé n. Tedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = b - c.$$

Je tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. □

Konverguje-li řada (1.100), říkáme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní*. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada (1.100) diverguje, říkáme někdy, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relativně nebo neabsolutně konvergentní.*

Je tedy každá konvergentní řada s nezápornými členy absolutně konvergentní. Podobně každá konvergentní řada s nekladnými členy je absolutně konvergentní.

Zavedením absolutní konvergence převádíme vyšetřování konvergence dané řady na vyšetřování řady s nezápornými členy. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ však může konvergovat a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergovat.

Řady alternující

řady alternující

Nechť $a_n > 0$ pro $n = 1, 2, \dots$. Potom řadu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \dots,$$

tj. řadu, ve které se znaménka jednotlivých členů pravidelně střídají, nazýváme řadou alternující.

Pro takové řady platí následující věta.

Věta 1.20. (Konvergence alternující řady)

Nechť $a_1, a_2, a_3, \dots$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Potom řada

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

je konvergentní právě tehdy, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad 1.27. Řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots$$

je konvergentní podle předcházející věty. Není však absolutně konvergentní, neboť řada absolutních hodnot jejích členů je harmonická řada, o níž již víme, že diverguje.

1.7 Řady funkcí

Zaveďme si pojem řady funkcí a jejího součtu.

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Potom symbol

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots \quad x \in I, \tag{1.103}$$

nazýváme *řadou funkcí na intervalu I*. Tento symbol lze zapsat též jako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Funkci

$$s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

nazýváme *n-tým částečným součtem řady* (1.103).

O řadě (1.103) budeme říkat, že

a) konverguje bodově na intervalu I, jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejich částečných součtů konverguje bodově na I. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$, nazýváme $f(x)$ *součtem řady* (1.103).

b) konverguje stejnoměrně na intervalu I k funkci $f(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejich částečných součtů konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$.

c) konverguje absolutně na intervalu I jestliže posloupnost $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\sigma_n(x) = |f_1(x)| + \cdots + |f_n(x)|$, konverguje bodově na I.

Vyšetřování konvergence řady funkcí je tedy převedeno na vyšetřování konvergence posloupnosti částečných součtů.

Příklad 1.28. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in J = (-\infty, \infty) \tag{1.104}$$

je na intervalu J absolutně konvergentní. Skutečně. Vyšetřujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}, \quad x \in J = (-\infty, \infty)$$

Tato řada konverguje pro $x \in J$, jetliže řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konverguje pro $x \in \langle 0, \infty)$. Tuto konvergenci jsme ukázali v příkladě 1.26.

Poznámka. Lze ukázat, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Mocninné řady

Zvláštním případem nekonečných řad funkcí jsou mocninné řady, to jest řady tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots, \tag{1.105}$$

kde a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsou konstanty — říkáme jim *koeficienty mocninné řady*. Číslo x_0 nazýváme *středem mocninné řady* (1.105). Mohou nastat tyto případy:

I. Řada (1.105) konverguje pouze pro $x = x_0$ a diverguje pro všechna $x \neq x_0$. Tím spíše nekonverguje absolutně a nekonverguje ani stejnoměrně. V tomto případě říkáme, že mocninná řada 1.105 má poloměr konvergence $r = 0$.

II. Řada (1.105) konverguje absolutně pro všechna x a konverguje stejnoměrně v každém konečném uzavřeném intervalu. V tomto případě říkáme, že mocninná řada 1.105 má poloměr konvergence $r = \infty$.

III. Existuje číslo $r > 0$ takové, že řada (1.105) konverguje absolutně pro všechna x, pro něž je $|x - x_0| < r$ a diverguje pro všechna x, pro něž je $|x - x_0| > r$. Konvergence řady (1.105) je stejnoměrná v každém intervalu $\langle x_0 - \overline{r}, x_0 + \overline{r} \rangle$, kde $0 < \overline{r} < r$. Číslo r nazýváme *poloměr konvergence řady* (1.105).

Příklad 1.29. Řada

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.106}$$

má poloměr konvergence $r = \infty$.

Skutečně. Ukázali jsme, že řada konverguje absolutně pro každé x. Tedy podle bodu II odstavce o mocninných řadách je $r = \infty$.

1.8 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

Hlavní body, probrané v této kapitola, jsou tyto:

- Definice posloupnosti (Definice 1.1), zejména posloupnosti číselné. Pro aplikace, zejména ve finanční matematice, jsou důležité aritmetické a geometrické posloupnosti. Jsou zde uvedeny vzorce pro součet prvních n členů aritmetické a geometrické posloupnosti.

  Je zaveden pojem limity posloupnosti (Definice 1.2 a Definice 1.3).

  Číselné posloupnosti lze rozdělit do těchto skupin:

$$\text{posloupnosti} \begin{cases} - \text{ konvergentní} \\ - \text{ divergentní} & \begin{cases} - \text{ divergují k } \infty \\ - \text{ divergují k } -\infty \\ - \text{ oscilující} \end{cases} \end{cases}$$

  Je zavedeno Eulerovo číslo e (Věta 1.6) Toto odvození je jen pro Vaši orientaci. Je nutno vědět, že e je číslo iracionální a dá se aproximovat číslem $(1 + \frac{1}{n})^n$ pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$. V dalších kapitolách se ukáže jeho důležitost. Bylo zavedeno již na střední škole.
- Vyšetřují se vlastnosti posloupností. Ukazeje se, že posloupnost má nejvýše jednu limitu. Věta 1.5 pak vypovídá o limitě posloupností $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$, známe-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (Věta 1.5).
- Zavádí se pojem posloupností funkcí (Definice 1.7) a její bodové a stejnoměrné konvergence (Definice 1.7 a 1.8).
- Zavádí se pojem číselné řady a jejího součtu. Číselné řady lze rozdělit do několika skupin

$$\text{číselné řady} \begin{cases} \text{– konvergentní} \\ \text{– divergentní} \quad \begin{cases} \text{– divergující k } \infty \\ \text{– divergující k } -\infty \\ \text{– oscilující} \end{cases} \end{cases}$$

Jsou uvedeny příklady konvergentních a divergentních řad. Věta 1.11 pojednává o konvergenci řady, jejíž členy jsou součty členů konvergentních řad. Je-li číselná řada konvergentní, dá se její součet aproximovat součtem prvních n členů řady. Pro určování součtu číselných řad jsou uvedeny věty 1.8, 1.9, 1.11. Zde hraje důležitou roli otázka volby počtu n členů řady, jejichž součtem se má součet řady aproximovat, aby se dosáhlo požadované přesnosti. Tato problematika není v tomto učebním textu řešena. Prvním krokem je tedy zjistit, zda řada konverguje nebo ne.

- V textu se uvádějí různá kriteria, která nám mohou pomoci při vyšetřování konvergence resp. divergence dané řady. Tato problematika se řeší pro různé skupiny řad:
  a) Řady s kladnými (zápornými) členy. Jsou uvedena kriteria: Věta 1.12, Věta 1.13, Věta 1.14, Věta 1.15, Věta 1.16, Věta 1.17, Věta 1.18.
  b) Řady alternující. Je uvedeno kriterium konvergence: Věta 1.20.
  c) Řady jejiíž některé člené jsou kladné a některé členy jsou záporné. Pro tyto řady je zaveden pojem absolutní konvergence a ve větě 1.19 je uveden vztah mezi konvergencí dané řady a její absolutní konvergencí.

- V textu je uveden pojem posloupnosti funkcí na daném intervalu. a bodové a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí. Dále je zaveden pojem řady funkcí a její bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na daném intervalu.

Úlohy

1. Stroj byl zakoupen za z Kč na začátku roku. Na konci každého roku se odepisuje na opotřebení $p\%$ ceny z předcházejícího roku. Jaká bude cena stroje po n letech? Proveďte výpočet obecně a potom pro $z = 1\,000\,000$ Kč a $p = 10\%$. $\left[z \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\right]$

2. Při složeném ročním úročení s roční úrokovou mírou se na konci každého roku k uložené částce P na začátku roku připisuje úrok ve výši $p\%$ z částky na začátku roku. Jaká bude tzv. splatná částka S za n let? (Splatná částka je částka, na kterou vzroste základní kapitál P za n let.) $\left[S = P\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right]$

3. Jaká roční úroková míra zúročí za 10 let při ročním složeném úročení vloženou částku na její dvojnásobek? [7,18%]

4. Při tzv. spojitém úročení se splatná částka S počítá vzorcem $S = Pe^{jt}$, kde P je vložený kapitál, $j = \frac{p}{100}$, kde p je roční úroková míra v %, t je doba v rocích, po níž se splatná částka počítá. Vypočítejte splatnou částku pro $P = 500\,000$ Kč, dobu 1,5 roku a $p = 10\%$. [$S = 580\,917{,}12$ Kč]

5. Každé reálné číslo a lze v dekadickém zápisu zapsat ve tvaru

$$a = \pm a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\,,$$

kde a_0 je přirozené číslo, a_i, $i = 1, 2, \ldots$, je jedna z cifer $0, 1, 2, \ldots, 9$. Je tedy

$$a = \pm \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right).$$

Vyjádřete číslo $2{,}37\overline{5}$ ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$.
[$2\,37\overline{5} = 2 + \frac{37}{100} + 0{,}005(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots)$, $\frac{2138}{900}$]

6. Eulerovo číslo e lze definovat vztahem

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Přesným výpočtem se zjistí, že $e = 2{,}7182\ldots$. Vypočítejte na kalkulačce $(1 + \frac{1}{n})^n$ pro několik hodnot $n = 5, 10, 50$ a porovnejte s přesnou hodnotou.

7. Kolik obyvatel bude mít město o 10 000 obyvatelích za 10 let, jestliže počet obyvatel každým rokem roste o 1,5%? [11 605]

8. Předpokládejme, že někdo uložil částku odpovídající hodnotě 10 Kč. Úroky se připisují na konci každého roku, roční úroková míra je $p = 2\%$. Předpokládejme, že se při případných změnách měny převede uspořená částka na částku ekvivalentní v nové měně a že se neplatí poplatky za vedení účtu. Na jakou částku by vzrostla uložená částka za $n = 2000$ let?
[$S = 10 \cdot 1{,}02^{2000} \approx 1{,}5861 \cdot 10^{18}$]

9. Co je to geometrická řada?

10. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická řada a nechť $a_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$. Určete a_5 a s_5. [$a_5 = \frac{1}{8}$, $s_5 = \frac{11}{8}$]

11. Vysvětlete pojem nekonečné číselné řady a pojem součet nekonečné řady.

12. Jak se určí součet geometrické řady?

13. Určete součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n$. [$-\frac{2}{3}$]

14. Napište harmonickou řadu. Je konvergentní? Na kalkulačce vypočítejte součet několika jejich prvních členů.

15. Určete geometrickou posloupnost $\{a_n\}$, víte-li že $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{1}{81}$.
[$\{\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}\}$, $a_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$]

16. Určete limity posloupností, výpočet zdůvodněte.

a) $\{\frac{1}{n+3}\}$ [0]

b) $\{\frac{1}{n!}\}$ [0]

c) $\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\}$ [2]

17. Zjistěte, zda konvergují řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ [diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{3}}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot 5^{-n}$ [konverguje]

18. Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$ [konverguje absolutně]

19. Dokažte, že řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ stejnoměrně konvergují na intervalu $(-\infty, \infty)$.

20. Dokažte, že řada

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

má poloměr konvergence $r = \infty$.

■ Shrnutí, úlohy

2. Funkce – základní pojmy

Cíl kapitoly

- zopakovat si pojem zobrazení
- zavést pojem křivky a její tečny
- seznámit se s možnostmi grafického znázornění geometrických útvarů v $\mathbb{E}_n$.

Časová zátěž

- 5 hodin

Úvod. I když pojem funkce je Vám znám jak z předešlého studia, tak i z učebního textu „Matematika A“, nebude jistě na škodu se na tento pojem znovu podívat. Pojem funkce n–proměnných, $n \geq 1$, je zaveden jako zobrazení prostoru $\mathbb{E}_n$ do prostoru $\mathbb{E}_1$.

V této kapitole jsou uvedeny dva důležité příklady zobrazení.

Je pojednáno o zobrazené $F(\boldsymbol{x})$ prostoru $\mathbb{V}_n$ do prostoru $\mathbb{V}_m$ definovaném vztahem

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{kde } \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_m,\ \boldsymbol{A} \text{ je matice typu } (m, n).$$

Doporučuji, abyste tomuto zobrazení věnovali pozornost.

Dále je pojednáno o křivkách v prostoru $\mathbb{E}_n$, definovaných jako zobrazení prostoru $\mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$. Zavádí se pojem tečny křivky v jejím bodě.

V této kapitole je též pojednáno o grafickém znázornění geometrických útvarů v $\mathbb{E}_n$.

Zobrazení

zobrazení A do B

Pojem zobrazení množiny A do množiny B byl zaveden již na gymnáziích a byl znovu uveden ve studijním materiálu „Matematika A“. Vzhledem k jeho zásadní důležitosti se k osvětlení tohoto pojmu ještě jednou vraťme.

Zobrazení množiny A do množiny B

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Pravidlo F, jimž ke každému prvku $x \in A$ je *přiřazen právě jeden prvek* $y \in B$, nazýváme *zobrazením množiny A do množiny B*. Označíme-li x proměnnou s oborem A a y proměnnou s oborem B, píšeme

$$y = F(x).$$

O prvku y přiřazenému k prvku x říkáme, že je obrazem prvku x, a o prvku x říkáme, že je vzorem prvku y.

Množinu A (to jest množinu prvků, k nimž v zobrazení F přiřazujeme prvky z B), nazýváme *definičním oborem nebo též neodvislým oborem* zobrazení F. Značíme jej často D_F, resp. $D(F)$ a množinu B nazýváme *odvislým oborem zobrazení* F.

Podmnožinu množiny B, která obsahuje všechny ty prvky $y \in B$, které jsou v zobrazení F přiřazeny k prvkům x z množin A, nazýváme *oborem zobrazení* F. Značíme ji $H(F)$, resp. H_F.

Jestliže $H_F \subseteq B$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny* A ***do*** B.

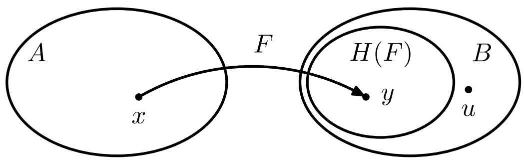
Jestliže $H_F = B$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny* A ***na*** B.

Jestliže $B \subseteq A$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny* A ***do sebe***.

Jestliže $H_F = A$, říkáme, že zobrazení F je zobrazením ***na sebe***.

Proměnnou s oborem hodnot A nazýváme *neodvisle proměnnou* a proměnnou s oborem hodnot B nazýváme *závisle proměnnou*. V této definici jsme použili symbol x pro neodvisle proměnnou a symbol y pro odvisle proměnnou.

Na obrázku 2.1 je znázorněno zobrazení F množiny A do množiny B, rovněž je znázorněn obor zobrazení F, to jest množina $H(F)$. Je zde znázorněn též prvek $u \in B$, který nepatří do $H(F)$. Není tedy obrazem žádného prvku $x \in A$.



Obrázek 2.1: Zobrazení A do B

Zaveďme si několik pojmů, souvisejících se zobrazením.

Zobrazení prosté

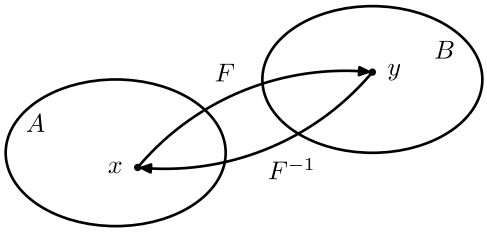
> **Zobrazení prosté.** *Nechť F je zobrazení množiny A do množiny B. Toto zobrazení nazýváme* prostým, *jestliže má tuto vlastnost: Jestliže $x, y \in A$ a $x \neq y$, potom $F(x) \neq F(y)$.*

Příklad 2.1. Nechť $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Zobrazení F dané následující tabulkou je prostým zobrazením A na B.

x	a	b	c
y	α	β	γ

Inverzní zobrazení

Inverzní zobrazení. *Nechť F je* prosté zobrazení množiny A na množinu B. *Potom existuje zobrazení, nazveme je* inverzním zobrazením *množiny B na množinu A a označíme je F^{-1}, kterým ke každému $y \in B$ přiřadíme ten prvek $x \in A$, pro nějž platí $F(x) = y$. (Viz obr.* 2.2*)*



Obrázek 2.2: Inverzní zobrazení

Označení. Symbolem F^{-1} jsme označili inverzní zobrazení k zobrazení F, nejedná se o umocnění funkce F na číslo (-1).

Tyto pojmy si ozřejmíme na následujícím příkladě.

Příklad zobrazení $\mathbb{V}_n$ do $\mathbb{V}_m$. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ a nechť $\mathbb{V}_m, \mathbb{V}_n$ jsou aritmetické vektorové prostory. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ přiřaďme vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_m$ vztahem

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{2.1}$$

Poněvadž ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ je vztahem (2.1) přiřazen právě jeden vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$, jde o zobrazení $\mathbb{V}_n$ do $\mathbb{V}_m$. Označíme je $F(\boldsymbol{x})$. Tedy

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \tag{2.2}$$

je zobrazení $\mathbb{V}_n$ do $\mathbb{V}_m$.

Podívejme se blíže na toto zobrazení.

1. **Vyšetřeme** H_F. Nechť tedy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$. Označme

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \ \text{takže } \boldsymbol{y} \in H_F.$$

a) Označme $\mathbb{L}$ vektorový podprostor prostoru $\mathbb{V}_m$, generovaný sloupci matice $\boldsymbol{A}$. Rozepsáním systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ dostáváme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} . \tag{2.3}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

Označme ${}^{i}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vztah (2.4) pak lze zapsat jako

$$x_1\,{}^{1}\boldsymbol{a} + x_2\,{}^{2}\boldsymbol{a} + \cdots + x_n\,{}^{n}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}.$$

Vektor $\boldsymbol{y}$ je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$. Je tedy $\boldsymbol{y} \in \mathbb{L}$, takže $H_F \subseteq \mathbb{L}$.

b) Nechť $\boldsymbol{y} \in \mathbb{L}$. Ukažme, že existuje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ tak, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \tag{2.5}$$

Poněvadž řádková hodnost matice je rovna její sloupcové hodnosti a vektor $\boldsymbol{y}$ je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$, je

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{y}),$$

takže rovnice (2.5) má podle Frobeniovy věty řešení. Existuje tedy skutečně $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ tak, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. *Je tedy* $H_F = \mathbb{L}$.

2. **Vyšetřeme, kdy F je prosté zobrazení $\mathbb{V}_n$ na H_F.** Nechť ${}^{1}\boldsymbol{x}, {}^{2}\boldsymbol{x}$ jsou takové dva vektory z $\mathbb{V}_n$, že

$$F({}^{1}\boldsymbol{x}) = F({}^{2}\boldsymbol{x}), \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot {}^{2}\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

Položme

$$\boldsymbol{u} = {}^{1}\boldsymbol{x} - {}^{2}\boldsymbol{x}. \tag{2.7}$$

Z (2.6) vyplývá, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{2.8}$$

Uvažujme dva případy.

a) Nechť hodnost $h(\boldsymbol{A}) = n$. Matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{0})$ má pak též hodnost n. Podle Frobeniovy věty má systém (2.8) obecné řešení závislé na $n - n$ $(= 0)$ parametrech. Tedy systém (2.8) má právě jedno řešení $\boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Ze vztahu (2.7) vyplývá, že pak ${}^{1}\boldsymbol{x} = {}^{2}\boldsymbol{x}$. *Má-li tedy matice $\boldsymbol{A}$ hodnost n, je F prosté zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$ na $H_F = \mathbb{L}$.* Existuje tedy inverzní zobrazení F^{-1} prostoru $H_F = \mathbb{L}$ na prostor $\mathbb{V}_n$. Jestliže navíc $m = n$, lze toto inverzní zobrazení vyjádřit jako

$$F^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{y},$$

kde $\boldsymbol{A}^{-1}$ je matice inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

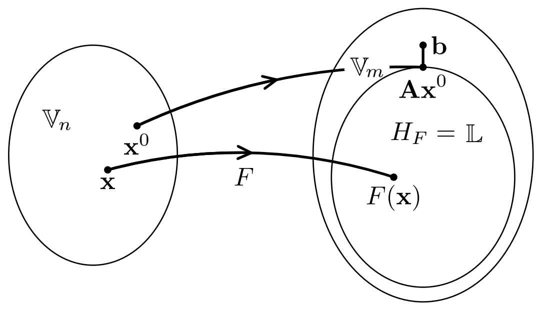
b) Nechť hodnost $h(\boldsymbol{A}) < n$. V tomto případě má systém rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ řešení závislé na $n - h(\boldsymbol{A})$ parametrech. Jestliže ${}^{1}\boldsymbol{x}$ je libovolný vektor z $\mathbb{V}_n$ a $\boldsymbol{u}$ je libovolný nenulový vektor z $\mathbb{V}_n$ pro nějž je $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, potom $\boldsymbol{A} \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot ({}^{1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u})$, to jest $F({}^{1}\boldsymbol{x}) = F({}^{1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u})$. Tedy zobrazení F není v tomto případě prosté.

3. **Řešitelnost systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.** Nechť $\boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_m$. Potom systém rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.9}$$

má řešení právě tehdy, když $b \in \mathbb{L}$.

a) Jestliže $\boldsymbol{b} \in \mathbb{L}$, má systém rovnic (2.9) řešení závislé na $n - h(\boldsymbol{A})$ parametrech.
b) Jestliže $\boldsymbol{b} \notin \mathbb{L}$, nemá systém (2.9) řešení. Situaci v tomto případě znázorněme na následujícím obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Ilustrace k příkladu.

Pojem řešení systému rovnic (2.9) si můžeme pro tento případ rozšířit následovně. Za zobecněné řešení budeme považovat ten vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$, jehož obraz $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je „nejblíže“ k vektoru $\boldsymbol{b}$. Přesněji řečeno, za zobecněné řešení systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ rozumíme ten vektor $\boldsymbol{x}^0$, pro nějž je

$$\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n} \|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|. \tag{2.10}$$

Použijeme-li ve $\boldsymbol{V}_n$ Euklidovskou vektorovou normu, dostáváme stejné řešení jako jsme obdrželi metodou nejmenších čtverců, popsanou v učebním textu „Matematika A“. Lze ukázat, že v případě, že matice $\boldsymbol{A}$ má hodnost n, vyhovuje vztahu (2.10) právě jeden vektor $\boldsymbol{x}^0$. V případě, že matice $\boldsymbol{A}$ má hodnost menší než n, vyhovuje (2.10) více vektorů, tedy systém rovnic (2.9) má více zobecněných řešení.

úsečka

Úsečka – zobrazení $\langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$.

Nechť nyní $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ jsou dva různé body n-rozměrného prostoru $\mathbb{E}_n$. Označme $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ vektor, kde

$$s_i = b_i - a_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Úsečkou $\overline{AB}$ budeme rozumět množinu všech bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde

$$x_i = a_i + s_i \cdot t, \qquad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Těmito rovnicemi je definováno zobrazení $\langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$. Zavedeme-li uspořádání bodů této úsečky tak, že pro $t_1,\ t_2 \in \langle 0, 1\rangle$, $t_1 < t_2$, je bod ${}^1X$, odpovídající parametru t_1, před bodem ${}^2X$, odpovídajícím parametru t_2, nazveme tuto úsečku orientovanou souhlasně s parametrickým vyjádřením a označíme ji $\overrightarrow{AB}$. Bod A nazveme jejím prvním a B posledním bodem. Podobně se zavádí opačná orientace úsečky k jejímu parametrickému vyjádření. Vektor $\boldsymbol{s}$ nazýváme *směrovým vektorem úsečky* $\overline{AB}$.

přímka

Přímka – zobrazení $\mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$.

Přímkou v tomto n-rozměrném prostoru, danou body $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, nazveme množinu bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)t, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Obecně množina bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$,

$$x_i = a_i + s_i \cdot t, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{2.11}$$

kde $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ je bod, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \neq \mathbf{0}$ je vektor, zvaný směrový, je přímka jdoucí bodem A se směrem $\boldsymbol{s}$.

Rovnicemi (2.11) je realizované zobrazení $I \subseteq \mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$.

Spojitá křivka – zobrazení $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{E}_n$.

křivka

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, jsou spojité funkce na intervalu $I \subseteq \mathbb{E}_1$. Potom množinu bodů

$$[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)], \qquad t \in I \subseteq \mathbb{E}_1$$

nazýváme spojitou křivkou v prostoru $\mathbb{E}_n$.

Rovnicemi

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad t \in I \subseteq E_1,$$

je realizované zobrazení $I \subseteq \mathbb{E}_1$ do $\mathbb{E}_n$.

Příklad 2.2. Nechť $n = 2$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Potom rovnicemi

$$x_1 = r\cos t, \quad x_2 = r\sin t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi) \tag{2.12}$$

je určena spojitá křivka v prostoru $\mathbb{E}_2$. Jestliže z rovnic (2.12) vyloučíme parametr t (např. sečtením jejich kvadrátů), dostáváme rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Je tedy rovnicemi (2.12) určena kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ o poloměru r.

Příklad 2.3. Zvolme $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Pro tato čísla a, b je rovnicemi

$$x_1 = a\cos t, \quad x_2 = a\sin t, \quad x_3 = bt, \qquad \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi\rangle. \tag{2.13}$$

dána křivka v $\mathbb{E}_3$.

Speciálním případem zobrazení je funkce n–proměnných.

Funkce n–proměnných

zavedení pojmu funkce n–proměnných

Nechť $n \in N$, $A \subseteq \mathbb{E}_n$, $B \subseteq E_1$. Pravidlo f, jímž ke každému bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in A$ přiřadíme právě jedno číslo $y \in B$, nazýváme funkcí n–proměnných. Píšeme

$$y = f(X), \quad \text{resp. } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Množinu A nazýváme definičním oborem funkce f, značíme jej též D_f nebo $D(f)$. Bod X nazýváme neodvisle proměnnou funkce f, resp. $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazýváme neodvisle proměnnými. Číslo $y = f(X) \in B$ nazýváme hodnotou funkce f v bodě $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in A$. Množinu těch čísel $y \in B$, která jsou přiřazena alespoň k jednomu bodu $X \in A$, nazýváme oborem hodnot funkce f a značíme H_f, resp. $H(f)$. Zřejmě $H_f \subseteq B$.

V zápisu $y = f(X)$ nazýváme též X argumentem funkce f.
Je-li funkce $f(X)$ zadaná výrazem bez uvedení jejího definičního oboru, rozumí se jím množina A všech těch bodů X, pro něž má výraz význam.
Množinu všech bodů $[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$, kde $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, nazýváme grafem funkce f.
Pro $n = 1$ nazýváme funkci $y = f(x)$, $x \in A \subseteq \mathbb{E}_1$ reálnou funkcí jedné proměnné.

Příklad 2.4. Při rovnoměrném pohybu při konstantní rychlosti v ujede auto za dobu t dráhu $s = vt$. Z povahy úlohy vyplývá, že $t \in \langle 0, \infty\rangle$. Je tedy $s = vt$ funkce jedné neodvisle proměnné t s definičním oborem $\langle 0, \infty\rangle$.

Příklad 2.5. Obvod O obdélníka o stranách a, b se určí podle vztahu $O = 2(a+b)$. Je tedy $O = 2(a+b)$ funkcí bodu $[a, b]$, resp. funkcí dvou proměnných a, b. Z povahy úlohy vyplývá, že definičním oborem je $A = \{[a, b] : \ a \geq 0, b \geq 0\}$.

Uveďme si několik dalších příkladů

Příklad 2.6. Funkce

$$y = \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2 + 1)}{x_1^2 + x_2^2}$$

je definovaná na množině $A = \mathbb{E}_2 - \{[0, 0]\}$.

Příklad 2.7. Funkce

$$y = \frac{\ln(x_1 + 2x_2 - 3)}{x_1 - 3x_2}$$

je definovaná na množině A všech bodů $[x_1, x_2]$, pro něž platí

$$x_1 + 2x_2 - 3 > 0 \quad \wedge \quad x_1 - 3x_2 \neq 0. \tag{2.14}$$

Poznámka 1. Neodvisle proměnná funkce f se často označuje symbolem X, resp. $(x_1, \dots, x_n)$ a odvisle proměnná symbolem y. Např. $y = f(X)$, $X \in A$, $y \in B$. Pro tutéž funkci můžeme použít jiné označení, např. $u = f(t)$, $t \in A$, $u \in B$. Tedy např. zápisy $y = \sin(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$; $y = \sin(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ vyjadřují tutéž funkci. Podobně $u = \sin(x_1 + 2x_2)$, $[x_1, x_2] \in A$ vyjadřuje tutéž funkci jako $u = \sin(x + 2t)$, $[x, t] \in A$.

Poznámka 2. U některých funkcí je zvykem nedávat argument do závorky, pokud nemůže dojít k omylu. Např. píšeme

- $y = \sin x$ místo $y = \sin(x)$,
- $y = \log x$ místo $y = \log(x)$.

Avšak v zápisu $y = \sin(2x + 3)$ nesmíme závorky vynechat.

Poznámka 3. Místo funkce $y = (f(x))^n$ lze psát $y = f^n(x)$. Zde n je exponent. Nedáváme jej do závorky. Zápis $f^{(n)}(x)$ se používá pro n–tou derivaci funkce $f(x)$, jak bude uvedeno později. Symbol $f^{-1}(x)$ je používán pro označení inverzní funkce k funkci $f(x)$.

Poznámka 4. Upozorňuji na chybu, které se někdy studenti dopouštějí. Například místo $\sin(x^2+x+1)$ píší chybně $\cancel{\sin\cdot(x^2+x+1)}$! Upozorňuji, že x^2+x+1 je argumentem funkce sinus.

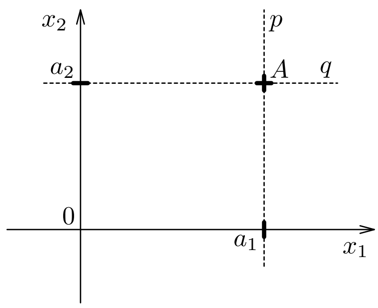
K lepšímu pochopení některých matematických pojmů a při řešení úloh nám často pomůže grafické znázornění (pokud je to možné) geometrických útvarů v příslušném prostoru.

Grafické znázornění geometrických útvarů v prostoru $\mathbb{E}_n$

Prostor $\mathbb{E}_1$. Body v $\mathbb{E}_1$ znázorňujeme na číselné ose. Není nutno dělat rozdíl mezi bodem na číselné ose a číslem, které je tomuto bodu přiřazeno.

znázornění geometrických útvarů v $\mathbb{E}_2$

Prostor $\mathbb{E}_2$. V rovině zvolme dvě číselné osy se stejným nulovým bodem, které leží na dvou různoběžkách. Číselné osy označme x_1 a x_2, společný nulový bod nazveme počátkem souřadného systému a označíme 0. Nechť A je libovolný bod této roviny. Veďme jím rovnoběžku p s osou x_2 a rovnoběžku q s osou x_1. Přímka p protne osu x_1 v bodě a_1 a přímka q protne osu x_2 v bodě a_2. Bodu A přiřadíme pak uspořádanou dvojici reálných čísel $[a_1, a_2]$. Nebudeme dělat rozdíl mezi bodem A a touto uspořádanou dvojicí $[a_1, a_2]$. Číslo a_1 budeme nazývat první a číslo a_2 budeme nazývat druhou souřadnicí bodu A v souřadném systému $0x_1x_2$. Jsou-li osy x_1, x_2 navzájem kolmé, mluvíme o pravoúhlém souřadném systému. Mají-li souřadné osy x_1, x_2 navíc stejné měřítko, souřadný systém nazýváme kartézským souřadným systémem. Na obr. 2.4 je znázorněn kartézský souřadný systém a v něm bod $A[a_1, a_2]$.



Obrázek 2.4: Bod $A[a_1, a_2]$ v kartézském souřadném systému.

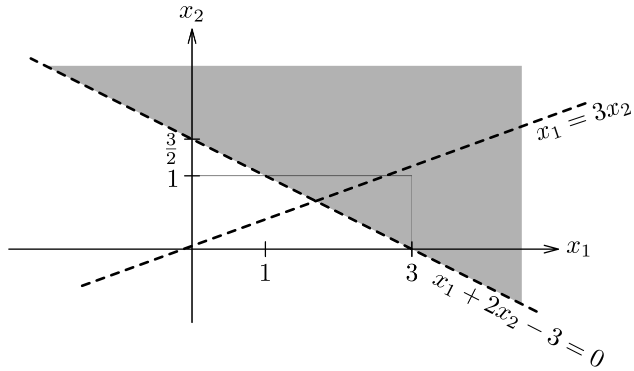
Na obr. 2.5 je šedě vyznačen definiční obor funkce

$$y = \frac{\ln(x_1 + 2x_2 - 3)}{x_1 - 3x_2}$$

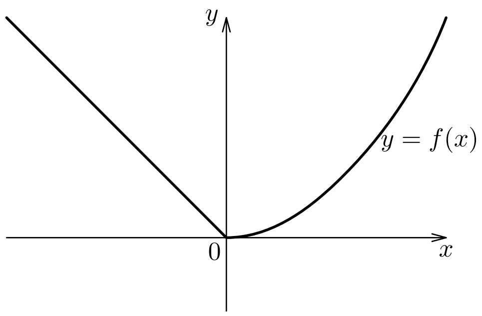
z příkladu 2.7. Definičním oborem je množina bodů $[x_1, x_2]$, která vyhovují (2.14). Body na přímkách $x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3x_2$ nepatří do definičního oboru.

Jiným příkladem je znázornění grafů funkcí jedné proměnné. Tak na obr. 2.6 je znázorněn graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x^2, & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$



Obrázek 2.5: Ilustrace definičního oboru funkce $y = \frac{\ln(x_1+2x_2-3)}{x_1-3x_2}$.



Obrázek 2.6: Graf funkce jedné proměnné.

Některé funkce, jako jsou např.

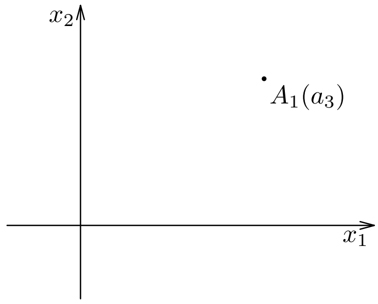
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ je racionální}, \\ -1, & x \text{ je iracionální}, \end{cases}$$

nemůžeme dobře graficky znázornit. Grafické znázornění bodů neumožňuje totiž rozlišit body $[x_1, 1]$, $[x_2, -1]$ pro x_1 racionální a x_2 iracionální.

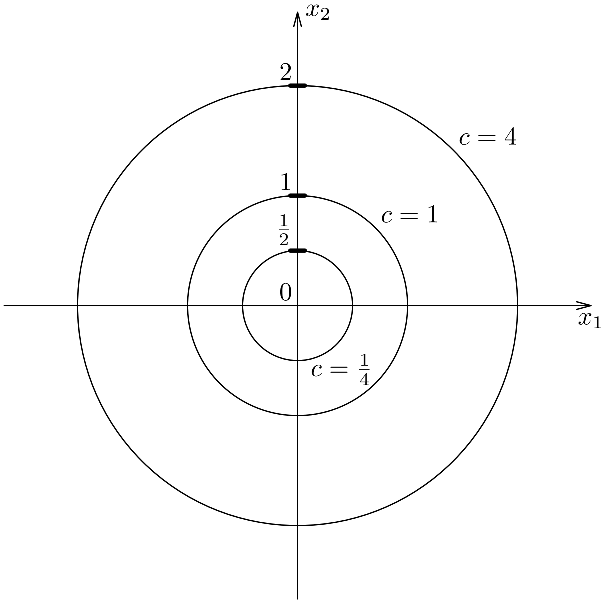
znázornění geometrických útvarů v $\mathbb{E}_3$

Prostor $\mathbb{E}_3$**.** Zvolme tři číselné osy se stejným nulovým bodem, které neleží v jedné rovině. Označme je x_1, x_2, x_3. Společný nulový bod označíme 0 a nazveme počátkem souřadného systému. Nechť A je libovolný bod v prostoru. Veďme jím rovinu α určenou osami x_2, x_3, rovinu β určenou osami x_1, x_3 a rovinu γ určenou osami x_1, x_2. Nechť rovina α protne číselnou osu x_1 v bodě a_1, nechť rovina β protne číselnou osu x_2 v bodě a_2 a nechť rovina γ protne osu x_3 v bodě a_3. Bodu A přiřadíme uspořádanou trojici $[a_1, a_2, a_3]$ reálných čísel. Nebudeme dělat rozdíl mezi bodem A a touto uspořádanou trojicí. Číslo a_1 nazýváme první souřadnicí bodu A, číslo a_2 budeme nazývat druhou souřadnicí bodu A a číslo a_3 budeme nazývat třetí souřadnicí bodu A. Jestliže osy x_1, x_2, x_3 jsou navzájem ortogonální, mluvíme o pravoúhlém souřadném systému. Mají-li souřadné osy x_1, x_2, x_3 stejná měřítka, mluvíme o kartézském souřadném systému. Chceme-li znázornit geometrické útvary v rovině (na papíře), musíme použít nějakou projekci. Ukažme tyto možnosti.

a) V rovině sestrojíme kartézský souřadný systém s počátkem 0 a souřadnými osami x_1, x_2. Jestliže A je bod v $\mathbb{E}_3$ o souřadnicích $[a_1, a_2, a_3]$, vyznačíme v rovině bod $A_1[a_1, a_2]$ (resp. označme opět A) a k němu připíšeme souřadnici a_3. Číslo a_3 budeme nazývat kótou bodu A.



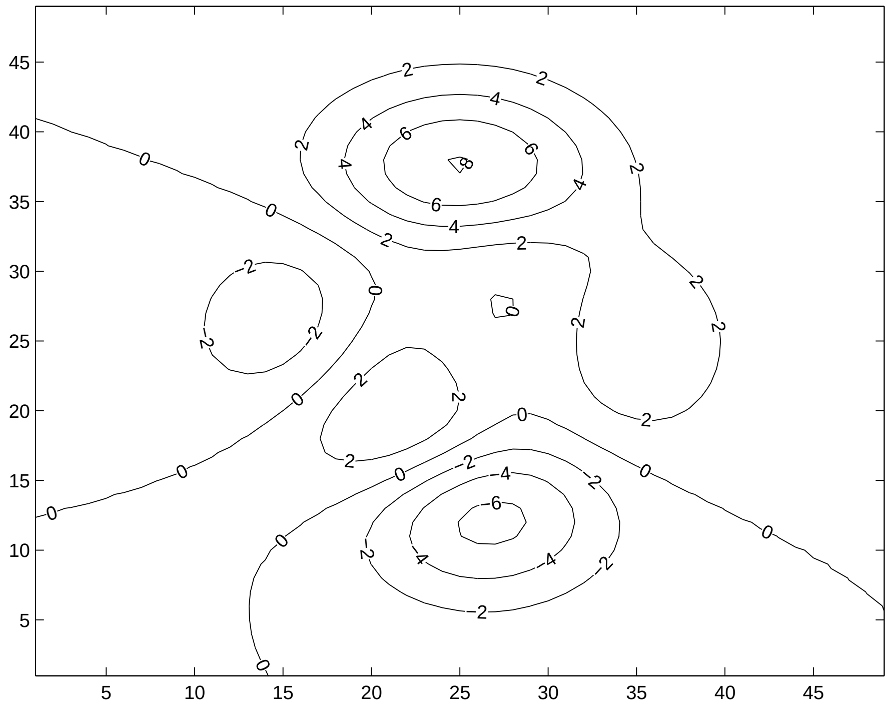
Chceme-li např. si udělat představu o funkci $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, můžeme postupovat takto. Zvolíme kartézský souřadný systém v rovině. Jeho osy označíme x_1, x_2. Zvolme c. Je-li $c > 0$, protne rovina $x_3 = c$ plochu $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ v kružnici $x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{c})^2$. Nazveme ji vrstevnicí. V rovině x_1, x_2 vykreslíme tuto kružnici a k ní připíšeme číslo $\sqrt{c}$, tj. kótu všech bodů kružnice na ploše. Pro $c = 0$ obdržíme bod $[0, 0, 0]$. Vykreslením několika vrstevnic si uděláme náhled na vyšetřovanou plochu $x_3 = x_1^2 + x_2^2$. Viz obr. 2.7 vrstevnice



Obrázek 2.7: Vrstevnice plochy $x_3 = x_1^2 + x_2^2$.

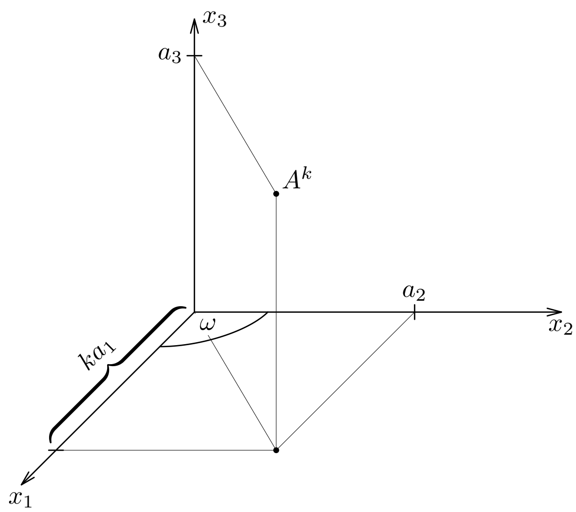
Analogický způsobem se znázorňují vrstevnice jiné plochy. Pro „slušné“ funkce je vrstevnicí křivka, jak ji intuitivně chápeme. Vykreslení průmětu těchto křivek u složitějších ploch se provádí užitím počítače, na němž je instalovaný k tomu určený software. Na obr. 2.8 je grafické znázornění vrstevnic plochy užitím programového systému Matlab. Pokuste se představit si znázorněnou plochu!

b) Vykreslíme (viz. obr. 2.9) navzájem kolmé souřadné osy x_2, x_3. Dále vykreslíme souřadnou osu x_1, která svírá s osou x_2 zvolený úhel ω. Dále zvolíme projekce $\mathbb{E}_3$ do $\mathbb{E}_2$



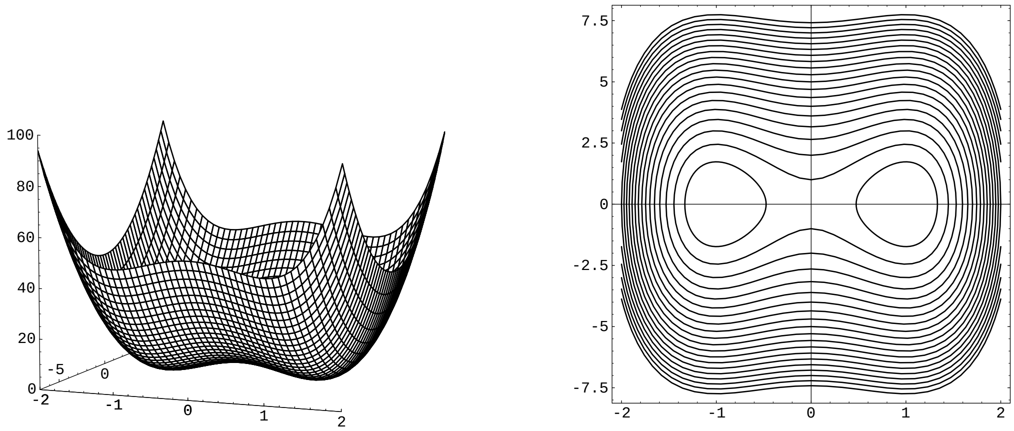
Obrázek 2.8: Vrstevnice plochy.

číslo $0 < k < 1$, tzv. faktor zkrácení. Potom bod $A[a_1, a_2, a_3]$ znázorníme jako bod A^k dle obr. 2.9. Bod A jsme vykreslili v tzv. šikmém promítání (jak jsme byli zvyklí znázorňovat geometrické útvary na gymnáziích).



Obrázek 2.9: Šikmé promítání.

Příkladem je obr. 2.10, na němž je znázorněna funkce $x_3 = 5x_1^2(x_1^2-2)+x_2^2+5$. Pro větší čitelnost jsou na ploše vykresleny křyvky, které jsou průsečnicemi plochy s rovinami $x_1 =$ konst., a vykresleny křivky, které jsou průsečnicemi plochy s rovinami $x_2 =$ konst.. K vykreslení byl použit programový systém Mathematica.

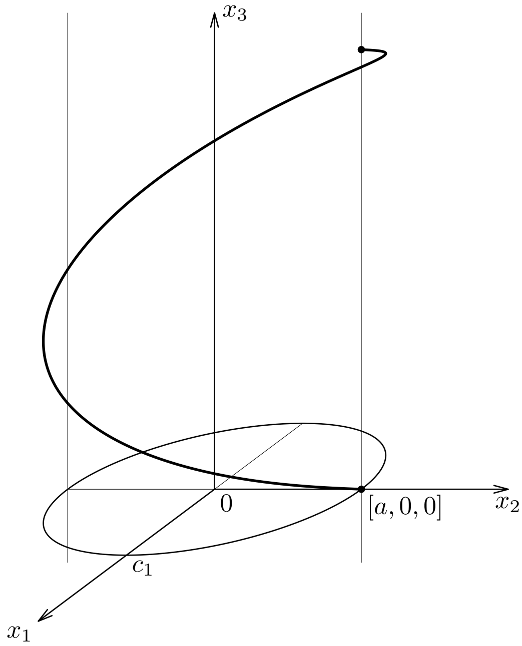


Obrázek 2.10: Graf funkce a vrstevnice funkce $f(x,y) = 5x_1^2(x_1^2 - 2) + x_2^2 + 5$. Rozdíl kót dvou sousedních vrstevnic je 3. Vrstevnice mají kóty $3 \div 60$.

Na obr. 2.11 je znázorněna křivka

$$x_1 = a\cos t, \quad x_2 = a\sin t, \quad x_3 = bt, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Průmětem této křivky do roviny (x_1, x_2) je kružnice c_1 o rovnici $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. Křivka určená rovnicí (2.13) leží na válcové ploše s povrchovými přímkami rovnoběžnými se souřadnou osou x_3.



Obrázek 2.11: Křivka $x_1 = a\cos t,\ x_2 = a\sin t,\ x_3 = bt,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ v prostoru $\mathbb{V}_3$.

Prostor $\mathbb{E}_n,\ n > 3$. Geometrické útvary v prostorech $\mathbb{E}_n$, $n > 3$, si nemůžeme smyslově představit. V konkrétních případech je možno postupovat např.

takto: Je-li $z = f(X)$, $X \in \mathbb{E}_4$, je možné provést znázornění ploch $z = f(x_1, x_2, x_3, c)$, kde $c \in \mathbb{R}$ jsou zvolená čísla.

2.1 Shrnutí, úlohy

V kapitole jsme si zopakovali pojem zobrazení množiny A do B. Jako zvláštní případ jsme pojednali o zobrazení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_m$. O tomto zobrazení bude pojednáno ještě jednou v kapitole 8. V této kapitole je zaveden též pojem křivky v prostoru $\mathbb{E}_n$. Hlavním tématem je pojednání o grafickém znázornění geometrických útvarů v $\mathbb{E}_n$.

Úlohy

1. Nakreslete vrstevnice plochy $z = x^2 - y^2$ s kótami $1, 2, 3, -1, -2, -3$.

2. Nakreslete vrstevnice plochy $z = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ pro kóty $1, 2, 3$.

3. Určete definiční obory funkcí

a) $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{y-x}$
[$D_f = \{[x, y] :\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \wedge y - x \neq 0\}$. Označme k kružnici se středem v bodě $[0, 0]$ o poloměru 2, p přímku $y = x$. D_f je množina těch bodů ležících vně k a na k, která neleží na přímce p.]

b) $z = \frac{\log(x-y)}{x+y}$
[$D_f = \{[x, y] :\ x - y > 0 \wedge x + y \neq 0\}$. D_f je množina těch bodů $[x, y]$, které leží pod přímkou $y = x$ a neleží na přímce $y = -x$.]

a graficky je znázorněte.

- Limita a spojitost funkce jedné proměnné v daném bodě
- Limita a spojitost funkce vytvořené pomocí dvou funkcí
- Shrnutí, úlohy

3. Limita a spojitost funkce jedné proměnné

Cíl kapitoly

- Seznámit se s pojmem limity funkce v daném bodě a s pojmem spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě a pomocí limity funkce v bodě a.
- Seznámit se s výpočtem limity a spojitosti v daném bodě součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.
- Určit spojitost složené funkce na základě spojitosti její vnitřní a vnější složky.
- Seznámit se s výpočtem limity složené funkce v daném bodě.

Časová zátěž

- 8 hodin

Úvod. V této kapitole se zaměříme na zavedení pojmu limity reálné funkce $f(x)$ jedné proměnné v daném bodě. Pojem limity funkce $f(x)$ v daném bodě pak použijeme k zavedení pojmu spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě. S pojmem spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě jste se setkali již na střední škole. Jeho zavedení způsobem nezávislým na pojmu limity funkce v daném bodě byl zopakován v učebním textu „Matematika A".

V této kapitole budeme tam, kde nemůže dojít k omylu, používat pojem funkce místo reálná funkce reálné proměnné.

Pojem limity je důležitým pojmem, který je základním pojmem např. pro zavedení pojmu „derivace funkce" a určitého integrálu z dané funkce. Před jeho vlastním zavedením si zopakujeme pojem okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ a rozšíření operací „$+$, $-$, $\cdot$, $:$" na $\mathbb{R}^*$. Pojmu „limita" je nutno dobře porozumět. (Porozumění není totéž jako odříkání definicí a vět!)

množina $\mathbb{R}^*$ a operace v ní

Připomeňme si některé pojmy, které jsme již uvedli v textu „Matematika A".

Označili jsme $\mathbb{R}^*$ množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Symbolem $-\infty, \infty$ jsme nazvali nevlastními čísly. Prvky množiny $\mathbb{R}^*$ nazýváme většinou prostě čísla, resp. body. V textu „Matematika A" jsme rozšířili aritmetické operace „$+, -, \cdot, :$" pro reálná čísla i na některé případy, v nichž jeden nebo oba operandy jsou symboly $+\infty$, resp. $-\infty$. Pro $a \in \mathbb{R}$ jsme definovali: $a + \infty = \infty$, $\infty + a = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $-\infty + a = -\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot \infty = \infty$ pro $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ pro $a < 0$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ pro $a > 0$, $a \cdot (-\infty) = \infty$ pro $a < 0$. Některé operace, jako $\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$ nejsou definovány.

Dále jsme zavedli pojem okolí každého bodu $a \in \mathbb{R}^*$ takto:

Nechť $a \in \mathbb{R}$, potom pro každé $\delta > 0$ nazýváme interval $(a - \delta, a + \delta)$ okolím bodu a a značíme jej $U_\delta(a)$. Podobně, interval $(a-\delta, a\rangle$ ($\langle a, a+\delta)$) nazýváme levým (pravým) okolím bodu a a značíme jej $U_\delta^-(a)$ ($U_\delta^+(a)$).

Nechť $a = \infty$ ($a = -\infty$). Potom pro každé δ nazýváme interval (δ, ∞) ($(-\infty, \delta)$) δ–okolím bodu ∞ ($-\infty$) a značíme jej $U_\delta(\infty)$ ($U_\delta(-\infty)$).

Množinu $U_\delta^+(a) - \{a\}$ ($U_\delta^-(a) - \{a\}$) nazýváme pravým (levým) ryzím okolím bodu a. Podobně $U_\delta(a) - \{a\}$ nazýváme ryzím δ–okolím bodu a.

okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$

3.1 Limita a spojitost funkce jedné proměnné v daném bodě

V učebním textu „Matematika A" jsme zavedli pojem spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ zleva (zprava) a pojem spojitosti funkce $f(x)$ v bodě a. Doporučuji, abyste si tyto pojmy zopakovali před dalším studiem tohoto textu.

Úvodní poznámky k zavedení pojmu „limita reálné funkce jedné proměnné"

intuitivní zavedení pojmu limity funkce v bodě

Začněme s funkcí

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Tato funkce není definovaná v bodě $x = 0$. Uveďme si hodnoty této funkce v několika bodech:

x	$\pm 1{,}5$	± 1	$\pm 0{,}5$
$f(x)$	0,664996 ...	0,841470 ...	0,958851 ...

x	$\pm 0{,}1$	$\pm 0{,}01$	$\pm 0{,}001$
$f(x)$	0,998334 ...	0,999983 ...	0,999999 ...

Uvedený výpočet nás vede k domněnce, že čím x je „blíže" k číslu 0, tím je $f(x)$ „blíže" k číslu 1. Slovo „blíže" budeme precizovat takto: K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze určit číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x \in U_\delta(0)$, $x \neq 0$, je $\frac{\sin x}{x} \in U_\varepsilon(1)$, to jest pro $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$, je $1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1 + \varepsilon$. Důkaz pravdivosti této domněnky nebudeme teď provádět. Poněvadž tato domněnka je pravdivá, budeme říkat, že funkce $\frac{\sin x}{x}$ má v bodě 0 limitu rovnu 1 a budeme psát

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V dalším pojednání si uvedeme definici limity funkce $f(x)$ dvěma různými způsoby. Druhý způsob je založen na pojmu limity posloupnosti. Dříve, než přikročíme k exaktnímu zavedení pojmu „limita funkce $f(x)$" v daném bodě $a \in \mathbb{R}^*$, *zavedeme si tento pojem na základě neupřesněných pojmů*. Doufám, že to pomůže k pochopení tohoto pojmu. Pojem limity funkce je základním pojmem, jemuž je nutno dobře porozumět. *Toto porozumění je důležitější než naučení se přesnému znění definic a vět, které dávají návod k jejich výpočtu.*

Rčení „limita funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ je rovna $\alpha \in \mathbb{R}^*$“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,$$

znamená, nepřesně řečeno, toto: Číslo α lze aproximovat hodnotou funkce f se zvolenou přesností v kterémkoliv bodě x ležícím dostatečně blízko k číslu a, $x \neq a$. Jinak řečeno: jestliže „x se blíží k a“, potom „$f(x)$ se blíží k α“.

Například:

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2+1} = \frac{4}{5}$$

znamená, že pro $x \neq 2$, která se málo liší od 2, je $\frac{x+1}{x^2+1}$ definováno a $\frac{x+1}{x^2+1}$ se málo liší od $\frac{4}{5} = 0{,}8$. (Např. pro $x = 2{,}01$ dostáváme

$$\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)_{x=2{,}01} = 0{,}795619\ldots$$

a pro $x = 2{,}001$ dostáváme

$$\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)_{x=2{,}001} = 0{,}7995602\ldots\ .$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2-1} = 2$$

znamená, že pro „hodně velké x“ je $\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}$ definováno a liší se málo od 2. Např pro $x = 100$ je

$$\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)_{x=100} = 2{,}010301\ldots$$

a pro $x = 1000$ je

$$\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)_{x=1000} = 2{,}002003\ldots\ .$$

c)

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = -8$$

znamená, že pro „všechna x dostatečně blízká k číslu -4“, ale různá od -4, je $\frac{x^2-16}{x+4}$ definováno a $\frac{x^2-16}{x+4}$ je „blízko k číslu -8“. Např. pro $x = -4{,}01$ je

$$\left(\frac{x^2-16}{x+4}\right)_{x=-4{,}01} = -8{,}01$$

a pro $x = -3{,}99$ je

$$\left(\frac{x^2-16}{x+4}\right)_{x=-3{,}99} = -7{,}99\ .$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

znamená, že když „x se blíží k 0“ a je $x \neq 0$, pak „$\frac{1}{x^2}$ roste nade všechny meze“. Například pro $x = 10^{-2}$ je

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x=10^{-2}} = 10^4$$

a pro $x = 10^{-3}$ je

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x=10^{-3}} = 10^6 \ .$$

Rčení „limita zprava (zleva) funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ je rovna $\alpha \in \mathbb{R}^*$“, které symbolicky zapisujeme jako

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \alpha \qquad \left(\lim_{x\to a_-} f(x) = \alpha\right)$$

znamená toto: Hodnota funkce $f(x)$ aproximuje číslo α se zvolenou přesností ve všech číslech x, $x > a$ $(x < a)$ dostatečně blízkých k číslu a. Jinak řečeno: Jestliže „x se blíží k a“ a přitom je stále $x > a$ $(x < a)$, potom „$f(x)$ se blíží k číslu α“.

Osvětlete si tyto zápisy

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2_+} \frac{3x}{x-2} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2_-} \frac{3x}{x-2} = -\infty$

a nakreslete grafy funkcí, jejichž limity v příslušných bodech jsou uvedeny.

Limita funkce jedné proměnné

Po úvodních slovech k zavedení pojmu limity uveďme si její přesné zavedení.

limita funkce v bodě

Definice 3.1. (Limita funkce jedné proměnné)

Nechť $y = f(x)$ je reálná funkce reálné proměnné x.
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a píšeme

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,$$

jestliže ke každému ε–okolí bodu α existuje δ–okolí bodu a tak, že

1. funkce $f(x)$ je definovaná v $U_\delta(a) - \{a\}$
2. pro všechna $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)$.

V bodech $a \in \mathbb{R}$ zavádíme i limitu zprava a limitu zleva funkce $f(x)$ takto:
Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnu číslu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a píšeme

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \alpha \qquad \left(\lim_{x \to a_-} f(x) = \alpha \right),$$

jestliže ke každému ε–okolí bodu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ existuje pravé (levé) δ–okolí bodu a tak, že
1. funkce $f(x)$ je definována v $U_\delta^+(a) - \{a\}$ $(U_\delta^-(a) - \{a\})$
2. pro všechna $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ $(x \in U_\delta^-(a) - \{a\})$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)$.

Poznámka 1. Jestliže funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu (c, d), můžeme

- místo $\lim\limits_{x \to c_+} f(x)$ psát $\lim\limits_{x \to c} f(x)$,
- místo $\lim\limits_{x \to d_-} f(x)$ psát $\lim\limits_{x \to d} f(x)$.

Poznámka 2. Všimněte si, že označení $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to \infty} f(x))$ je vlastně rovněž označení pro jednostranné limity.

Lehce nahlédneme platnost této věty.

Věta 3.1. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a nechť a je vnitřní nebo koncový bod intervalu I. Potom funkce $y = f(x)$ má v bodě a limitu $\alpha \in \mathbb{R}^*$, když a jenom když platí: Jestliže posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, kde $x_n \in D_f$, má limitu a, potom posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ má limitu α.*

Je tedy možno limitu funkce $f(x)$ definovat alternativně takto:

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a nechť a je vnitřní nebo koncový bod intervalu I. Potom řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, jestliže platí: Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, kde $x_n \in D_f$, posloupnost s limitou a, potom $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ je konvergentní a platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$.

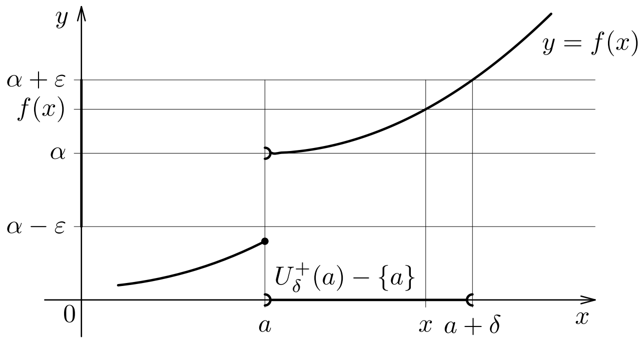
Podobně se definuje užitím posloupností limita zprava (zleva) funkce $f(x)$ v bodě a.

Definici 3.1 si osvětlíme na několika příkladech.

Graf 1. Na obrázku 3.1 je graf funkce $y = f(x)$ pro níž je

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \alpha, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě je $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, $U_\delta^+(a)-\{a\} = (a, a+\delta)$. Z obrázku je patrno, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a, a+\delta)$ je funkce $f(x)$ definovaná a $\alpha-\varepsilon < f(x) < \alpha+\varepsilon$. Graf funkce $y = f(x)$ probíhá v intervalu $(a, a+\delta)$ v pásu vytvořeném přímkami $y = \alpha - \varepsilon$ a $y = \alpha + \varepsilon$.

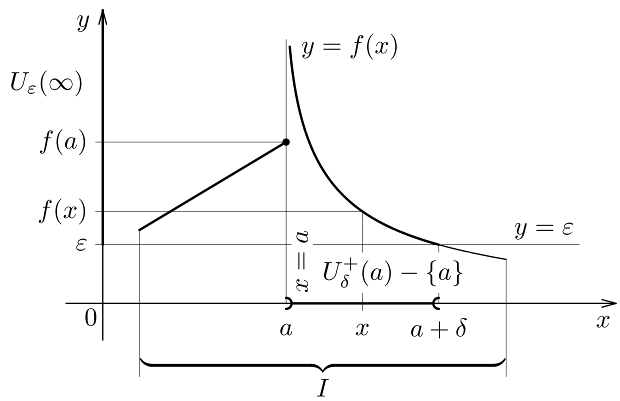


Obrázek 3.1: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \alpha,\ a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Graf 2. Na obrázku 3.2 je graf funkce $y = f(x)$, pro níž platí

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \alpha, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R}, \alpha = \infty.$$

V tomto případě je $U_\varepsilon(\alpha) = U_\varepsilon(\infty) = (\varepsilon, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $U_\delta^+(a) - \{a\} = (a, a+\delta)$. Z obrázku je patrno, že k libovolnému ε existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a, a+\delta) = U_\delta^+(a)$ je $f(x) > \varepsilon$. V intervalu $(a, a+\delta)$ probíhá graf funkce $y = f(x)$ nad přímkou $y = \varepsilon$.

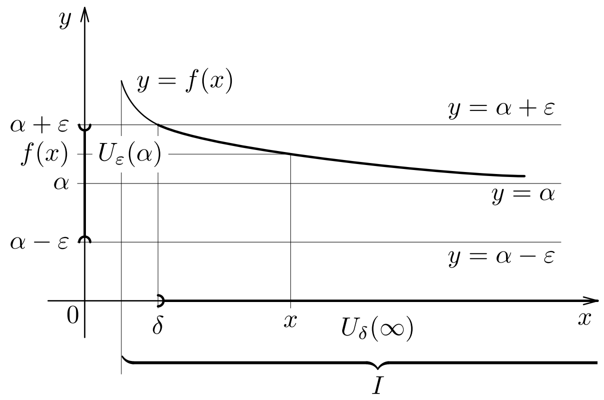


Obrázek 3.2: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \alpha,\ a \in \mathbb{R}, \alpha = \infty$.

Graf 3. Na obr. 3.3 je graf funkce $y = f(x)$, pro níž je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha, \qquad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě je $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $U_\delta(\infty) = (\delta, \infty)$ pro libovolné δ. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje δ tak, že pro $x \in U_\delta(\infty) = (\delta, \infty)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. Graf funkce $f(x)$ v intervalu (δ, ∞) probíhá v pásu vytvořeném přímkami $y = \alpha - \varepsilon$ a $y = \alpha + \varepsilon$.



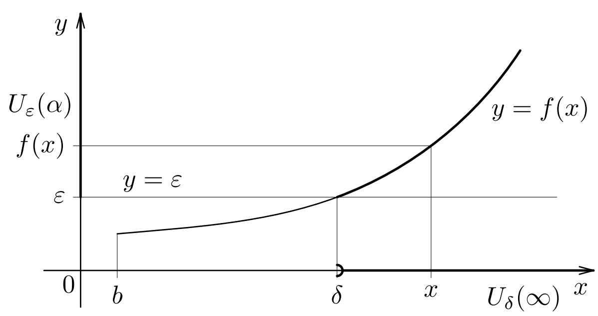
Obrázek 3.3: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Graf 4. na obr. 3.4 je graf funkce $y = f(x)$, definované na intervalu $I = (b, \infty)$, pro níž platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha, \quad \text{kde } \alpha = \infty.$$

V tomto případě je $U_\varepsilon(\alpha) = U_\varepsilon(\infty) = (\varepsilon, \infty)$ a $U_\delta(\infty) = (\delta, \infty)$.

Z obrázku je vidět, že k libovolnému číslu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ lze určit $\delta \in \mathbb{R}$ tak, že pro $x \in (\delta, \infty)$, tj. pro $x \in U_\delta(\infty)$ je $f(x) > \varepsilon$, tj. $f(x) \in U_\varepsilon(\infty)$.



Obrázek 3.4: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Graf 5. Na obr. 3.5 je graf funkce $y = f(x)$, pro níž platí

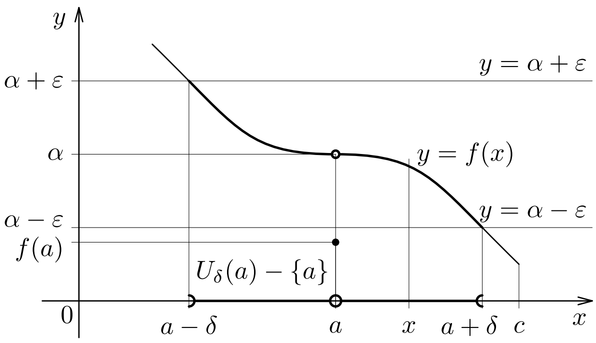
$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \text{kde } a, \alpha \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě je $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $U_\delta(a) - \{a\}$ je $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. Tedy pro $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ je $a - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$.

Ukažme, že platí tato věta:

Věta 3.2. *Nechť $f(x)$ je funkce. Potom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$), kde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, když a jenom když*

$$\lim_{y\to 0_+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \alpha \qquad \left(\lim_{y\to 0_-} f\left(\frac{1}{y}\right) = \alpha\right).$$



Obrázek 3.5: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \ a,\alpha\in\mathbb{R}$.

Důkaz: Důkaz vychází z toho, že vztahem

$$y=\frac{1}{x}$$

je ke každému $x\in U_\delta(\infty)$, $\delta\neq 0$ přiřazeno právě jedno $y\in U^+_{\frac{1}{\delta}}(0)$ a každé $y\in U^+_{\frac{1}{\delta}}(0)$ je přiřazeno právě k jednomu $x\in U_\delta(\infty)$. Pro $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ je důkaz analogický. □

Úloha. Zvolte si funkci $y=f(x)$ a načrtněte její graf pro tyto případy:

a) $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$, $a\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $a\in\mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $a\in\mathbb{R}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Limita funkce $f(x)$ v daném bodě a nezávisí na hodnotě funkce $f(x)$ v bodě a. Tedy funkce $f(x)$ nemusí být v bodě a ani definovaná. Platí tedy tato poučka:

Nechť $a\in\mathbb{R}^*$, nechť existuje $\delta\in\mathbb{R}$ tak, že $f(x)=g(x)$ pro $x\in U_\delta(a)-\{a\}$. Potom existuje-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, existuje i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x).$$

Podobně pro $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Funkce $f(x)$ nemusí mít v daném bodě limitu. Uveďme tyto příklady.

Příklad 3.1. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}, \\ -1 & \text{pro } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom neexistuje $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ ani $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$.

Skutečně. V každém intervalu $(a, a + \delta)$ $((a - \delta, a))$ jsou jak body x, v nichž je $f(x) = 1$, tak body x, v nichž je $f(x) = -1$. Tedy neexistuje ani $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ ani $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$.

Příklad 3.2. Ukažme, že neexistuje $\lim\limits_{x \to 0_+} \sin \frac{1}{x}$.

Řešení. Především zvažme, že funkce $\sin \frac{1}{x}$ je definovaná pro všechna $x \neq 0$. Položme

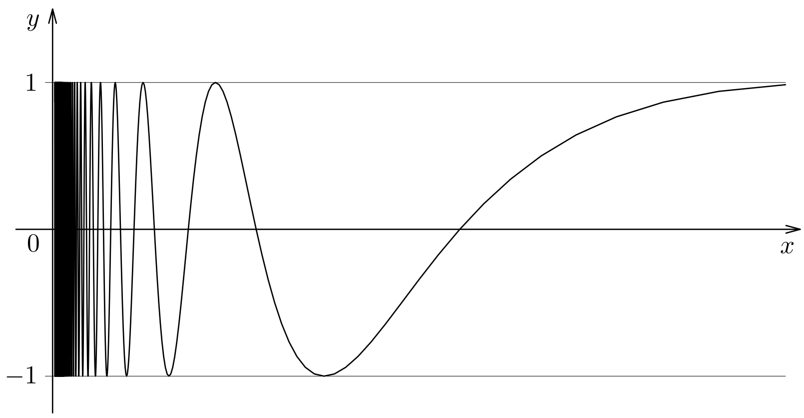
$$x_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zřejmě posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu rovnu 0, tj. $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$. Dále

$$\sin \frac{1}{x_k} = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \begin{cases} -1 & \text{pro } k \text{ liché}, \\ 1 & \text{pro } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Tedy v každém intervalu $(0, \delta)$ jsou jednak body, v nichž funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá hodnoty -1, jednak body, v nichž funkce $\sin \frac{1}{x}$ nybývá hodnoty 1, takže neexistuje $\lim\limits_{x \to 0_+} \sin \frac{1}{x}$.

Na obr. 3.6 je vyznačen graf funkce $\sin \frac{1}{x}$ pořízený na počítači.



Obrázek 3.6: Graf funkce $\sin \frac{1}{x}$.

V učebním textu „Matematika A“ jsme zavedli pojem spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě a. Zavedení tohoto pojmu lze provést pomocí pojmu limity funkce $f(x)$ v bodě a takto.

spojitost funkce v bodě

Definice 3.2. (Spojitost funkce v bodě)

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $(\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = f(a))$ $[\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = f(a)]$. Potom $f(x)$ je v bodě a spojitá (spojitá zprava) [spojitá zleva].

Je-li a levým (pravým) koncovým bodem intervalu I, na němž je funkce definovaná, můžeme říkat, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá místo $f(x)$ je v bodě a zprava (zleva) spojitá.

Jestliže funkce $f(x)$ je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá, potom výpočet limity funkce $f(x)$ v bodě a lze určit pouhým výpočtem hodnoty funkce $f(x)$ v bodě a.

V učebním textu „Matematika A“ jsme uvedli, že elementární funkce polynom, racionální lomená funkce $\sqrt[n]{x}$, a^x $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ *jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

Uveďme si několik příkladů.

Příklad 3.3. Dokažme, že $\lim\limits_{x\to 10} \log x = 1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Skutečně. Funkce $\log x$, $\sin x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Tedy

$$\lim_{x\to 10} \log x = \log 10 = 1, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 3.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažme

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & n \text{ je sudé,} \\ -\infty, & n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Skutečně. *Nechť n je sudé.* Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon > 1$. Položme $\delta = -\sqrt[n]{\varepsilon}$. Potom pro $x \in U_\delta(-\infty)$, tj. pro $x \in (-\infty, -\sqrt[n]{\varepsilon})$ je $x^n > \varepsilon$, tj. $x^n \in U_\varepsilon(\infty)$, takže

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \infty \text{ pro } n \text{ sudé.}$$

Podobně se dokáže, že *pro n liché* je $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

Příklad 3.5. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1).$$

Řešení. Polynom je funkce spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, tedy i v bodě 2. Limita v bodě a, v němž je funkce spojitá, je rovna její funkční hodnotě v bodě a. Tedy

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Příklad 3.6. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x^2-1}.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$ je racionální lomená funkce. Víme, že racionální lomená funkce je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, to jest v každém bodě, v němž je jmenovatel nenulový. V našem případě je jmenovatel $x^2 - 1$ v bodě 2 roven $2^2 - 1 = 3$, takže $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ je rovna $f(2)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{3\cdot 2+2}{2^2-1} = \frac{8}{3}.$$

Příklad 3.7. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Zřejmě $D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Funkce $f(x)$ není tedy v bodě 2 spojitá, neboť v něm ani není definovaná. Funkci $f(x)$ přepišme na tvar

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Položme

$$g(x) = \frac{x+2}{x-3}.$$

Zřejmě $f(x)$=$g(x)$ pro $x \neq 2$. Poněvadž limita funkce nezávisí na její hodnotě v bodě, v němž limitu počítáme, je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x). \tag{3.1}$$

Funkce $g(x)$ je však spojitá v bodě 2, takže

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2),$$

tj.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{2+2}{2-3}.$$

Podle (3.1) je tedy

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -4.$$

3.2 Limita a spojitost funkce vytvořené pomocí dvou funkcí

Pro funkce, které vzniknou sečítáním, odečítáním, násobením a dělením funkcí, jejichž uvažované limity v daném bodě a známe, můžeme počítat limitu podle následující věty.

Věta 3.3.

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou funkce pro něž platí

$$\lim f(x) = A, \qquad \lim g(x) = B,$$

kde $\lim$ *značí jeden ze symbolů* $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, *$a \in \mathbb{R}$ a symboly A, B představují reálná čísla nebo jeden ze symbolů $+\infty$ nebo $-\infty$ (to jest $A, B \in \mathbb{R}^*$). Potom platí*

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = A \ \pm B, \tag{3.2}$$

$$\lim f(x) \cdot g(x) = A \ \cdot B, \tag{3.3}$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \tag{3.4}$$

pokud má pravá strana význam v $\mathbb{R}^*$.

Důkaz: Důkaz věty proveďme jen pro některé případy. Dokažme vztah (3.2) pro limitu v bodě a pro tyto případy. Ostatní případy se dokazují podobně.

α) Nechť $a, A, B \in R$. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Dokažme, že $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, existuje takové $\delta_1 > 0$, že pro $x \neq a$, $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$ je funkce $f(x)$ definovaná a platí

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Podobně, poněvadž $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ze vztahů (3.5),(3.6) dostáváme pro $x \neq a$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$

$$|f(x) \pm g(x) - (A \pm B)| = |(f(x) - A) \pm (g(x) - B)| \leq \\ \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$$

β) Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, $B = \infty$. Nechť $\varepsilon, K > 0$ jsou libovolná čísla. Poněvadž $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, lze k číslu ε určit $\delta_1 > 0$ tak, že pro $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$, $x \neq a$, je funkce $f(x)$ definovaná a platí

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

tj.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Poněvadž $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, lze k číslu $(K + \varepsilon - A)$ určit $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$g(x) > K + \varepsilon - A.$$

Označme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, je funkce $g(x)$ definovaná a platí

$$f(x) + g(x) > A - \varepsilon + (K + \varepsilon - A) = K.$$

Je tedy

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B = A + \infty = \infty.$$

Podobně se dokáže, že

$$\lim_{x \to a_+} (f(x) - g(x)) = -\infty.$$

□

Poznámka. Nechť $g(x) = c$, kde c je reálná konstanta. Potom $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ pro libovolné a, neboť pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro všechna x platí

$$|g(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, platí tedy podle věty 3.3

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot A,$$

pokud má cA význam.

Z věty 3.3 dostáváme pro funkce spojité tuto větu.

Věta 3.4.

Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v bodě a. Potom i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ je spojitá v bodě a. Jestliže navíc $g(a) \neq 0$, je i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě a.

Příklad 3.8. Funkce $\sin x$, x^2-1 jsou spojité v každém bodě. Tedy i funkce $\sin x + x^2 - 1$, $\sin x - x^2 + 1$, $(x^2-1)\cdot \sin x$ jsou spojité v každém bodě. Poněvadž $x^2 - 1 \neq 0$ pro $x \neq 1$ a pro $x \neq -1$, je funkce $\frac{\sin x}{x^2-1}$ spojitá v každém bodě x, kde $x \neq \pm 1$.

Příklad 3.9. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), \quad a_n \neq 0.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Funkci $f(x)$ přepišme na tvar

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n} + \cdots + a_1 \frac{x}{x^n} + a_0 \frac{1}{x^n} \right),$$

tj.

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

Podle věty 3.3 je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \left(\lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x^m} = \frac{c}{\infty} = 0$ pro $m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \lim_{x\to\infty} a_n.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } a_n > 0, \\ -\infty & \text{pro } a_n < 0. \end{cases}$$

Příklad 3.10. Vypočítejte

$$\lim_{x\to-\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), \quad a_n \neq 0.$$

Řešení. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Položme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dostáváme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} a_n + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^m} = 0$, $m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ a

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ -\infty & \text{pro } n \text{ liché,} \end{cases}$$

dostáváme [1)]

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n \cdot \infty & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ -\operatorname{sgn} a_n \cdot \infty & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Tedy např. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2 - 3x + 1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) = \infty$.

Příklad 3.11. Podle věty 3.3 je např. $\lim\limits_{x\to0^+} (x^2 + 1/x) = \infty$, neboť x^2 je funkce spojitá, takže $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$ a $\lim\limits_{x\to0^+} 1/x = \infty$.

Příklad 3.12. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 - 2x + 1}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 - 2x + 1}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^2 - 3x + 1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^2 - 2x + 1) = -\infty$, nemůžeme bezprostředně použít žádnou větu o limitě podílu, kterou jsme zatím uvedli, neboť $\frac{\infty}{-\infty}$ není definováno ani v $\mathbb{R}^*$. Avšak pro $x \neq 0$ je $f(x) = g(x)$, kde

$$g(x) = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2.$$

Příklad 3.13. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x + 1}{x^2 + x - 1}.$$

[1)] $\operatorname{sgn} a = 1$, je-li $a > 0$, $\operatorname{sqn} a = -1$, je-li $a < 0$

Řešení. Zřejmě, dělíme-li čitatele i jmenovatele číslem x^2, kde $x \neq 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x + 1}{x^2 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Příklad 3.14. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x - 1}.$$

Řešení. Zřejmě, dělíme-li čitatele i jmenovatele x^4 pro $x \neq 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4})}{\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})} = \frac{0}{1} = 0.$$

Větu 3.3 pro výpočet $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nelze použít, jestliže $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = 0$. Je-li $A \neq 0$, je tento případ řešen následující větou. O případě, kdy $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, pojednáme později.

Věta 3.5. (Limita podílu $f(x)/g(x)$, je-li $\lim g(x) = 0$)

Nechť $a, A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro* $x \in U_\delta^+(a) - \{a\}$ *je funkce* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *definovaná a platí*

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} < 0\right).$$

Potom

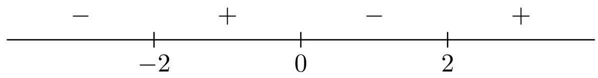
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad (-\infty).$$

Příklad 3.15. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x^2 - 4}.$$

Řešení. Zřejmě $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x = 6$, $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$. Tedy limita čitatele je různá od nuly a limita jmenovatele je rovna 0. Určeme znamení funkce $\frac{3x}{x^2-4}$. Znamení je znázorněno na obr. 3.7. Poněvadž existuje pravé okolí bodu 2, v němž je funkce $\frac{3x}{x^2-4}$ kladná, je podle věty 3.5

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x^2 - 4} = \infty.$$

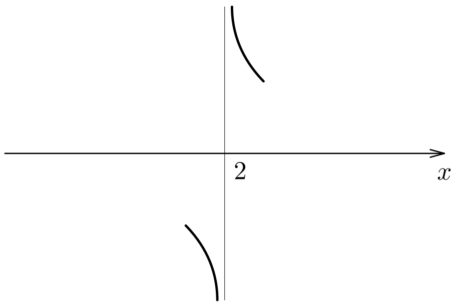


Obrázek 3.7: Znamení funkce z příkladu 3.15.

Podobně bychom zjistili, že

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{x^2-4} = -\infty.$$

Poznámka. Schematicky chování funkce $\frac{3x}{x^2-4}$ pro x „blízko" k číslu 2 znázorňujeme podobně jako na obr. 3.8.



Obrázek 3.8: Znázornění chování funkce $\frac{3x}{x^2-1}$ v okolí bodu $x = 2$, $x \neq 2$.

Příklad 3.16. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}.$$

Řešení. Poněvadž $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1) = 0$, $\frac{3x+1}{x^2-1} > 0$ pro $x > 1$ (určete znamení racionální lomené funkce $\frac{3x+1}{x^2-1}$), dostáváme podle věty 3.5, že

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1} = \infty.$$

Spojitost složené funkce

Věta 3.6. (Spojitost složené funkce)

Nechť funkce $u = \varphi(x)$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce $f(u)$ je spojitá v bodě $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a. Je tedy $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$.

Důkaz: Ze spojitosti funkce f v bodě $\alpha = \varphi(a)$ vyplývá, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\varrho > 0$, že pro $u \in U_\varrho(\alpha)$ (tj. pro $x \in (\alpha - \varrho, \alpha + \varrho)$) je funkce $f(u)$ definovaná a platí $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$ (tj. $f(\alpha) - \varepsilon < f(u) < f(\alpha) + \varepsilon$). Poněvadž funkce φ je spojitá v bodě a, k uvedenému číslu ϱ existuje takové $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(a)$ (tj. pro $a - \delta < x < a + \delta$) je funkce $\varphi(x)$ definovaná a $\varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ (to jest $\alpha - \varrho < \varphi(x) < \alpha + \varrho$). Je-li tedy $x \in U_\delta(a)$, je $u = \varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$, tj. $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Funkce $f(\varphi(x))$ je tedy spojitá v bodě a. □

Příklad 3.17. Funkce $\sin(x^2 + x + 1)$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Skutečně. Položme $u = \varphi(x) = x^2 + x + 1$, $f(u) = \sin u$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Víme, že polynom je funkce spojitá v každém bodě. Je tedy $\varphi(x)$ spojitá i v bodě a. Označme $\alpha = a^2 + a + 1$. Funkce $f(u)$ je spojitá v každém bodě, tedy i v bodě α. Podle věty 3.6 je tedy $f(\varphi(x))$ spojitá v bodě a. Poněvadž a byl libovolný bod z intervalu $(-\infty, \infty)$, je $f(\varphi(x))$ spojitá v každém bodě $a \in (-\infty, \infty)$.

Věta 3.7. (Spojitost složené funkce)

Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Položme $\alpha = \varphi(a)$. Nechť existují taková čísla κ, σ, že $\varphi(U_\kappa(a)) = U_\sigma^+(\alpha)$ $(\varphi(U_\kappa(a)) = U_\sigma^-(\alpha))$. Nechť funkce f je spojitá zprava (zleva) v bodě α. Potom funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a.

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž funkce $f(u)$ je spojitá zprava v bodě α, existuje $\varrho > 0$ tak, že $f(u)$ je definovaná v $U_\varrho^+(\alpha)$ a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Poněvadž $\varphi(x)$ je spojitá v bodě a, k uvedenému číslu ϱ existuje $\delta_1 > 0$, že pro $x \in U_{\delta_1}(a)$ je funkce $\varphi(x)$ definovaná a $\varphi(x) \in U_\varrho^+(\alpha)$. Položme $\delta = \min(\kappa, \delta_1)$. Potom pro $x \in U_\delta(a)$ je $\varphi(x) \in U_\varrho^+(\alpha)$ a $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\varphi(a))$. Je tedy $\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f\varphi(a))$, takže $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a. □

Uveďme si nyní větu o limitě složené funkce, je-li její vnější složka spojitá.

Věta 3.8. (Limita složené funkce)

Nechť φ, f jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \alpha.$$

Nechť funkce f je spojitá v bodě α. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $f(\varphi(x))$ existuje v $U_\delta(a)$ a platí

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to a} \varphi(x)) = f(\alpha). \tag{3.7}$$

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž funkce f je spojitá v bodě α, existuje $\varrho > 0$ tak, že pro $u \in U_\varrho(\alpha)$ je funkce f definovaná a $f(u) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Poněvadž $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha$, k číslu ϱ existuje takové $\delta > 0$, že pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je funkce $\varphi(x)$ definovavá a $\varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$. Tedy pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ má $f(\varphi(x))$ význam. Je-li $x \in U_\delta(a) - \{a\}$, je $u = \varphi(x) \in U_\varrho(\alpha)$ a tedy $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$. Platí tedy (3.7). □

Příklad 3.18. Ukažme, že

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x+1}{2x-1}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Skutečně. Položme $\varphi(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, $f(u) = e^u$. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Funkce e^u je spojitá v bodě $u = \frac{3}{2}$, takže

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x+1}{2x-1}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Příklad 3.19. Nechť $\varphi(x) = x^2 + 1$, $f(u) = \sqrt{u}$. Funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě 0.

Skutečně. $\varphi(x)$ je spojitá v bodě $a = 0$. Položme $\alpha = \varphi(a)$, tj. $\alpha = 1$. Funkce $\sqrt{u}$ je spojitá v bodě $\alpha = 1$. Podle věty 3.8 je tedy funkce $\sqrt{x^2+1}$ spojitá v bodě $a = 0$.

Poznámka. K domněnce, že funkce $\sqrt{x^2+1}$ je v bodě $a = 0$ spojitá, můžeme dospět i touto úvahou. Když x je dostatečně blízko k 0, je $x^2 + 1$ blízko k 1 a stále je $x^2 + 1 > 0$. Tedy $\sqrt{x^2+1}$ je blízko k číslu $\sqrt{1} = 1$. Poněvadž funkce $\sqrt{x^2+1}$ má v bodě $a = 0$ hodnotu 1, je funkce $\sqrt{x^2+1}$ v bodě $a = 0$ spojitá.

Poznámka. Je možno vyslovit řadu dalších vět podobných k větě 3.8, které vzniknou za předpokladu, že funkce $f(x)$ je pouze zprava, resp. zleva spojitá v α a místo $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ se uvažuje $\lim\limits_{x\to a_+} \varphi(x)$ resp. $\lim\limits_{x\to a_-} \varphi(x)$.

Věta 3.9. (Limita složené funkce)

Nechť φ, f jsou funkce jedné proměnné a nechť $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Nechť

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha, \quad \lim_{u\to\alpha} f(u) = \beta. \tag{3.8}$$

Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$ a k němu okolí $U_\varrho(\alpha)$ tak, že

$$\varphi(U_\kappa(a) - \{a\}) = U_\varrho(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{3.9}$$

Potom

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta$$

(tj. $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u\to \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} f(u)$).

Důkaz: Dříve, než přikročíme k vlastnímu důkazu, uvažme, že z (3.9) vyplývá, že pro $x \in U_\kappa(a) - \{a\}$ je $\varphi(x) \neq \alpha$.

Nechť $U_\varepsilon(\beta)$ je libovolné okolí bodu β. Poněvadž $\lim\limits_{u\to\alpha} f(u) = \beta$, existuje okolí $U_{\delta_1}(\alpha)$ tak, že funkce f je v $U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}$ definovaná a platí

$$f(u) \in U_\varepsilon(\beta) \quad \text{pro } u \in U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{3.10}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \alpha$, k okolí $U_{\delta_1}(\alpha)$ existuje takové okolí U_{δ_2} bodu a, že funkce φ je definovaná v $U_{\delta_2}(a) - \{a\}$ a

$$\text{pro } x \in U_{\delta_2}(a) - \{a\} \text{ je } \varphi(x) \in U_{\delta_1}(\alpha). \tag{3.11}$$

Položme

$$U_\delta(a) = U_{\delta_2}(a) \cap U_\kappa(a). \tag{3.12}$$

Věta bude dokázána, dokážeme-li, že pro všechna $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je

$$f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\beta). \tag{3.13}$$

Nechť tedy $x \in U_\delta(a) - \{a\}$. Vzhledem k (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) $u = \varphi(x) \in U_{\delta_1}(\alpha) - \{\alpha\}$. Je tedy

$$f(u) \in U_\varepsilon(\beta),$$

to jest

$$f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Je tedy

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta.$$

□

Příklad 3.20. Ukažme, že

$$\lim_{x\to\infty} e^{3x+1} = \infty.$$

Skutečně. Položme $\varphi(x) = 3x + 1$, $f(u) = e^u$. Zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty = \alpha$, $\lim\limits_{u\to\alpha} e^u = \infty$. Podle věty 3.9 je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{3x+1} = \infty$.

Podobně dokážeme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x+1} = 0$.

Je řada vět analogických k větě 3.9. Např. následující věta.

Věta 3.10. (Věta o limitě složené funkce)

Nechť φ, f jsou funkce jedné proměnné a nechť $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Nechť

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \alpha, \qquad \lim_{u\to\alpha^+} f(u) = \beta. \tag{3.14}$$

Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$ a k němu okolí $U_\varrho^+(\alpha)$ tak, že

$$\varphi(U_\kappa(a) - \{a\}) = U_\varrho^+(\alpha) - \{\alpha\}. \tag{3.15}$$

Potom

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \beta.$$

3.3 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

V kapitole je zaveden pojem limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ a tento pojem je použit k zavedení pojmu spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Jsou vyšetřovány limity funkcí $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ v daném bodě pomocí limit funkcí $f(x)$, $g(x)$ v tomto bodě. Je vyšetřována spojitost funkcí $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ v daném bodě, jsou-li v tomto bodě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$. Rovněž je vyšetřovaná limita složené funkce v daném bodě a spojitost složené funkce v daném bodě.

Úlohy

1. Vysvětlete pojem limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$.

2. Vysvětlete pojem spojitosti funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$.

3. Nechť $f(x) < g(x) < h(x)$, $x \in I$, $x \neq a$. Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$. Existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x)$? V případě, že existuje, určete $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

4. Jaké věty znáte pro výpočet limity součtu, součinu a podílu dvou funkcí?

5. Vysvětlete pojem funkce spojité daném v bodě.

6. Jaké věty znáte o spojitosti součtu, součinu a podílu dvou funkcí?

7. Co víte o spojitosti složené funkce?

8. Jakou větu znáte pro výpočet limity složené funkce?

9. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Vypočítejte $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. [1, −1, neexistuje]

10. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1)$ [7]

b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+1}{x^2+1}$ $[-\frac{1}{2}]$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{\sin x}{x+1} - 2\right)$ $[\frac{\sin 3}{4} - 2]$

11. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+x-1}{3x+1}$ $[\infty]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+1}{4x^2+x-1}$ $[\frac{3}{4}]$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x$ $[\frac{\pi}{2}]$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x$ [0]

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ [+1, −1]

f) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$ [∞, 0]

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \log x$ [$-\infty$, neexistuje]

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \log_{\frac{1}{10}} x$ [∞]

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ [neexistuje]

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ [0]

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ [neexistuje]

v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}$ [0]

12. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3x+1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3x+1}{x^2-1}$ [∞, $-\infty$, $-\infty$, ∞]

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \frac{3x}{(3x+2)^2}$ [$-\infty$]

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x}\right)$ [$+\infty$, $-\infty$]

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$ [$\frac{1}{3}$]

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{3x+1}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{3x+1}$ [$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$]

13. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{2x^2+3})$ [$+\infty$]

14. Je funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ spojitá v bodě 0? Je funkce $g(x) = f(x)$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $g(0) = 1$ spojitá v bodě $a = 0$?

[$f(x)$ není, $g(x)$ je]

15. Je funkce

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ spojitá v bodě 0? [není]

b) $g(x) = f(x)$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 2$ spojitá v bodě 0? [není]

16. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{x^2}}$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1-x)$ [nemá limitu]

c) $\lim\limits_{x\to e^+} \frac{\ln(x-e)}{x}$ [$-\infty$]

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{x+1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{x+1}{x}}$ [∞, 0]

- Zavedení pojmu derivace funkce
- Derivace elementárních funkcí
- Shrnutí, úlohy

4. Derivace reálné funkce reálné proměnné

Cíl kapitoly

- Zavést pojem derivace reálné funkce reálné proměnné. Porozumět jejímu zavedení s ohledem na aplikace v ekonomii.
- Odvodit derivace elementárních funkcí.
- Odvodit pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.
- Odvodit pravidla pro derivování složené a inverzní funkce.

Časová zátěž

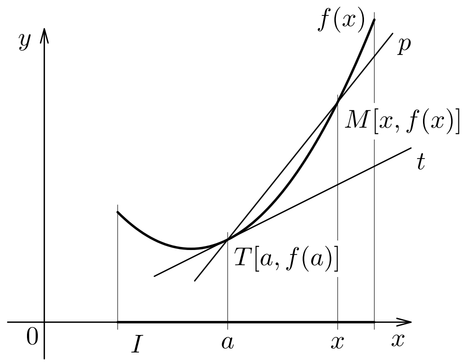
- 14 hodin.

4.1 Zavedení pojmu derivace funkce

zavedení derivace funkce

Začneme s touto úlohou.

Nechť $y = f(x)$ je reálná funkce reálné proměnné definovaná na intervalu I. Nechť a je vnitřním bodem intervalu I. Upřesněme si intuitivně chápaný pojem tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$ (viz obr. 4.1)



Obrázek 4.1: Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$.

Názor nás vede k této definici. Zvolme bod $x \in I$, $x \neq a$, a uvažujme přímku p jdoucí body $T[a, f(a)]$, $M[x, f(x)]$ (p je sečnou grafu funkce $f(x)$). Její směrnice, označme ji $k(x)$ (to jest tangens úhlu, který svírá přímka p s kladným směrem osy x), je rovna

$$k(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, .$$

Lze tedy při pevně zvoleném a považovat $k(x)$ za funkci proměnné x. Tato funkce není v bodě a definovaná.

Existuje-li

$$k = \lim_{x \to a} k(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pak přímku jdoucí bodem $T[a, f(a)]$ se směrnicí k nazveme tečnou grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T. Přímku na ni kolmou nazveme normálou křivky $y = f(x)$ v bodě T. (Podobně mluvíme o pravé (levé) polotečně grafu funkce $y = f(x)$.)

V řadě aplikací se setkáváme s touto úlohou. Nechť $f(x)$ je daná funkce. Má se určit limita (resp. limita zprava (zleva)) v bodě a funkce $F(x)$ definované vztahem

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pro tyto limity, pokud existují, zavádíme pojem derivace funkce $f(x)$ v bodě a následující definicí.

Definice 4.1. (Definice derivace funkce)

Nechť $f(x)$ je funkce, a je reálné číslo. Jestliže existuje číslo, označme jej $f'^{+}(a) \in \mathbb{R}$ ($f'^{-}(a) \in \mathbb{R}$) tak, že

$$f'^{+}(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \left(f'^{-}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \right) \tag{4.1}$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací zprava* funkce $f(x)$ v čísle a (*derivací zleva* funkce $f(x)$ v čísle a).
Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci zprava $f'^{+}(a)$ a derivaci zleva $f'^{-}(a)$ a jestliže $f'^{+}(a) = f'^{-}(a)$, nazýváme tuto společnou hodnotu *derivací funkce* $f(x)$ v bodě a a značíme ji $f'(a)$. Je tedy

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dohoda o označování. Jestliže uvažujeme funkci $f(x)$ na intervalu I, jehož levým (pravým) koncovým bodem je bod a, budeme někdy používat označení $f'(a)$ místo $f'^{+}(a)$ ($f'^{-}(a)$).

Poznámka 1. Všimněmě si, že funkce

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

vystupující v definici derivace funkce $f(x)$ v (4.1) není definovaná v bodě a, neboť jmenovatel je v bodě a roven 0.

Poznámka 2. Položíme-li v (4.1) $x = a + h$, můžeme derivaci funkce $f(x)$ v čísle a definovat též jako

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{4.2}$$

Na h se můžeme dívat jako na přírustek neodvosle proměnné x, to jest h je číslo, o něž se změní x–ová souřadnice, přejdeme-li z bodu a do bodu $a + h$. Přírustek neodvisle proměnné se často označuje též jako $\triangle x$. Čitatel v (4.2) je pak přírustkem odvisle proměnné y a označujeme jej obvykle $\triangle y$, resp. $\triangle f$. Tedy Δy je hodnota, o níž se změní funkční hodnota při přechodu z bodu a do bodu $a + h$. Tedy (4.2) lze zapsat jako

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Poznámka 3. *Pojem derivace funkce má značné uplatnění v ekonomických aplikacích.* Vyjdeme z příkladu, který nám pomůže pochopit problematiku využití derivací v některých ekonomických aplikacích.

Nechť $s = s(t)$ vyjadřuje ujetou vzdélenost auta za dobu t. Nechť t_1, t_2, kde $t_1 < t_2$, jsou dva časové okamžiky. Potom za dobu $t_2 - t_1$ auto ujede vzdálenost $s(t_2) - s(t_1)$. Číslo

$$\frac{s(t_2) - s(t_1}{t_2 - t_1}$$

vyjadřuje tedy průměrnou rychlost, kterou auto dosáhne v době od časového okamžiku t_1 do časového okamžiku t_2, tj. za dobu $t_2 - t_1$. Potom derivaci $s'(t_0)$ funkce $s(t)$ v bodě t_0, tj.

$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

můžeme nazvat *okamžitou rychlostí* auta v časovém okamžiku t_0.

význam derivace

Jestliže proměnné x a y značí nějaké ekonomické veličiny, vyjadřuje funkce $y = f(x)$ jejich vzájemnou závislost. Potom $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ vyjadřuje průměrný a $f'(a)$ okamžitý poměr změny těchto ekonomických veličin. V závislosti na ekonomické aplikaci dostává derivace $f'(a)$ vhodný ekonomický název.

Jestliže $y = f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$, potom přímka jdoucí bodem $T[a, f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$ je tečnou ke grafu $y = f(x)$ v jejím bodě T. Přímka k ní kolmá, jdoucí bodem T, je její normálou v bodě T.

Derivace funkce $f(x) = c$, $c \in (-\infty, \infty)$

Nechť $f(x) = c$, $c \in (-\infty, \infty)$. Potom podle definice 4.1 dostáváme pro $a \in (-\infty, \infty)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

Je tedy

$$c' = 0, \quad kde\ c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Derivace funkce $f(x) = x^n$

Určeme derivaci funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, v bodě $a \in (-\infty, \infty)$. Podle definice je

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Poněvadž

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

a limita funkce nezáleží na hodnotě funkce v bodě, v němž limitu počítáme, dostáváme odtud

$$f'(a) = \lim_{x \to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Vzhledem ke spojitosti polynomu v bodě a je $f'(a)$ rovna funkční hodnotě polynomu v závorce v bodě a, takže

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{4.3}$$

Příklad 4.1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = x^3$ v jejím bodě $x = 4$.

Řešení. Podle (4.3) dostáváme v obecném bodě $x \in (-\infty, \infty)$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Tedy $f'(4) = 3 \cdot 4^2$, tj. $f'(4) = 48$.

Poznámka. Místo $f'(4)$ můžeme psát $(x^3)'_{x=4}$.

Úmluva. Řekneme-li, že funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu I, bude to znamenat, že má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I a jestliže levý (pravý) koncový bod patří do I, potom má v něm derivaci zprava (zleva). Podobně pro vyšší derivace.

Zaveďme si nyní pojem derivace funkce $f(x)$ vyšších řádů.

Derivace funkce vyšších řádů.

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu $I_1 \subseteq I = D_f$. Přiřadíme-li ke každému $x \in I_1$ hodnotu $f'(x)$, je na I_1 definována funkce $f'(x)$.

Má-li funkce $f'(x)$ derivaci v každém bodě $x \in I_2 \subseteq I_1$, potom tuto derivaci nazýváme druhou derivací funkce $f(x)$ na I_2 a značíme ji $f''(x)$ nebo $f^{(2)}(x)$.

Analogicky definujeme $f^{(n)}(x)$ pro $n = 3, 4, \ldots$. Podobně definujeme derivace vyšších řádů dané funkce zleva a zprava.

Poznámka. Pro n-tou derivaci funkce $f(x)$, $n > 1$, se používá zápis $f^{(n)}(x)$, resp. $f''(x)$ pro $n = 2$, $f'''(x)$ pro $n = 3$, ... Čteme pak f s čárkou, f se dvěma čárkami, f se třemi čárkami, atd. Pro $n > 3$ nebývá zvykem používat čárek pro označení derivace.

Příklad 4.2. Funkce

$$y = 3x^4$$

má v intervalu $(-\infty, \infty)$ derivace

$$y' = 12x^3, \quad y'' = 36x^2, \quad y''' = 72x, \quad y^{(4)} = 72, \quad y^{(k)} = 0 \text{ pro } k \geq 5.$$

Zabývejme se nyní otázkou, zda všechny funkce mají v každém bodě derivaci. Odpověď je záporná, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 4.3. Zjistěme, zda funkce $f(x) = |x|$ má v bodě 0 derivaci.

Řešení. Zřejmě $f(x) = x$ pro $x > 0$ a $f(x) = -x$ pro $x < 0$. Podle definice derivace dostáváme

$$f'^{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'^{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Poněvadž $f'^{+}(0) \neq f'^{-}(0)$, nemá funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 derivaci.

O vztahu mezi spojitostí funkce $f(x)$ v daném bodě a a existencí derivace funkce $f(x)$ v bodě a platí tato věta.

Věta 4.1. (Vztah spojitost – existence derivace)

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom $f(x)$ je v bodě a spojitá. Je-li funkce $f(x)$ v bodě a spojitá, nemusí mít v bodě a derivaci.

Důkaz: a) Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Dokažme, že pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Nechť $x \neq a$. Podle věty 3.3 je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(f(x) - f(a) + f(a)) = \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)\right] = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= f'(a)\cdot 0 + f(a) = \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Má-li tedy funkce $f(x)$ v bodě a derivaci, je v něm funkce $f(x)$ spojitá.

Příklad 4.3 ukazuje, že funkce může být spojitá v daném bodě i když v něm nemá derivaci.

□

Poznámka. Podobně platí: Jestliže funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci zprava (zleva), potom je funkce $f(x)$ v bodě a spojitá zprava (zleva).

Ukažme si pravidla pro výpočet derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.

derivace součtu, součinu a podílu dvou funkcí

Věta 4.2.

Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace $f'(a)$, $g'(a)$ a nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Potom platí:

$$[c\cdot f(x)]'_{x=a} = c\cdot f'(a), \tag{4.4}$$

$$[f(x) \pm g(x)]'_{x=a} = f'(a) \pm g'(a), \tag{4.5}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'_{x=a} = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a). \tag{4.6}$$

Je-li $g(a) \neq 0$, potom platí:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=a} = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}. \tag{4.7}$$

Důkaz: Dokažme jen vzorec (4.5) pro derivaci součtu. Platí

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))'_{x=a} &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]. \end{aligned}\tag{4.8}$$

Poněvadž existují limity

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a},$$

dostáváme z (4.8) podle věty 3.3

$$[f(x)+g(x)]'_{x=a} = f'(a)+g'(a).$$

□

Poznámka. Analogická věta platí pro derivaci zleva a pro derivaci zprava v daném bodě.

Příklad 4.4. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ mají v bodě a derivace $f'(a)$, $g'(a)$ a nechť c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Potom funkce

$$F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

má v bodě a derivaci a platí

$$F'(a) = c_1 f'(a) + c_2 g'(a). \tag{4.9}$$

Skutečně. Podle (4.4) je

$$[c_1 f(x)]'_{x=a} = c_1 f'(a), \qquad [c_2 g(x)]'_{x=a} = c_2 g'(a).$$

Odtud a z (4.5) vyplývá (4.9).

> Vztah (4.5) lze zobecnit: Nechť $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ jsou funkce mající v bodě a derivace $f_1'(a), \ldots, f_n'(a)$. Nechť $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Potom funkce
>
> $$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$
>
> má v bodě a derivaci a platí
>
> $$f'(a) = c_1 f_1'(a) + \cdots + c_n f_n'(a).$$

Příklad 4.5. Vypočítejte derivaci polynomu

$$f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$

v bodě 2.

Řešení. Dostáváme

$$f'(2) = 4 \cdot (4 \cdot x^3)_{x=2} - 3 \cdot (2 \cdot x)_{x=2} + 2 \cdot (1).$$

Vyčíslením

$$f'(2) = 128 - 12 + 2 = 118.$$

Příklad 4.6. Nechť $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. Potom pro $x \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x - 4, \\ f''(x) &= 6x + 4, \\ f'''(x) &= 6, \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{pro } n \geq 4. \end{aligned}$$

Příklad 4.7. Vypočítejme druhou derivaci funkce

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

Řešení. Označme $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 2$. Poněvadž $g(x) = 0$ jen pro $x = -2$, je $D_F = (-\infty, \infty) - \{-2\}$. Podle (4.7) je pro $x \in D_F$

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 1.$$

Podle (4.7) dostáváme

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

tj.

$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x + 2) - (x^2 - 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}.$$

Úpravou

$$F'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}, \quad x \in D_F. \tag{4.10}$$

Funkce $F(x)$ má první derivaci určenou vztahem (4.10) pro $x \in D_F$.

Podobně vypočítáme i $F''(x)$. První derivaci (po zavedení derivací složených funkcí lze výpočet realizovat jednodušeji) $F'(x)$ přepíšeme na tvar

$$F'(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

kde $f_1(x) = x^2 + 4x + 1$, $g_1(x) = x^2 + 4x + 4$. Podle (4.7) dostáváme

$$F''(x) = \frac{f_1'(x) g_1(x) - f_1(x) g_1'(x)}{g_1^2(x)}.$$

Tedy

$$F''(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x^2+4x+4)-(x^2+4x+1)\cdot(2x+4)}{(x+2)^4}.$$

Po úpravě dostáváme

$$F''(x) = \frac{6x+12}{(x+2)^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\},$$

tj.

$$F''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Cílem našich dalších úvah bude

- odvodit větu o derivování složené funkce
- odvodit větu o derivování inverzní funkce
- odvodit derivace elementárních funkcí.

derivace složených funkcí

Derivace složené funkce

Začněme se složenou funkcí. Znovu si připomeňme zavedení pojmu „složené funkce“ a větu o spojitosti složené funkce.

Nechť A je neodvislý obor funkce $u = \varphi(x)$, $B = H_\varphi$ její odvislý obor. Nechť dále funkce $f(u)$ je definovaná na množině B. Ke každému číslu $x \in A$ přiřaďme číslo $F(x) = f[\varphi(x)]$, tj. hodnotu funkce $f(u)$ v čísle $\varphi(x)$. Tím je definovaná na množině A nová funkce $F(x)$, zvaná složená funkce. Funkci $f(u)$ nazýváme její vnější složkou a funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme její vnitřní složkou.

Jako příklad uveďme funkci $y = \sin(3x^2+1)$. Jde o složenou funkci. Její vnitřní složkou je funkce $u = 3x^2+1$, definovaná na intervalu $A = (-\infty, \infty)$. Odvislý oborem funkce $u = 3x^2+1$ je interval $B = \langle 1, \infty)$. Na množině B je definovaná funkce $f(u) = \sin u$. Tedy $y = sin(3x^2+1)$ je definovaná na intervalu A a oborem funkčních hodnot je interval $\langle -1, 1\rangle$. (Zdůvodněte!)

V dřívějším výkladu jsme si dokázali tuto větu.

Věta 4.3. *Nechť funkce $u = \varphi(x)$ je spojitá v bodě a a funkce $y = f(u)$ je spojitá v bodě $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě a.*

Další analogické věty jsou věty, v nichž se o funkcích f, φ předpokládá jen jednostranná spojitost.

O derivování složené funkce platí tato věta.

Věta 4.4. (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má derivaci v čísle a a nechť funkce $f(u)$ má derivaci v čísle $\alpha = \varphi(a)$. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ má v čísle a derivaci a platí

$$F'(a) = f'(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \text{tj.} \quad F'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a). \tag{4.11}$$

Důkaz: Položme

$$R(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha} - f'(\alpha) & \text{pro } y \neq \alpha, \\ 0 & \text{pro } y = \alpha. \end{cases} \tag{4.12}$$

Poněvadž

$$\lim_{y\to\alpha} R(y) = f'(\alpha) - f'(\alpha) = 0 = R(\alpha),$$

je funkce $R(y)$ spojitá v bodě α. Poněvadž funkce $\varphi(x)$ má derivaci v bodě $x = a$, je podle věty 4.1 spojitá v bodě a. Je tedy i složená funkce $R(\varphi(x))$ spojitá v bodě a. Užitím (4.12) lze funkci $R(\varphi(x))$ zapsat takto

$$R(\varphi(x)) = \begin{cases} \frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(a))}{\varphi(x)-\varphi(a)} - f'(\alpha) & \text{pro } \varphi(x) \neq \varphi(a), \\ 0 & \text{pro } \varphi(x) = \varphi(a). \end{cases} \tag{4.13}$$

Pro $x \neq a$, $\varphi(x) \neq \varphi(a)$ lze užitím (4.13) psát

$$[R(\varphi(x)) + f'(\alpha)]\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))}{x - a}. \tag{4.14}$$

Avšak, jak zjistíme dosazením $\varphi(x) = \varphi(a)$ do (4.14), vidíme, že (4.14) platí i pro $\varphi(x) = \varphi(a)$, $x \neq a$. Dále dostáváme (pokud jednotlivé limity existují)

$$F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))}{x - a}. \tag{4.15}$$

Užitím (4.14) dostáváme z (4.15) s ohledem na (4.13)

$$F'(a) = \lim_{x\to a}[R(\varphi(x)) + f'(\alpha)]\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}. \tag{4.16}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to a} R(\varphi(x)) = R(\varphi(a)) = R(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a)$, dostáváme z (4.16)

$$F'(a) = f'(\alpha)\varphi'(a),$$

tj.

$$F'(a) = f'(\varphi(a))\varphi'(a).$$

□

Příklad 4.8. Vypočítejte derivaci funkce $F(x) = (x^2 + 1)^7$ v čísle x.

Řešení. Funkce $F(x)$ je složenou funkcí. Její vnější složkou je funkce $f(u) = u^7$ a vnitřní složkou je funkce $u = \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = x^2 + 1$. Podle věty 4.4 dostáváme $F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$. Poněvadž $f'(u) = 7u^6$ a $\varphi'(x) = 2x$, dostáváme $F'(x) = 7(x^2 + 1)^6 \cdot 2x$, takže po úpravě dostáváme

$$F'(x) = 14x(x^2 + 1)^6, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Je řada analogických vět k větě 4.4. Jde v nich o derivování složených funkcí v případě, že a, resp. α, jsou koncovými body intervalů, na nichž se výpočty provádějí. Uveďme si bez důkazu následující větu.

Věta 4.5. *Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má derivaci v čísle a a nechť funkce $f(u)$ má derivaci zprava (zleva) v čísle $\alpha = \varphi(a)$. Nechť existuje takové okolí $U_\kappa(a)$, že $\varphi(U_\kappa(a)) = U_\rho^+(\alpha)$, pro nějaké ρ. Potom složená funkce $F(x) = f(\varphi(x))$ má v bodě a derivaci a platí*

$$F'(a) = f'^{+}(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \textit{to jest } F'(a) = f'^{+}(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a). \tag{4.17}$$

Poznámka. Budeme-li se držet úmluvy, že v koncových bodech intervalu píšeme místo jednostranné derivace derivaci, můžeme vztah (4.17) nahradit vztahem (4.11), takže lze psát

$$F'(a) = f'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a).$$

derivace inverzní funkce

Derivace inverzní funkce.

S pojmem inverzní funkce jste se již setkali dříve při studiu středoškolské matematiky. Byl zopakován i v textu „Matematika A“. Ve stručnosti si pojem inverzní funkce ještě jednou zopakujme. Navíc si odvoďme souvislost mezi derivací funkce $f(x)$ v bodě $x = \alpha$ a funkce k ní inverzní $f^{-1}(y)$ v bodě $a = f(\alpha)$.

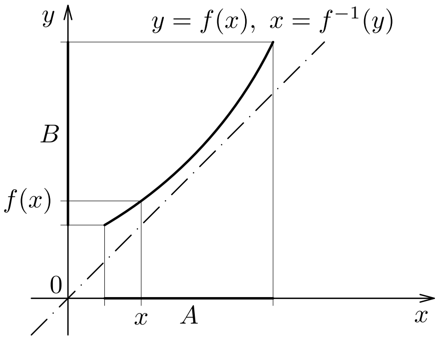
Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na množině A a je na ní prostá. To znamená, že pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Označme $B = f(A)$. *Ke každému $y \in B$ přiřaďme to číslo $x \in A$, pro nějž je $f(x) = y$.* Tím jsme zavedli pravidlo, jímž ke každému $y \in B$ je přiřazeno $x \in A$. Je tak definovaná nová funkce, označme ji f^{-1}, jejímž neodvislým oborem je množina B a odvislým oborem je množina A. Ponecháme-li označení y pro proměnnou s oborem B a x pro proměnnou s oborem A, píšeme

$$x = f^{-1}(y), \qquad y \in B,\ x \in A.$$

V definici inverzní funkce je podstatný předpoklad, že f je na svém definičním oboru prostá. Takovými funkcemi jsou např. funkce ryze monotónní na svém definiční oboru.

To nám umožní odvodit vzorce pro derivování některých elementárních funkcí.

Na obr. 4.2 je znázorněn graf funkce $y = f(x)$ rostoucí na intervalu $A = D(f)$, tedy graf funkce prosté. Graf funkce $x = f^{-1}(y)$ je totožný s grafem funkce $y = f(x)$, pokud bychom *proti zvyklostem* znázornili neodvislý obor na ose y a odvislý obor na ose x.



Obrázek 4.2: Graf funkcí $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.

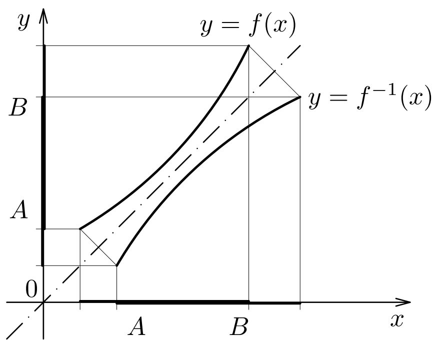
Z definice inverzní funkce vyplývá

- je-li $a \in D(f),$ potom $a = f^{-1}(f(a)),$ (4.18)
- je-li $\alpha \in D(f^{-1}),$ potom $\alpha = f(f^{-1}(\alpha)).$ (4.19)

Označíme-li x neodvisle proměnnou jak pro funkci f, tak i pro funkci f^{-1}, zapíšeme obě funkce takto

$$y = f(x), \quad x \in A,\ y \in B, \qquad y = f^{-1}(x), \quad x \in B,\ y \in A. \tag{4.20}$$

Jestliže jejich neodvislé obory vyznačíme na vodorovné ose, jsou grafy funkcí (4.20) symetrické s osou symetrie $y = x$, viz. obr. 4.3. Graf inverzní funkce $f^{-1}(x)$ jsme dostali překlopením grafu $f(x)$ kolem přímky $y = x$.



Obrázek 4.3: Graf funkcí $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$.

Poznámka. Je-li prostá funkce daná rovnicí

$$y = f(x), \tag{4.21}$$

dostaneme k ní funkci inverzní tak, že z rovnice (4.21) vypočítáme x pomocí y. Pojem inverzní funkce vede k zavedení nových funkcí.

Zopakujme si následující větu o vzájemném vztahu mezi spojitosti funkce $f(x)$ a k ní inverzní funkce $f^{-1}(x)$.

Věta 4.6. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $I = D(f)$. Označme její odvislý obor (je jím interval) $J = f(I)$. K funkci f existuje funkce inverzní f^{-1}, jejím neodvislým oborem je interval J a odvislým oborem je interval I. Funkce f^{-1} je na svém definičním oboru J spojitá a rostoucí (klesající).*

Ukažme si nyní vztah mezi derivací dané funkce a funkce k ní inverzní. Platí následující věta.

Věta 4.7. (Derivace inverzní funkce)

Nechť f je funkce spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť oborem jejich funkčních hodnot je interval $J = f(I)$. Nechť a je takový vnitřní bod intervalu J, že v čísle $\alpha = f^{-1}(a) \in I$ má funkce f derivaci $f'(\alpha) \neq 0$. Pak funkce f^{-1} má v čísle a derivaci a platí

$$[f^{-1}(a)]' = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Důkaz: Definujme

$$F(y) = \frac{y-\alpha}{f(y)-f(\alpha)} \text{ pro } y \in I,\ y \neq \alpha, \quad F(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)} \text{ pro } y = \alpha.$$

Vzhledem k ryzí monotónnosti funkce f na intervalu I, je $f(y) - f(\alpha) \neq 0$. Funkci $F(y)$ lze pro $y \neq \alpha$ přepsat takto

$$F(y) = \frac{1}{\frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha}}.$$

Poněvadž dle předpokladu má funkce f v bodě α derivaci, je

$$\lim_{y\to\alpha} \frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha} = f'(\alpha).$$

Poněvadž $f'(\alpha) \neq 0$, je podle (4.7)

$$\lim_{y\to\alpha} F(y) = \lim_{y\to\alpha} \frac{1}{\frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha}} = \frac{1}{f'(\alpha)} = F(\alpha).$$

Je tedy funkce $F(y)$ spojitá v bodě α. Funkce f^{-1} je podle věty 4.6 spojitá na intervalu J, tedy i v čísle a. Je tedy i funkce $F(f^{-1}(x))$ spojitá v bodě a. Je tedy

$$\lim_{x\to a} F(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(a)) = F(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Užitím tohoto vztahu dostáváme

$$[f^{-1}(a)]' = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(a))} = \\ = \lim_{x \to a} F(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

□

K větě 4.7 můžeme vyslovit řadu analogických vět. Vyslovme tuto.

Věta 4.8. (Derivace inverzní funkce)

Nechť f je funkce spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť oborem jejích funkčních hodnot je interval $J = f(I)$. Nechť a je levý (pravý) koncový bod intervalu J a nechť v čísle $\alpha = f^{-1}(a)$ má funkce f derivaci $f'^{+}(\alpha) \neq 0$ $(f'^{-}(\alpha) \neq 0)$. Potom funkce f^{-1} má v čísle a derivaci zprava (zleva) a platí

$$[f^{-1}(a)]'^{+} = \frac{1}{f'^{+}(\alpha)}, \qquad \left[[f^{-1}(a)]'^{-} = \frac{1}{f'^{-}(\alpha)} \right]$$

Důkaz: Důkaz je analogický k důkazu věty 4.7. □

4.2 Derivace elementárních funkcí

derivace elementárních funkcí

Předložený text vychází z předpokladu, že čitatel je seznámen s elementárními funkcemi v rozsahu uvedeném v učebním textu „Matematika A“. I když v následujícím textu se zavádí jejich stručné zavedení a uvádějí se některé jejich význačné vlastnosti, je nutno, abyste se s těmito funkcemi dobře seznámili.

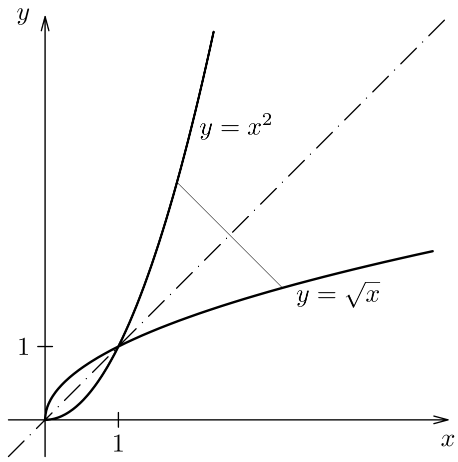
Funkce $y = \sqrt[n]{x}$

Uvažujme funkci $y = x^n$, kde n je přirozené. Tato funkce je zřejmě definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$.

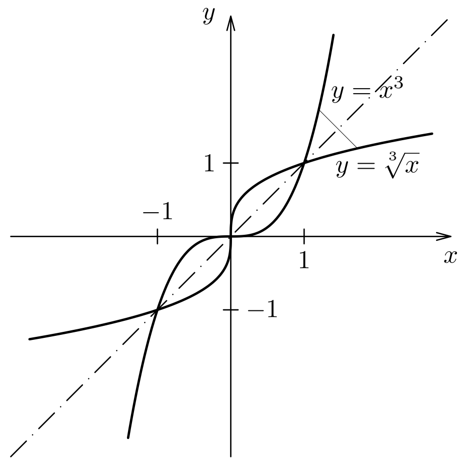
Pro n *liché* je tato funkce na svém definičním oboru $I = (-\infty, \infty)$ spojitá a rostoucí. Označme $J = (-\infty, \infty)$ obor hodnot této funkce. Proto k ní existuje funkce inverzní na intervalu J. Podle věty 4.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá na J. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$. Funkce $\sqrt[n]{x}$ pro n liché je lichá.

Pro n sudé je sice funkce x^n rovněž definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, avšak není na něm prostá. Např. $(-2)^n = 2^n$ pro každé sudé n. Budeme proto uvažovat její *zúžení na interval* $I = \langle 0, \infty)$. Na něm je tato zúžená funkce $y = x^n$ rostoucí a spojitá, tedy prostá. Obor hodnot této zúžené funkce je interval $J = \langle 0, \infty)$. Proto k ní existuje funkce inverzní, definovaná na intervalu J. Podle věty 4.6 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$.

Na obr. 4.4 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$ a na obr. 4.5 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.



Obrázek 4.4: Grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$.



Obrázek 4.5: Grafy funkcí x^3 a $\sqrt[3]{x}$.

Poznámka. Všimněte si, že funkce $\sqrt[n]{x}$ je pro *pro n sudé* definována jen pro $x \in \langle 0, \infty)$. Podle definice je pak $\sqrt[n]{x}$ pro každé $x \in \langle 0, \infty)$ rovno tomu číslu $y \in \langle 0, \infty)$, pro něž je $y^n = x$. Je-li tedy např. $a \in \mathbb{R}$, je $a^n \in \langle 0, \infty)$, takže

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad \text{pro } n \text{ sudé}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Např. $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

Pro počítání s odmocninami platí pravidla, která jste měli odvozeny na gymnáziích. Jsou uvedeny i ve studijním textu „Matematika A“. Je nutné, abyste si tato pravidla zopakovali.

Derivace funkce $\sqrt[n]{x}$.

Odvoďme si nyní vzorec pro derivování funkce $\sqrt[n]{x}$. V obou uvažovaných případech, totiž jak pro n sudé tak i pro n liché, jsme označili inverzní funkci k funkci x^n jako $y = \sqrt[n]{x}$. V každém bodě $x \neq 0$ svého definičního oboru je funkce $y = x^n$ různá od nuly, takže v něm lze vypočítat její derivaci podle věty 4.7 takto. Položme $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Potom

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}. \tag{4.22}$$

Dostáváme tedy:

Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ má pro $x \in D_f$, $x \neq 0$, derivaci a platí

$$f'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}. \tag{4.23}$$

Uveďme si nyní příklad na derivaci složené funkce obsahujících funkci $\sqrt[n]{x}$.

Příklad 4.9. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \tag{4.24}$$

Řešení. Danou funkci můžeme považovat za složenou funkci. Vnitřní složkou je funkce

$$u = \varphi(x), \quad \text{kde} \quad \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1} \tag{4.25}$$

a vnější složkou je funkce

$$y = f(u) = \sqrt[3]{u}.$$

Funkce $\varphi(x)$ je definovaná pro všechna $x \neq 1$. Hodnotu 0 nabývá jen v bodě $x = -1$. Její derivaci určíme jako derivaci podílu. Dostáváme

$$u' = \varphi'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Její definiční obor je shodný s definičním oborem funkce $\varphi(x)$. Funkce $y = f(u)$ má derivaci v každém bodě $u \neq 0$ a je rovna

$$f'(u) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{u}\right)^2}.$$

Podle věty 4.7 platí tedy

$$f'(\varphi(x)) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{\varphi(x)}\right)^2} \cdot \varphi'(x), \quad x \neq \pm 1.$$

Dospěli jsme k tomuto závěru. Funkce (4.24) má pro každé $x \neq \pm 1$ derivaci

$$y'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}. \tag{4.26}$$

Derivace funkce e^x

Funkci $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme přirozenou exponenciální funkcí. Tuto funkci znáte ze středoškolského studia. Její zavedení bylo uvedeno i v učebním textu „Matematika A“.

Odvození derivace funkce $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, provedeme ve dvou krocích.

a) Odvoďme pomocný vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \tag{4.27}$$

který použijeme pro výpočet derivace funkce $y = e^x$.

Při zavádění Eulerova čísla e v kapitole 1 jsme zavedli dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n. \tag{4.28}$$

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = e.$$

Nechť $x \in (0, \frac{1}{2})$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové přirozené číslo, že

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}. \tag{4.29}$$

Poněvadž $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, je

$$e < b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n. \tag{4.30}$$

Poněvadž podle (4.29) je $x \leq \frac{1}{n}$, dostáváme z (4.30)

$$e^x < \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{4.31}$$

to jest

$$e^x < 1 + \frac{1}{n-1}. \tag{4.32}$$

Poněvadž $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, je

$$e > a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{4.33}$$

Poněvadž podle (4.29) je $x > \frac{1}{n+1}$, dostáváme z (4.33)

$$e^x > \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n+1}. \tag{4.34}$$

Ze vztahů (4.32) a (4.34) vyplývá

$$\frac{1}{n+1} + 1 < e^x < 1 + \frac{1}{n-1}, \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{n+1} < e^x - 1 < \frac{1}{n-1}. \tag{4.36}$$

Z (4.29) plynou nerovnosti

$$n - 1 > \frac{1}{x} - 2, \quad \text{takže } \frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}, \tag{4.37}$$

$$n + 1 < \frac{1}{x} + 1, \quad \text{takže } \frac{1}{n+1} > \frac{x}{x+1}. \tag{4.38}$$

Z (4.36), (4.37), (4.38) dostáváme

$$\frac{1}{1+x} \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-2x}. \tag{4.39}$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-2x} = 1$, dostáváme z (4.39)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

b) Počítejme nyní derivaci funkce e^x. Pro libovolné x je podle definice

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Výpočtem dostáváme postupně

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Funkce e^x je spojitá a rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$. V každém čísle má derivaci a platí $(e^x)' = e^x$.

Derivace funkce $y = \ln x$

Z vlastností exponenciální funkce a z definice inverzní funkce vyplývá, že k funkci e^x existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Tato inverzní funkce je spojitá a rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Nazývá se *přirozený logaritmus* a budeme ji značit $\ln x$. Její graf dostaneme z grafu funkce e^x překlopením kolem přímky $y = x$ (viz obr. 4.6). Z věty 4.7 plyne, že $\ln x$ má v každém čísle svého definičního oboru derivaci a platí

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Jestliže položíme

$$y = \ln x,\ x \in (0,\ \infty) \quad \textit{potom} \quad e^y = x,\ y \in (-\infty, \infty) \tag{4.40}$$

Tedy přirozený logaritmus čísla $x \in (0, \infty)$ je mocnitel, na nějž je nutno umocnit základ e, abychom dostali číslo x.

Odtud dostáváme

$$x = e^{\ln x}.$$

Funkce $\ln x$ *je spojitá a rostoucí funkce na intervalu* $(0, \infty)$ *a nabývá všech hodnot z intervalu* $(-\infty, \infty)$. *V každém čísle svého definičního oboru má derivaci a platí*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Jsou-li $x, x_1, x_2 \in (0, \infty), s \in \mathbb{R}$, *potom platí*

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \tag{4.41}$$

$$\ln x^s = s \cdot \ln x. \tag{4.42}$$

Příklad 4.10. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnitřní složkou je funkce $u = \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Vnější složkou je funkce $y = f(u)$, kde $f(u) = e^u$. Funkce $f(u)$ má derivaci v každém bodě u. Platí

$$f'(u) = e^u. \tag{4.43}$$

Funkce $\varphi(x)$ má derivaci v každém bodě svého definičního oboru, tj. pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Výpočtem dostáváme

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}. \tag{4.44}$$

Podle věty o derivování složené funkce dostáváme z (4.43) a (4.44)

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right), \qquad \text{tj.} \quad y' = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

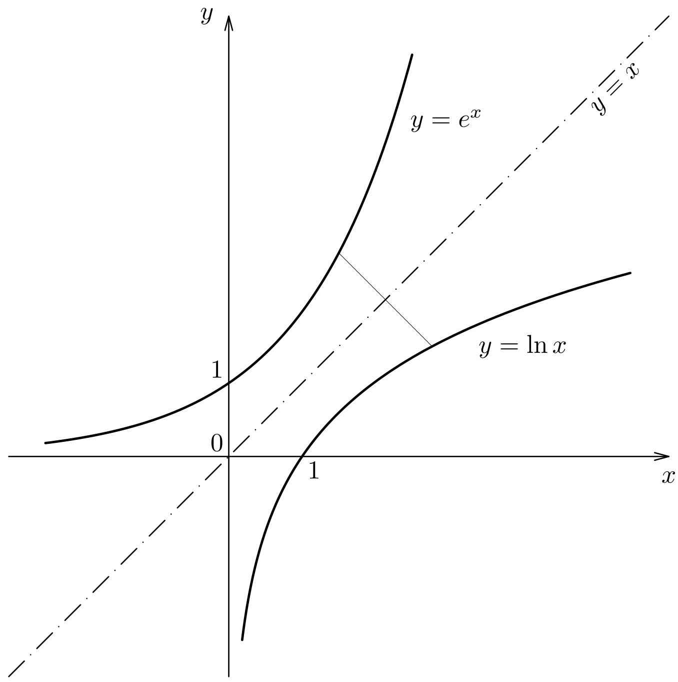
Příklad 4.11. Vypočítejte druhou derivaci funkce

$$y = \ln(3x - 1)$$

a určete její definiční obor.

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnější složkou je funkce $y = f(u)$, kde $f(u) = \ln u$. Její definiční obor je interval $(0, \infty)$. Vnitřní složkou je funkce $u = 3x - 1$. Je sice definovaná a má derivaci pro všechna x, avšak tento definiční obor je nutno omezit na ta x, pro než je $u = \varphi(x)$ v definičním oboru funkce $y = \ln u$ a má v nich derivaci. Je to pro $x \in (\frac{1}{3}, \infty)$. Derivováním dostaneme

$$y' = \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)', \qquad \text{tj.} \quad y' = \frac{3}{3x-1}, \; x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right),$$



Obrázek 4.6: Graf funkce e^x a $\ln x$.

$$y'' = -\frac{9}{(3x-1)^2}, \ x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Uvědomte si, že funkce $\frac{3}{3x-1}$ je definovaná pro $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$. Avšak y' může být definovaná jen pro $x \in D_f$ v nichž má funkce $f(x)$ derivaci. Podobná poznámka platí i pro definiční obor funkce $f''(x)$.

Derivace exponenciální funkce a logaritmu s obecným základem

Když již máme definovanou přirozenou exponenciální funkci a přirozený logaritmus, můžeme definovat exponenciální funkci s obecným základem a, to jest funkci

$$y = a^x, \quad \text{kde} \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

Pro $a > 1$ je funkce $y = a^x$ rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $0 < a < 1$ je funkce $y = a^x$ klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Lze ji vyjádřit ve tvaru

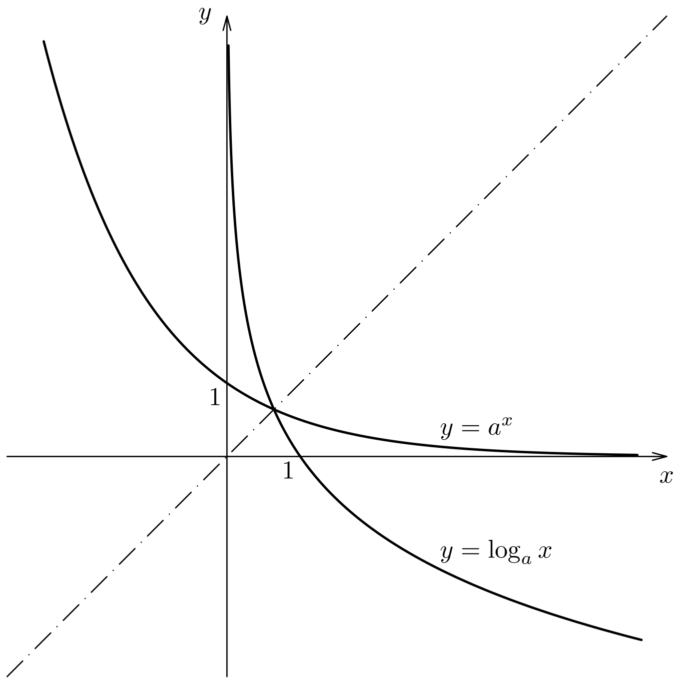
$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$. Její derivaci určíme jako derivaci složené funkce. Dostáváme

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Funkce $y = a^x$ pro $a > 1, a \neq 1$ nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$. Existuje k ní funkce inverzní, která se značí $\log_a x$ a nazývá *logaritmus o základě a*. Je to funkce spojitá a ryze monotónní v intervalu $(0, \infty)$, která nabývá všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Její derivace je podle věty 4.7 rovna

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad x \in (0, \infty).$$



Obrázek 4.7: Graf obecné exponenciální a logaritmické funkce, $0 < a < 1$.

Na obr. 4.7 je náčrtek grafů funkcí $y = a^x$ a funkce $y = \log_a x$ pro $0 < a < 1$. Pro $a = e$, tedy pro $a > 1$, je graf funkce $y = a^x$ a graf funkce $y = \log_a x$ znázorněn na obr. 4.6. Graf těchto funkcí pro $a = e$ jsme již dříve vyšetřili. Pro logaritmy se základem a platí pravidla analogická k pravidlům uvedeným pro funkci $y = \ln x$.

Řešme ještě jednu otázku. Nechť a, b jsou kladná reálná čísla různá od nuly. V jakém vztahu jsou čísla $\log_a x$, $\log_b x$? Abychom to ukázali, předpokládejme, že a, b jsou kladná čísla různá od jedné. Nechť x je kladné číslo. Označme $y = \log_a x$. Potom postupně dostáváme:

$$x = a^y, \qquad \log_b x = \log_b a^y = y \cdot \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Je tedy

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Funkce $y = a^x$, kde a je kladná reálná konstanta různá od jedné, je spojitá a pro $a > 1$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $0 < a < 1$ je klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem jejich hodnot je v obou případech interval $(0, \infty)$. V každém bodě x svého definičního oboru má funkce a^x derivaci

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Nazývá se exponenciální funkcí se základem a. Speciálním případem je přirozená exponenciální funkce pro $a = e$ a dekadická exponenciální funkce pro $a = 10$.

K funkci a^x existuje funkce inverzní, značíme ji $\log_a x$ (čteme logaritmus x při základě a). Je definována na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $\log_a x$ je pro $a > 1$ rostoucí a pro $0 < a < 1$ klesající na intervalu $(0, \infty)$. Je v něm spojitá. V každém bodě $x \in (0, \infty)$ má derivaci a platí

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Jsou-li $x, x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ potom platí

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{4.45}$$

$$\log_a x^s = s \cdot \log_a x. \tag{4.46}$$

Je-li b kladné reálné číslo různé od 1 platí

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Příklad 4.12. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = 2^{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Jde o složenou funkci. Vnější složkou je funkce

$$y = f(u), \quad \text{kde } f(u) = 2^u,\ u \in (-\infty, \infty).$$

Vnitřní složkou je

$$u = \varphi(x), \quad \text{kde } \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Nechť $x = a \in (-\infty, \infty)$. Funkce $\varphi(x)$ má v bodě a derivaci. Položme $\alpha = \varphi(a)$. Funkce f má v bodě α derivaci. Platí

$$y'(a) = f'(\alpha) \cdot \varphi'(a), \quad \text{to jest} \quad y'(a) = (2^u)'_{u=\alpha} (\varphi'(x))_{x=a}.$$

Tedy

$$y' = 2^{\sqrt{a^2+1}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{x^2+1})'_{x=a}. \tag{4.47}$$

Vypočítejme nyní $\varphi'(a)$. Funkce

$$u = \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$$

je složená. Její vnější složkou je funkce

$$u = g(v), \quad \text{kde } g(v) = \sqrt{v},\ v \in \langle 0, \infty)$$

a vnitřní složkou je funkce

$$v = x^2 + 1.$$

Funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě a derivaci

$$u'(a) = (\sqrt{x^2+1})'_{x=a} = \frac{1}{2}\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Dosazením do (4.47) dostáváme

$$y' = \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \qquad \text{pro } a \in (-\infty, \infty).$$

Derivace obecné mocniny $y = x^s$

Obecná mocnina je funkce x^s definovaná pro $x > 0$ a jakékoliv reálné s. Dá se vyjádřit ve tvaru

$$x^s = (e^{\ln x})^s = e^{s\cdot\ln x}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá pro každé $x \in (0, \infty)$. Její derivace je podle věty 4.7

$$(x^s)' = (e^{s\cdot\ln x})' = e^{s\cdot\ln x} \cdot s \cdot \frac{1}{x} = s \cdot x^s \cdot \frac{1}{x} = sx^{s-1}.$$

Funkce x^s je spojitá na intervalu $(0, \infty)$ a má zde derivaci sx^{s-1}, tedy

$$(x^s)' = sx^{s-1}, \quad x \in (0, \infty), \; s \in \mathbb{R}.$$

V závěru této části jako aplikaci na předcházející věty řešme následující příklad.

Příklad 4.13. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = x^2 \cdot \ln(x^2+1).$$

Řešení. Jde zde o součin dvou funkcí. Druhá z nich je funkce složená. Poněvadž $x^2+1 > 0$, je daná funkce definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$ a má zde derivaci, kterou na základě předchozích vět určíme takto

$$y' = 2x\ln(x^2+1) + x^2\frac{1}{x^2+1}2x,$$

takže po úpravě dostáváme

$$y' = 2x\left[\ln(x^2+1) + \frac{x^2}{x^2+1}\right].$$

Derivace funkce $f(x)^{g(x)}$

Nechť
$$F(x) = f(x)^{g(x)}, \quad x \in A. \tag{4.48}$$

Nechť $f(x) > 0$ pro $x \in A$ a nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ mají pro $x \in A$ derivace $f'(x)$, $g'(x)$. Funkci (4.48) lze přepsat do tvaru

$$F(x) = e^{\ln f(x)^{g(x)}}, \tag{4.49}$$

a po úpravě jako
$$F(x) = e^{g(x) \ln f(x)}. \tag{4.50}$$

Tuto funkci můžeme derivovat jako složenou funkci. Dostáváme

$$F'(x) = e^{g(x) \ln f(x)} \Big(g(x) \ln f(x) \Big)'.$$

Provedením vyznačené derivace obdržíme

$$F'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Příklad 4.14. Vypočítejte derivaci funkce

$$y = x^{\sin x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Funkci $x^{\sin x}$ lze přepsat na tvar

$$y = e^{\sin x \ln x}.$$

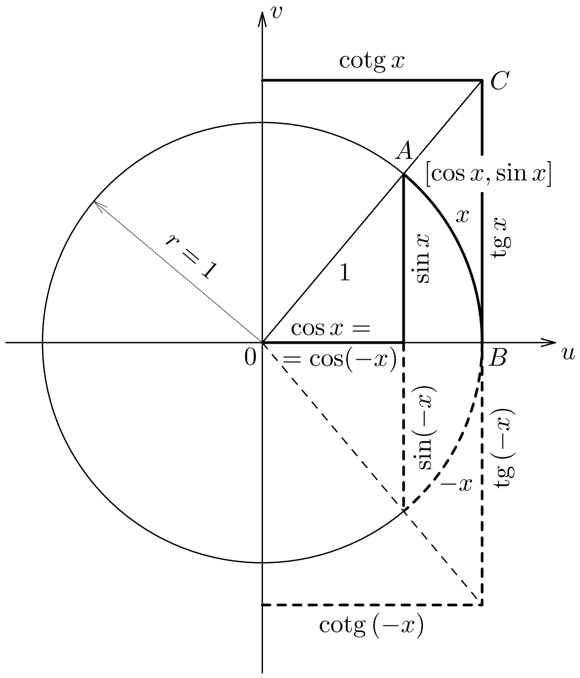
Derivací dostaneme postupně

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sin x \ln x} (\sin x \ln x)' \\ y' &= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Derivace trigonometrický funkcí

Zavedení funkcí $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x$

Zabývejme se nyní trigonometrickými funkcemi, zvanými někdy též funkce *goniometrické*. Omezíme se na funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. V pravoúhlém souřadném systému s osami u, v sestrojme kružnici o jednotkovém poloměru se středem v počátku. Zvolme libovolně x a sestrojme polopaprsek vycházející z počátku, který svírá s kladnou osou u úhel x. Tento polopaprsek protne kružnici v jednom bodě, označme jej A. Jeho souřadnice označme $\cos x, \sin x$ (viz obr. 4.8). Tyto souřadnice závisí na x, takže $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce definované pro každé reálné x.



Obrázek 4.8: Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další trigonometrické funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

pro ty úhly x, pro něž je jmenovatel různý od 0.

Trigonometrické funkce jsou známy ze střední školy a bylo o nich pojednáno i v učebním textu „Matematika A“. Nakreslete si jejich grafy! Zopakujte si podrobně jejich vlastnosti.

Uveďme si tyto jejich vlastnosti:

Funkce $\sin x$ je kladná pro úhly v prvním a ve druhém kvadrantu a záporná pro úhly ve třetím a ve čtvrtém kvadrantu. Funkce $\cos x$ je kladná pro úhly v prvním a ve čtvrtém kvadrantu a je záporná pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu. Obě tyto funkce jsou periodické s periodou 2π.

Funkce $\operatorname{tg} x$ je definována pro všechna x různá od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$, funkce $\operatorname{cotg} x$ je definována pro x různá od násobků π. Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou kladné pro úhly pro x v prvním a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány a záporné pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu kvadrantu v němž jsou definovány. Tyto funkce jsou periodické s periodou π.

Odvození derivace funkce $f(x) = \sin x$

a) Dokažme napřed, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ je (viz obr. 4.8) $0 < \sin x < x$. Dále je obsah výseče OAB menší nežli obsah trojúhelníku OBC, tj. $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Celkem tedy platí

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Odtud přechodem k převráceným hodnotám dostáváme

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Vynásobíme-li celou nerovnost kladným číslem $\sin x$, dostaneme

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad \text{tj.} \qquad -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x.$$

Připočteme-li číslo 1 ke všem třem výrazům, máme

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Buď $\varepsilon > 0$ a $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$. Pro $x \in (0, \delta)$ je funkce $\sin(x)/x$ definována a platí v něm

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| &= \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = \\ &= 2\cdot\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

takže

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dále je

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) Dokažme, že

$$(\sin x)' = \cos x \text{ pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Nechť $a \in (-\infty, \infty)$. Potom platí

$$\begin{aligned}(\sin x)'_{x=a} &= \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\frac{1}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2} : \frac{x-a}{2}\right). \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Položme
$$f(y) = \frac{\sin y}{y} \quad \text{pro} \quad y \neq 0, \ f(0) = 1.$$
Tato funkce $f(y)$ je spojitá v čísle 0. Položme dále
$$\Phi(x) = \frac{x-a}{2}.$$
Zřejmě funkce $\Phi(x)$ je v čísle a spojitá a nabývá zde hodnoty 0, to jest $\Phi(a) = 0$. Podle věty 3.6 je složená funkce $F(x) = f[\Phi(x)]$ v čísle a spojitá, tj.
$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \lim_{x\to a} F(x) = F(a) = f[\Phi(a)] = f(0) = 1. \tag{4.52}$$
Položme nyní $f(y) = \cos y$, $\Phi(x) = (x+a)/2$. Složená funkce $F(x) = f[\Phi(x)]$ je v čísle a spojitá, takže
$$\lim_{x\to a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a. \tag{4.53}$$
Z (4.51), (4.52), (4.53) dostáváme
$$(\sin x)'_{x=a} = \cos a.$$

Funkce $f(x) = \sin x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci a platí
$$\Big(\sin x\Big)' = \cos x.$$

Derivace funkce $y = \cos x$

Užitím věty o derivování složené funkce dostáváme
$$\Big(\cos x\Big)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Funkce $f(x) = \cos x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ derivaci a platí
$$(\cos x)' = \sin x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Derivace funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

Z pravidel o derivování podílu dvou funkcí dostáváme pro $x \in (-\infty, \infty) - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty) - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ derivaci a platí

$$
(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty) - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, \ k \in \mathbb{Z}.
$$

Podobně pro $x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$
(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.
$$

Funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$ má v každém bodě $x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ derivaci a platí

$$
(\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}, \ k \in \mathbb{Z}.
$$

Derivace cyklometrických funkcí

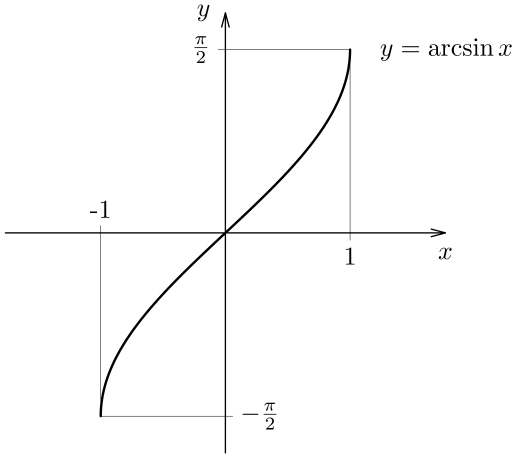
V předcházejícím výkladu jsme zjistili, že funkce $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ spojitá a rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tuto funkci označujeme $\arcsin x$. Podle věty 4.6 je tato funkce spojitá na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je na něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce

$$
f(x) = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle
$$

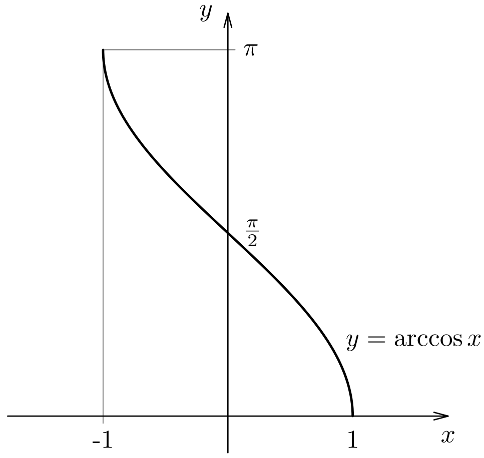
okolo přímky $y = x$ (viz obr. 4.9). Geometrický význam funkce arcsin je tento:

„$\arcsin x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$*, jehož sinus má hodnotu* x*.*“

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ spojitá a klesající a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní, je definovaná na in-



Obrázek 4.9: Graf funkce $\arcsin x$.



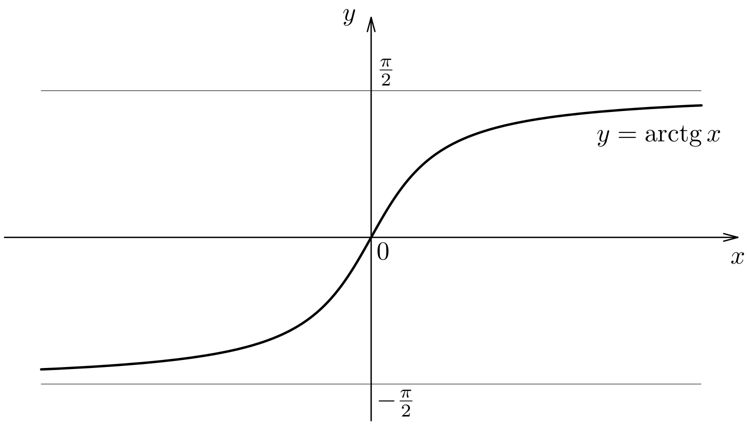
Obrázek 4.10: Graf funkce $\arccos x$.

tervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tuto funkci označujeme $\arccos x$. Podle věty 4.6 je to funkce spojitá na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je na něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 4.10). Geometrický význam funkce $\arccos x$ je tento:

„$\arccos x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$*, jehož kosinus má hodnotu* x*.*“

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá a rostoucí a nabývá zde všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní, je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arctg} x$. Podle věty 4.6 je to funkce spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 4.11). Geometrický význam funkce $\operatorname{arctg} x$ je tento:

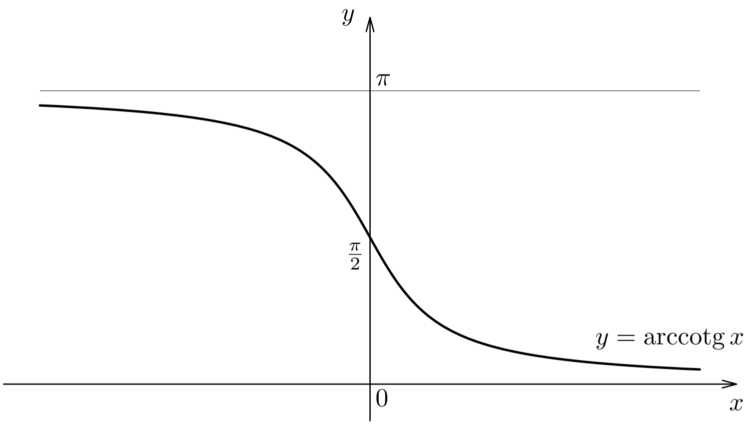
„$\operatorname{arctg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*, jehož tangens má hodnotu* x*.*“



Obrázek 4.11: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$.

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je na intervalu $(0, \pi)$ spojitá a klesající a nabývá na něm všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arccotg} x$. Podle věty 4.6 je to funkce spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je na něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \pi)$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 4.12). Geometrický význam funkce $\operatorname{arccotg} x$ je tento:

„$\operatorname{arccotg} x$ *je ten úhel z intervalu* $(0, \pi)$, *jehož kotangens má hodnotu* x*.*“



Obrázek 4.12: Graf funkce $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ se nazývají *funkce cyklometrické*. Dosavadní výsledky o spojitosti lze shrnout takto:

Funkce cyklometrické jsou spojité na svém neodvislém oboru.

Derivace cyklometrických funkcí.

Funkce $\sin x$ je spojitá a rostoucí na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Jejím odvislým oborem je interval $\langle -1, 1 \rangle$. V každém bodě a z intervalu $(-1, 1)$ má funkce $\arcsin x$ tuto vlastnost: číslo $\alpha = \arcsin a$ je z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takže funkce $\sin x$ má v něm derivaci $\cos \alpha \neq 0$. Podle věty 4.7 má funkce $\arcsin x$ v čísle a derivaci a platí:

$$(\arcsin x)'_{x=a} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

neboť $\sin \alpha = a$. Všimněme si také, že $\cos a$ je kladný, neboť a je z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takže odmocninu je nutno opatřit znaménkem plus. V každém bodě x z intervalu $(-1, 1)$ tedy platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Podobně odvodíme, že v každém bodě x intervalu $(-1, 1)$ platí

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V intervalu $(-\infty, \infty)$ máme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Obdržené výsledky můžeme shrnout do následující věty.

Funkce cyklometrické mají derivace v každém vnitřním bodě svého neodvislého oboru a platí:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Uveďme si nyní souhrnně derivace elementárních funkcí.

Derivace elementárních funkcí

$$(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R},\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty)$$
$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty)$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N},\ n \textit{ sudé},\ \textit{pro } x \in (0, \infty)$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N},\ n \textit{ liché},$$
$$\textit{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$
$$(e^x)' = e^x,\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty)$$
$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ \textit{pro } x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ \textit{pro } x \in (0, \infty)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; \mathit{pro}\ x \in (0, \infty)$$
$$(x^s)' = sx^{s-1}, \;\; s \in \mathbb{R}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (0, \infty)$$
$$(\sin x)' = \cos x, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty) - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, \;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty) - \{k\pi\}, \;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-1, 1)$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-1, 1)$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \;\; \mathit{pro}\ x \in (-\infty, \infty)$$

4.3 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

Byl zaveden pojem derivace funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ a poukázáno na význam derivace (Definice 4.1). Byly odvozeny derivace elementárních funkcí. Jsou zde uvedeny vzorce pro výpočet derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí (Věta 4.2). Dále byla uvedena věta o derivaci složené funkce (Věta 4.4). Byla odvozena věta o výpočtu derivace inverzní funkce (Věta 4.7). Dále byl vyšetřen vztah mezi existencí derivace funkce $f(x)$ v daném bodě a a spojitostí funkce v bodě a.

Úlohy

1. Napište rovnici tečny ke křivce $y = 3x^2 - x + 1$ v bodě $T[1, ?]$ ležícím na dané křivce. $[5x - y - 2 = 0]$

2. Napište rovnici normály ke křivce $y = \frac{x}{x+1}$ v jejím bodě $T[0, ?]$. $[x + y = 0]$

3. Ve kterém bodě křivky $y = x^3 - 3x^2 + 1$ svírá tečna s osou x úhel 45°? [x–ová souřadnice bodu je $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$]

4. Ve kterých bodech má křivka $y = x^3 - 27x$ vodorovnou tečnu?
[x–ové souřadnice těchto bodů jsou 3, -3]

5. Nechť $f(y) = \sqrt[3]{y}$ je vnější složkou a $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$ je vnitřní složkou funkce $F(x)$. Napište $F(x)$ explicitně. Určete její definiční obor.
[$F(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $D_F = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$]

6. Derivujte

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ [$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in (-\infty, \infty)$]

b) $y = x \sin 2x$ [$\sin 2x + 2x \cos 2x$, $x \in (-\infty, \infty)$]

c) $y = \sin^2 \sqrt{x}$ [$\frac{\sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$]

d) $y = 3^{x^2+1}$ [$2 \ln 3 \cdot x \cdot 3^{x^2+1}$, $x \in (-\infty, \infty)$]

e) $y = x^x$ [Návod: $x^x = e^{x \ln x}$; $y' = x^x(\ln x + 1)$, $x \in (0, \infty)$]

7. Vypočítejte první derivaci funkce

a) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ [$\frac{2}{(1-x^2) \ln 2}$]

b) $y = x^2(\sqrt{1 + x^2} + 3x)$ [$2x(\sqrt{1 + x^2} + 3x) + x^2(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 3)$]

c) $y = e^{x \cos 2x}$ [$e^{x \cos 2x}(\cos 2x - 2x \sin 2x)$]

8. Vypočítejte derivace až do 3. řádu funkce

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 1$
[$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$, $f''(x) = 6x + 6$, $f'''(x) = 6$, $x \in (-\infty, \infty)$]

b) $f(x) = xe^x$
[$f'(x) = e^x(x + 1)$, $f''(x) = e^x(x + 2)$, $f'''(x) = e^x(x + 3)$, $x \in (-\infty, \infty)$]

- Extrémy funkcí, věty o funkcích spojitých na intervalu
- Věty o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$
- Funkce monotónní na intervalu a lokální extrémy
- Absolutní extrémy
- Konvexita a konkávnost funkce
- Hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$ „metodou půlení intervalu“.
- L’Hôspitalovo pravidlo
- Průběh funkce
- Diferenciál a Taylorova věta
- Shrnutí a úlohy

5. Použití derivací

Cíl kapitoly

- Osvojit si pojem lokálního extrému funkce $f(x)$ a pojem absolutního extrému funkce $f(x)$ na intervalu.
- Osvojit si znalost věty o střední hodnotě.
- Naučit se hledat lokální a absolutní extrémy funkce na intervalu.
- Umět určit intervaly monotónnosti a intervaly konvexity dané funkce.
- Umět vyhledat inflexní body dané funkce.
- Naučit se aplikovat L'Hôspitalovo pravidlo na výpočet limit.
- Naučit se hledat přibližnou hodnotu kořene rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ metodou „půlení intervalu“
- Naučit se provést analýzu průběhu funkce.
- Seznámit se s pojmem diferenciálu funkce a s Taylorovou větou.

Časová zátěž

- 16 hodin

5.1 Extrémy funkcí, věty o funkcích spojitých na intervalu

V této části uvedeme některé věty o spojitých funkcích, které mají jak v matematické analýze, tak i v aplikacích základní význam.

Začneme se zavedením pojmu lokálního extrému funkce $f(x)$.

zavedení pojmu „lokální extrém funkce“

Definice 5.1. (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a platí v něm $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ pro všechna $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Podobně zavádíme pojem ostrého lokálního extrému touto definicí.

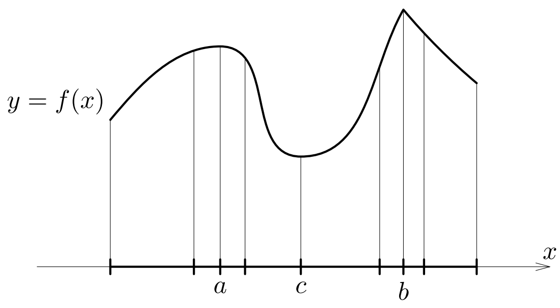
Definice 5.2. (Vlastní lokální extrémy)

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *vlastní lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a platí $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ pro všechna $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ pro něž je $x \neq x_0$.

Lokální maxima a lokální minima nazýváme společným názvem *lokální ex-*

trémy (též relativní). Podobně vlastní lokální maxima a minima nazýváme *vlastními lokálními extrémy.*

Na obr. 5.1 je vyznačena funkce $f(x)$, která má v bodech a, b lokální maximum a v bodě c lokální minimum.



Obrázek 5.1: Funkce s lokálním maximem v bodech a a b a lokálním minimem v bodě c.

Zaveďme si nyní pojem *absolutního extrému funkce* $f(x)$ na množině $M \subseteq D_f$. V této definici se porovnává hodnota funkce $f(x)$ v bodě x_0 s hodnotami funkce ve všech ostatních bodech dané množiny. Místo pojmu absolutního extrému můžeme mluvit o *globálním extrému* funkce na množině.

zavedení pojmu „absolutní extrém funkce na množině“

Definice 5.3.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má *absolutní maximum (minimum) na množině M* v bodě $x_0 \in M$, jestliže funkce $f(x)$ je definovaná na množině M a jestliže $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ pro každé $x \in M$.
Řekneme, že funkce $f(x)$ má *své vlastní absolutní maximum (minimum) na množině M* v bodě $x_0 \in M$, jestliže funkce $f(x)$ je definována na množině M a jestliže $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ pro každé $x \in M$.
Absolutní minimima a absolutní maxima nazýváme společným názvem absolutní extrémy.
Absolutní vlastní maximum a absolutní vlastní minimum nazýváme společným názvem vlastní absolutní extrémy.

Poznámka. V nahoře uvedených pojmech se místo vlastní extrém používá též termín ostrý extrém.

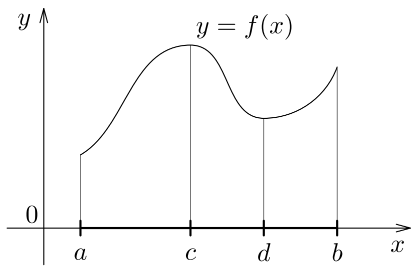
O existenci absolutního extrému funkce $f(x)$ na intervalu vypovídá následující věta. Ve většině aplikací nás zajímá nalezení absolutního extrému.

Věta 5.1. (Weierstrassova)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom existují body $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$ tak, že funkce $f(x)$ nabývá svého absolutního minima (maxima) na intervalu $\langle a,b\rangle$ v bodě x_0 (x_1). Tento bod je buďto krajním bodem intervalu $\langle a,b\rangle$, anebo bodem, v němž funkce nabývá svého lokálního extrému.

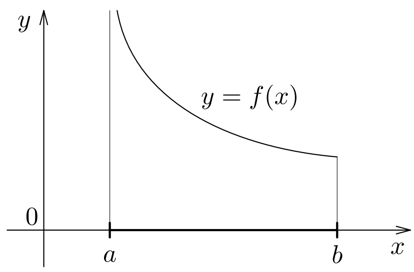
Důkaz: Bez důkazu. □

Na obr. 5.2 nabývá funkce $f(x)$ svého lokálního maxima v bodě c, lokálního minima v bodě d, absolutního maxima v bodě c a absolutního minima v bodě a.



Obrázek 5.2: Absolutní extrémy na $\langle a,b\rangle$.

Funkce na obr. 5.3 na $(a,b\rangle$ nabývá absolutního minimum v bodě b, avšak nemá absolutní maximum na $(a,b\rangle$. Tato funkce $f(x)$ je sice spojitá na (a,b), avšak není spojitá na $\langle a,b\rangle$. Větu 5.1 nelze aplikovat, nejsou splněny její předpoklady.



Obrázek 5.3: Porušení předpokladů věty 5.1.

hledání lokálních extrémů

Napřed se zabývejme problémem určení bodů, v nichž funkce nabývá lokální extrém. K tomu budeme potřebovat několik vět.

Věta 5.2. *Nechť $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$. Pak existuje takové okolí čísla a, že pro všechna čísla $x < a$ z tohoto okolí platí $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ a pro všechna $x > a$ z tohoto okolí platí $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$.*

Důkaz: Nechť $f'(a) > 0$. Pak existuje

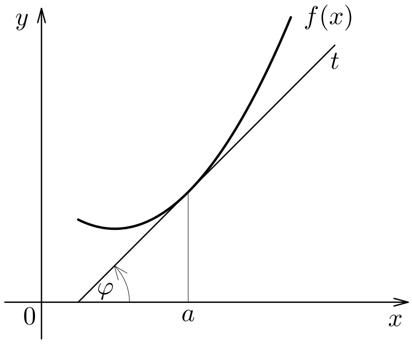
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0.$$

Existuje tedy takové okolí čísla a, že v němž je uvedený podíl definován a je stále kladný, tj.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

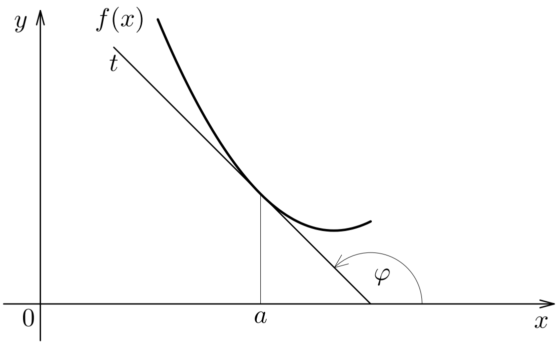
Tedy v tomto okolí jsou čísla $f(x) - f(a)$, $x - a$ stejných znamének. Pro $x < a$ je tedy $f(x) < f(a)$, pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$. Podobně se provede důkaz pro druhý případ $f'(a) < 0$. $\square$

Poznámka. Jak víme, geometrický význam první derivace je směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a. Je-li tedy $f'(a) > 0$, svírá tečna grafu $f(x)$ v bodě a úhel φ, pro nějž je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Viz obr. 5.4.



Obrázek 5.4: Derivace – směrnice tečny ($f'(a) > 0$).

Podobně, je-li $f'(a) < 0$, svírá tečna grafu funkce $f(x)$ v bodě a úhel φ, pro nějž je $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Viz obr.5.5



Obrázek 5.5: Derivace jako směrnice tečny ($f'(a) < 0$).

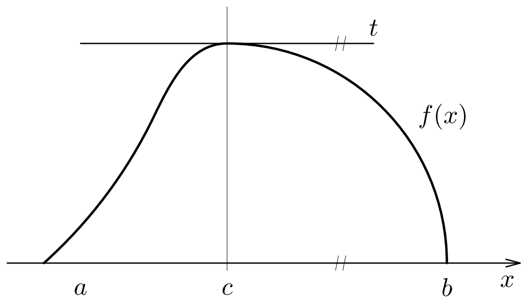
5.2 Věty o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$

věta Rolleova

Věta 5.3. (Rolleova) *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci. Buď dále $f(a) = f(b)$. Pak existuje takové číslo $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

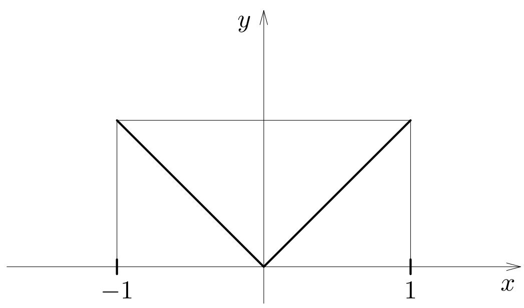
Důkaz: Je-li funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ konstantní, tvrzení je správné a za c lze vzít kterékoliv číslo uvnitř $\langle a, b\rangle$. Nechť tedy $f(x)$ není v $\langle a, b\rangle$ konstantní. Pak tedy aspoň v jednom čísle $x \in (a, b)$ platí $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Dejme tomu, že $f(x) > f(a)$. Podle věty Weierstrassovy nabude funkce $f(x)$ v některém čísle c, kde $a < c < b$, své maximální hodnoty. Dokažme, že $f'(c) = 0$. Kdyby bylo totiž $f'(c) > 0$, pak by podle věty 5.2 existovalo jisté okolí čísla c tak, že pro všechna $x > c$ z tohoto okolí by platilo $f(x) > f(c)$, podobně, kdyby $f'(c) < 0$, pak by existovalo jisté okolí čísla c tak, že pro všechna $x < c$ z tohoto okolí by platilo $f(x) > f(c)$. To však není možné, neboť $f(c)$ je ze všech funkčních hodnot maximální. Tedy opravdu $f'(c) = 0$. □

Poznámka. Geometrický smysl věty je tento: graf funkce $y = f(x)$ má za daných předpokladů aspoň v jednom bodě vodorovnou tečnu (viz obr. 5.6).



Obrázek 5.6: Tečna grafu $f(x)$ v lokálním maximu.

Příklad 5.1. Buď $f(x) = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tvrzení věty neplatí, v čísle 0 je porušen předpoklad o existenci derivace. Viz obr. 5.7



Obrázek 5.7: Graf funkce $y = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

věty o přírustku funkce

Věta 5.4. (Obecná věta o přírůstku funkce) *Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť mají v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivace. Pak existuje takové číslo $c \in (a, b)$, že*

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c).$$

Důkaz: Zaveďme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x).$$

Z předpokladů o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ vychází, že funkce $F(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a uvnitř má derivaci. Dále $F(a) = F(b)$. Podle věty 5.3 existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$F'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0.$$

Odtud tvrzení věty. □

Poznámka. Rolleova věta 5.3 je zvláštním případem věty 5.4 pro $g(x) = x$ a funkci $f(x)$, pro níž platí $f(a) = f(b)$.

věta o přírustku funkce

Věta 5.5. (Věta o přírustku funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $f'(x)$ pro $x \in (a, b)$. Potom existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \tag{5.1}$$

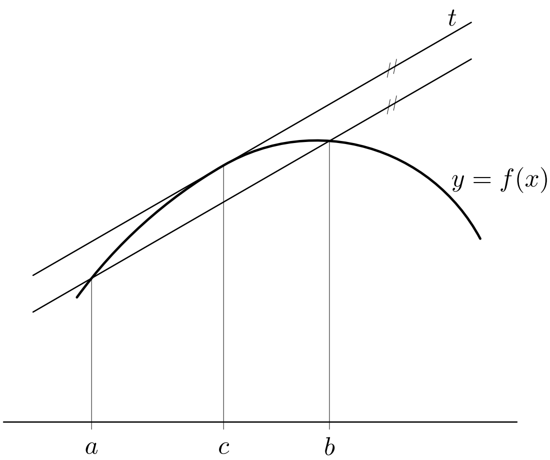
Důkaz: Důkaz vychází bezprostředně z předcházející věty pro $g(x) = x$. □

Poznámka 1. Vztah (5.1) lze přepsat takto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Levá strana tohoto vztahu vyjadřuje průměrný přírustek funkce $f(x)$ při přechodu z bodu a do bodu b.

Větu lze interpretovat takto. Existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[c, f(c)]$ je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Věta je schematicky znázorněna na obr. 5.8.



Obrázek 5.8: Interpretace věty 5.5.

Jestliže známe konstantu M pro níž je $|f'(x)| \leq M$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, potom

podle (5.1) platí
$$|f(b) - f(a)| < M \cdot (b - a).$$
Věta umožňuje odhadnout $f(b) - f(a)$.

Poznámka 2. Věta 5.5 se nazývá též „Větou o střední hodnotě diferenciálního počtu“.

Příklad 5.2. Odhadněte
$$\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}.$$

Řešení. Použijeme větu 5.5. Položme v ní $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$. Potom je $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Pro $x \in \langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $|f'(x)| = |\cos x| \le \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, takže $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Je tedy
$$\left|\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right| \le M\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right),$$
tj.
$$\left|\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right| \le \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$
Pomocí kalkulačky zjistíme, že
$$\left|\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right| = 0{,}36603 \quad \text{a} \quad \frac{\sqrt{3}\pi}{12} = 0{,}45345.$$

5.3 Funkce monotónní na intervalu a lokální extrémy

funkce monotónní

Připomeňme si, že funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí (klesající) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:
$$\text{Jestliže } x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2, \text{potom } f(x_1) < f(x_2)\ \Big(f(x_1) > f(x_2)\Big).$$
Funkce rostoucí a klesající se nazývají společným názvem funkce ryze monotónní.

Funkce $f(x)$ se nazývá neklesající (nerostoucí) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:
$$\text{Jestliže } x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2, \text{potom } f(x_1) \le f(x_2)\ \Big(f(x_1) \ge f(x_2)\Big).$$
Funkce neklesající a nerostoucí se nazývají společným názvem funkce monotónní.

Je tedy každá funkce ryze monotónní též monotónní. Opak nemusí platit.

Určit intervaly, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní, nám často pomůže tato věta.

Věta 5.6. (Monotónnost funkce na intervalu)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť I_0 je množina všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ na I_0.

Jestliže $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro $x \in I_0$, potom $f(x)$ je rostoucí (klesající) na I.

Jestliže $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) pro $x \in I_0$, potom $f(x)$ je neklesající (nerostoucí) na intervalu I.

Důkaz: Nechť $f'(x) > 0$ pro $x \in I_0$. Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Podle věty 5.5 platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

kde c je vhodný bod z intervalu $(x_1, x_2) \subseteq I_0$. Podle předpokladu je $f'(c) > 0$. Poněvadž $x_2 - x_1 > 0$, je $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, takže $f(x_2) > f(x_1)$. Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí na I.

Podobně se věta dokáže v ostatních případech. □

Ukažme nyní, jak určit intervaly monotónnosti funkce $f(x)$ definované na intervalu I v případě, že funkce $f(x)$ má dále uvedené vlastnosti.

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Předpokládejme, že $f'(x)$ je spojitá na intervalu I_0, a že má na něm konečný počet nulových bodů. Tyto nulové body rozdělí interval I na konečný počet částečných intervalů. Ve všech vnitřních bodech každého z těchto částečných intervalů je $f'(x) > 0$ nebo $f'(x) < 0$. Takže v něm je funkce $f(x)$ rostoucí nebo klesající. Při grafickém znázornění vyznačíme interval I na číselné ose a nulové body funkce $f'(x)$. Tyto nulové body rozdělí interval I na několik částečných intervalů. Nad každým z těchto intervalů vyznačíme „$+$“, je-li v jeho vnitřních bodech $f'(x) > 0$, a „$-$“, je-li v jeho vnitřních bodech $f'(x) < 0$. Pod interval, nad nímž je symbol „$+$“ („$-$“) dáme symbol „$\nearrow$“ („$\searrow$“) a tak vyznačíme, že funkce $f(x)$ je na tomto částečném intervalu rostoucí (klesající). Ilustrujme to na následujícím příkladě.

Příklad 5.3. Nalezněte intervaly monotónnosti funkce

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5.$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá a má i spojitou derivaci $f'(x)$, kde

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ dostáváme $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Vyznačme číselnou osu. Interval I je celá tato číselná osa. Na ní vyznačíme body $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Tyto body rozdělí interval I na 3 částečné intervaly: $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, \infty)$. Znamení $f'(x)$ a monotónnost funkce $f(x)$ jsou patrny z obr. 5.9.

$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
		$x_1 = 2$		$x_2 = 3$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Obrázek 5.9: Monotónnost funkce $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5$.

Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, 2\rangle$ a na intervalu $\langle 3, \infty)$ a je klesající na intervalu $\langle 2, 3\rangle$.

Příklad 5.4. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ rostoucí a intervaly, na nichž je tato funkce klesající.

Řešení. Funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Vypočítejme $f'(x)$. Dostáváme

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x},$$

tedy

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$

Funkce $f(x)$, $f'(x)$ jsou spojité na intervalu $(0, \infty)$.

Určeme znamení funkce $f'(x)$. Řešením rovnice $f'(x) = 0$ dostáváme $\ln x = 1$. Odtud $x = e$. Znamení funkce $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$ je vyznačeno na obr. 5.10.

$f'(x)$		$+$		$-$
	0		e	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Obrázek 5.10: Znamení funkce $f'(x)$.

Odtud dostáváme, že daná funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ je rostoucí na intervalu $(0, e\rangle$ a klesající na intervalu $\langle e, \infty)$.

Zabývejme se nyní podrobněji problémem nalezení lokálních extrémů.

Lokální extrémy

hledání lokálních extrémů

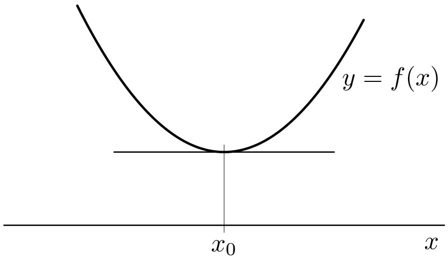
Věta 5.7. *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a lokální extrém a nechť existuje $f'(a)$. Potom $f'(a) = 0$.*

Důkaz: Věta je bezprostředním důsledkem věty 5.2 a definice 5.2. □

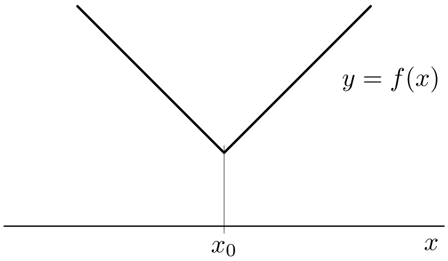
Z věty 5.7 vyplývá, že funkce $f(x)$ může mít lokální extrém pouze v bodech, v nichž nemá derivaci anebo v bodech, v nichž má derivaci rovnu nule.

Poznamenejme, že je-li $f'(a) = 0$, má graf funkce $f(x)$ v bodě a tečnu rovnoběžnou s osou x.

Na obr. 5.11 je znázorněna funkce, která má v bodě x_0 lokální minimum a má v něm derivaci; na obr. 5.12 je znázorněna funkce, která má v bodě x_0 lokální minimum, ale nemá v něm derivaci.



Obrázek 5.11: $f(x)$ má v x_0 derivaci.



Obrázek 5.12: $f(x)$ nemá v x_0 derivaci.

Zjistili jsme v kterých bodech může mít daná funkce $f(x)$ lokální extrémy. Dále si uvedeme několik vět, kterými lze alespoň v některých případech rozhodnout, zda funkce $f(x)$ má v nich skutečně lokální extrém.

Věta 5.8. (Existence lokálního extrému)

Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x)$ definována a platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x)$ definováné a platí $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$). Potom funkce $f(x)$ má v hodě x_0 lokální maximum (minimum). Jestliže $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, fukce $f(x)$ nemá v x_0 lokální extrém.

Důkaz: Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$. Nechť $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$. Podle věty 5.5 platí

$$f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0) \cdot f'(c),$$

kde $c \in (x_1, x_0)$. Poněvadž $f'(c) > 0$ a $(x_1 - x_0) < 0$ je $f(x_1) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x_1) < f(x_0)$. Podobně se dokáže, že pro $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x_2) < f(x_0)$. Má tedy funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum. Podobně se dokáže zbývající tvrzení věty. $\square$

Znázorněme si graficky situaci uvedenou v této větě. Ukažme některé případy:

a) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) & & - & & + \\ & x_0-\delta & & x_0 & & x_0+\delta \\ f(x) & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ má v x_0
lokální minimum

b) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0-\delta, x_0\rangle$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) & & + & & - \\ & x_0-\delta & & x_0 & & x_0+\delta \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ má v x_0
lokální maximum

c) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0-\delta, x_0\rangle$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) & & + & & + \\ & x_0-\delta & & x_0 & & x_0+\delta \\ f(x) & & \nearrow & & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ nemá v x_0
lokální extrém

d) $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0-\delta, x_0\rangle$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) & & - & & - \\ & x_0-\delta & & x_0 & & x_0+\delta \\ f(x) & & \searrow & & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ nemá v x_0
lokální extrém

Příklad 5.5. Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení. Daná funkce je definovaná pro $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Vypočítejme $f'(x)$. Dostáváme

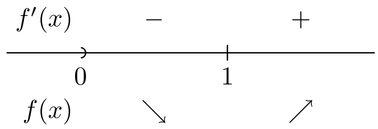
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Odtud úpravou

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad \text{tj.} \quad f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1), \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Funkce $f'(x)$ je spojitá na intervalu $I = (0, \infty)$ a je rovněž spojitá na intervalu $\tilde{I} = (-\infty, 0)$. Má nulový bod v bodě $x = 1$. Abychom mohli použít větu 5.8, budeme uvažovat funkci $f(x)$ zvlášť na intervalu $(-\infty, 0)$ a zvlášť na intervalu $(0, \infty)$.

a) Nechť $x \in I = (0, \infty)$. Nulový bod $x = 1$ funkce $f'(x)$ rozdělí interval I na dva částečné intervaly, na interval $(0, 1\rangle$ a na interval $\langle 1, \infty)$. Zřejmě $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, 1)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (1, \infty)$. Na obr. 5.13 je znázorněno znamení funkce $f'(x)$ pro $x \in (0, 1)$ a pro $(1, \infty)$. Tedy $f(x)$ je klesající na intervalu $(0, 1\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$. V bodě $x = 1$ má $f(x)$ lokální minimum.



Obrázek 5.13: Funkce $xe^{\frac{1}{x}}$ pro $x \in (0, \infty)$.

Vypočítejme $f(1)$. Dostáváme $f(1) = e$.

b) Nechť $x \in \tilde{I} = (-\infty, 0)$. V tomto intervalu je $f'(x) < 0$, takže $f(x)$ je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$, takže v něm nemá $f(x)$ lokální extrém.

Uveďme ještě další větu, která umožňuje určit v některých případech lokální extrémy funkce $f(x)$.

Věta 5.9. (Existence lokálního extrému) *Nechť $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ (< 0). Potom funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (maximum).*

Důkaz: Nechť $f''(x_0) > 0$. Potom existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

Existuje tedy takové čislo $\delta > 0$, že pro $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je podíl

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

definován a je kladný. Tedy $f'(x)$ a $x - x_0$ mají zde stejné znaménko. Je tedy $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Podle věty 5.8 má tedy funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum. Podobně se dokáže zbývající část věty.

$\square$

Příklad 5.6. Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Řešení. Funkce $f(x)$ má derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$. Podle poznámky uvedené výše může tedy nabývat lokální extrémy pouze v bodech, v nichž je $f'(x) = 0$. Dostáváme

$$f'(x) = 2x - 5.$$

Řešením rovnice $2x - 5 = 0$ dostáváme $x_0 = \frac{5}{2}$. Tedy funkce $f(x)$ může nabývat lokální extrém pouze v bodě $x_0 = \frac{5}{2}$. Dokážeme nyní dvěma způsoby, že zde daná funkce nabývá lokální minimum.

a) Zřejmě $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, \frac{5}{2})$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$. Podle věty 5.8 má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum.

b) Poněvadž $f''(x) = 2$, je $f''(\frac{5}{2}) = 2 > 0$. Podle věty 5.9 má funkce $f(x)$ v bodě $\frac{5}{2}$ lokální minimum.

Příklad 5.7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^4$.

Řešení. Podobnou úvahou jako v minulém příkladě zjistíme, že funkce $f(x)$ může mít lokální extrém pouze v bodě, v němž je $f'(x) = 0$. Zřejmě $f'(x) = 4x^3$. Rovnice $4x^3 = 0$ má jediné řešení $x = 0$. Zřejmě $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Má tedy funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ podle věty 5.8 lokální minimum. Poněvadž $f''(0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému v bodě $x = 0$ rozhodnout podle věty 5.9.

Příklad 5.8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení. Funkce $f(x)$ má derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$. Může tedy mít podle výše uvedené poznámky lokální extrém pouze v bodě $x = 0$, neboť jenom v něm je $f'(x) = 0$. Poněvadž $f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ nemá $f(x)$ podle věty 5.8 v bodě $x = 0$ lokální extrém. Daná funkce tedy nemá lokální extrémy. Poněvadž $f''(0) = 0$, nelze podle věty 5.9 rozhoudnout, zda v bodě 0 má funkce $f(x) = x^3$ lokální extrém.

Na příkladě 5.7 jsme viděli, že věta 5.9 nám někdy neumožňuje určit, zda funkce $f(x)$ má v bodě x_0, v němž je $f'(x_0) = 0$, lokální extrém, nebo nemá. Uveďme si následující větu, která je obecnější než věta 5.9.

Věta 5.10. (Existence lokálního extrému)

Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Je-li $n + 1$ sudé, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém. Jestliže $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ($f^{(n+1)}(x_0) < 0$), potom funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (maximum). Je-li $n + 1$ liché, nemá funkce $f(x)$ v bodě a lokální extrém.

Příklad 5.9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^4$.

Řešení. Dostáváme

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f'''(x) = 24x, f^{(4)}(x) = 24.$$

Zřejmě $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Má tedy funkce $f(x) = x^4$ v bodě $x = 0$ lokální minimum podle věty 5.10.

Příklad 5.10. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení. Dostáváme

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6.$$

Zřejmě $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 > 0$. Podle věty 5.10 nemá funkce $f(x) = x^3$ v bodě $x = 0$ lokální extrém.

5.4 Absolutní extrémy

hledání absolutních extrémů

V definici5.3 byla podána definice absolutního maxima a absolutního minima funkce $f(x)$ na množině M. Absolutní maximum a absolutní minimum funkce $f(x)$ na množině M nazýváme společným názvem absolutní extrémy. Absolutní extrémy funkce nemusí ovšem existovat. Tak např. funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nenabývá ani největší ani nejmenší hodnoty, neboť je

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

a funkce $f(x)$ je na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí.

Jestliže funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu, pak je existence absolutních extrémů zaručena větou Weierstrassovou. Pro nalezení absolutních extrémů je důležitá tato věta:

Věta 5.11. (Existence absolutního extrému)

Buď $f(x)$ funkce definovaná na intervalu J. Nechť má v čísle $a \in J$ absolutní extrém. Pak a je koncovým bodem intervalu J nebo v něm má funkce $f(x)$ relativní extrém.

Důkaz: Není-li a koncovým bodem intervalu J, dá se zvolit interval J' takový, že J' je částí J a bod a je vnitřním bodem v J'. Pak v J' je $f(x)$ definována a platí $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) na intervalu J'. Potom funkce $f(x)$ má v čísle a relativní maximum (minimum). □

Na absolutní extrémy funkce vede řada aplikačních úloh. Uveďme příklad.

Příklad 5.11. Obdélníkový kus plechu má rozměry $60 \times 28\,\text{cm}$. V rozích se odříznou čtverce a zbytek se ohne tak, že vznikne otevřená krabice. Jak veliká musí být strana odřízutých čtverců, aby objem krabice byl maximální?

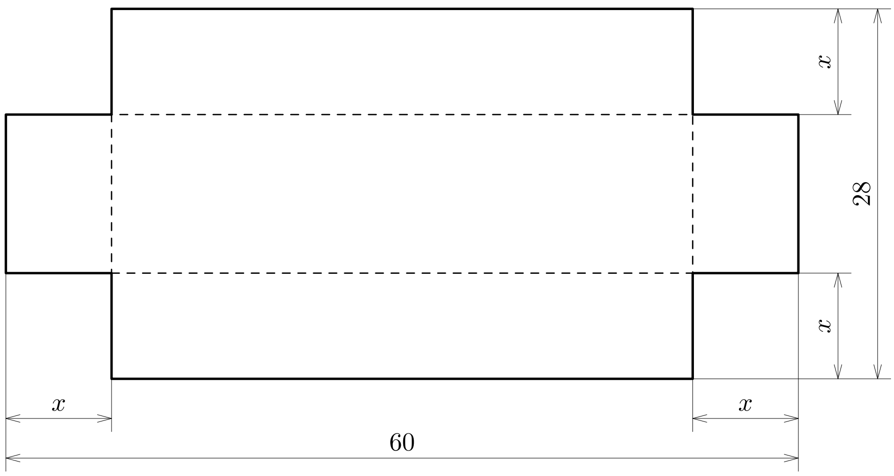
Řešení. Je-li x strana odříznutých čtverců (viz obr. 5.14), je objem krabice

$$f(x) = (60 - 2x)(28 - 2x)x = 4x(30 - x)(14 - x).$$

Platí, že $x \in \langle 0, 14\rangle$ a $f(0) = f(14) = 0$, pro $x \in (0, 14)$ je $f(x) > O$. Absolutní maximum splyne tedy s maximem relativním. Dostáváme

$$f'(x) = 4(3x^2 - 88x + 420), \qquad f''(x) = 8(3x - 44).$$

Úloze vyhovující kořen rovnice $f'(x) = 0$ je $x = 6$. Poněvadž $f''(6) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě $x = 6$ lokální maximum. Platí $f(6) = 4608$. Objem krabice je maximální, odříznou-li se čtverce o straně 6 cm. Objem krabice pak je $4{,}608\,\text{dm}^3$.



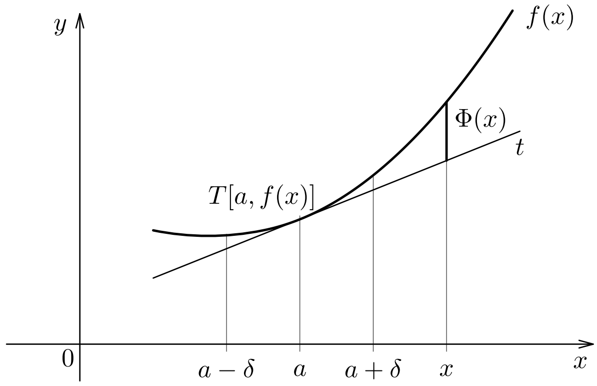
Obrázek 5.14: Tvar plechu na krabici.

5.5 Konvexita a konkávnost funkce

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom graf funkce $f(x)$ má v bodě $[a, f(a)]$ tečnu $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$. Označme

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a), \quad x \in D_f.$$

odchylku funkce $y = f(x)$ a funkce $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$, jejíž graf je tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a. (viz obr. 5.15)



Obrázek 5.15: Zavedení funkce $\Phi(x)$.

inflexní bod

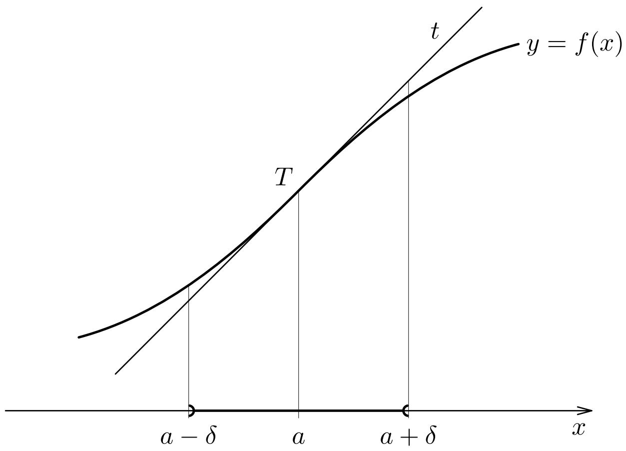
Definice 5.4. (Inflexní bod)

Řekneme, že funkce $f(x)$ probíhá v bodě a *nad tečnou* (*pod tečnou*), existuje-li takové $\delta > 0$, že na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ je definována funkce

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \qquad (5.2)$$

a $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$), pro $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. (Viz obr. 5.15.)

Řekneme, že bod a je *inflexním bodem* funkce $f(x)$, (viz obr. 5.16) jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $\Phi(x)$ je definována na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ a platí $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$) pro $x \in (a-\delta, a)$ a $\Phi(x) < 0$ ($\Phi(x) > 0$) pro $x \in (a, a+\delta)$. (Graf funkce přechází v bodě dotyku z jedné strany tečny na druhou.)



Obrázek 5.16: K definici inflexního bodu.

Věta 5.12. *Nechť $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$). Potom funkce $f(x)$ probíhá v bodě a nad tečnou (pod tečnou).*

Důkaz: Nechť $f''(a) > 0$. Pak podle definice derivace existuje takové okolí $U_\delta(a)$, že pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ je

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

definováno a je $\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} > 0$. Tedy v $U_\delta(a)$ je definována derivace $f'(x)$. Nechť x je libovolný bod z intervalu $U_\delta(a) - \{a\}$. Potom funkce $f(x)$ je v intervalu o koncových bodech a, x spojitá a uvnitř má derivaci. Totéž platí pro funkci $\Phi(x)$. Podle věty o přírustku funkce platí pro funkci Φ danou vztahem (5.2)

$$\Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi'(c)(x-a), \tag{5.3}$$

kde c leží mezi a, x. Úpravou (5.3) dostáváme

$$\Phi(x) = \Big(f'(c) - f'(a)\Big)(x-a) = \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}(x-a)(c-a).$$

Poněvadž c leží mezi a, x, je $(x-a)(c-a) > 0$. Je tedy znamení $\Phi(x)$ v $U_\delta(a) - \{a\}$ stejné jako je znamení $\frac{f'(c)-f'(a)}{c-a}$ a tedy stejné i jako je $f''(a)$. Je tedy $\Phi(x) > 0$ pro $x \in U_\delta(a) - \{a\}$. Podobně se dokáže věta v ostatních případech.

□

Z této věty bezprostředně vyplývá tato věta:

Věta 5.13. *Nechť a je inflexním bodem funkce $f(x)$. Existuje-li $f''(a)$, potom $f''(a) = 0$.*

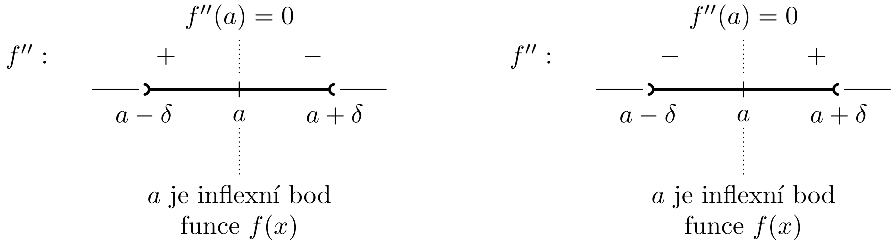
Funkce $f(x)$ může mít inflexní bod pouze v bodech, v nichž má první derivaci, ale nemá druhou derivaci nebo v těch bodech, v nichž tato druhá derivace existuje a je rovna 0.

Ukažme si nyní větu, která nám umožní alespoň v některých případech zjistit inflexní body daná funkce.

Věta 5.14. (Existence inflexního bodu)

Nechť $f''(a) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a-\delta, a)$ je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) a pro $x \in (a, a+\delta)$ je $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$). Potom funkce $f(x)$ má v bodě a inflexní bod.

Znázorněme si graficky situaci uvedenou ve větě 5.14.



Příklad 5.12. Určete inflexní body funkce

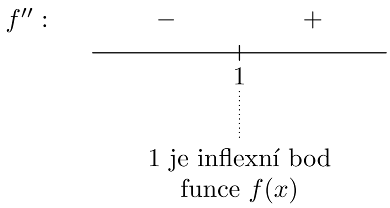
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4.$$

Řešení. Pro $x \in (-\infty, \infty)$ dostáváme

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5, \tag{5.4}$$

$$f''(x) = 6x - 6. \tag{5.5}$$

Určeme nulové body funkce $f''(x)$. Z rovnice $f''(x) = 0$, to jest z rovnice $6x - 6 = 0$ dostáváme $x = 1$. Funkce $f(x)$ má první a druhou derivaci pro $x \in (-\infty, \infty)$.



Má tedy funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ podle věty 5.14 inflexní bod.

Další větou, kterou lze v některých případech určit inflexní body, je následující věta.

Věta 5.15. (Existence inflexního bodu)

Nechť funkce $f(x)$ splňuje v bodě $x = a$ tyto vztahy $f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Je-li $n + 1$ liché, potom funkce $f(x)$ má v bodě a inflexní bod.

Příklad 5.13. Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4$. (Viz příklad 5.12.)

Řešení. Dostáváme

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5, \tag{5.6}$$
$$f''(x) = 6x - 6, \tag{5.7}$$
$$f'''(x) = 6. \tag{5.8}$$

Poněvadž $f''(1) = 0$, $f'''(1) \neq 0$ má funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ inflexní bod.

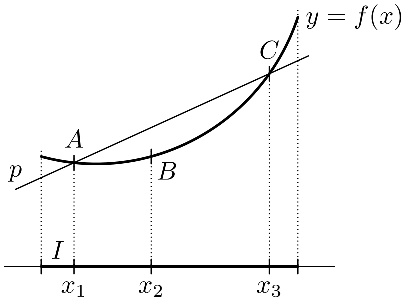
Zaveďme si pojem ryze konvexní (ryze konkávní) funkce na intervalu.

konvexita a konkávnost funkce na intervalu

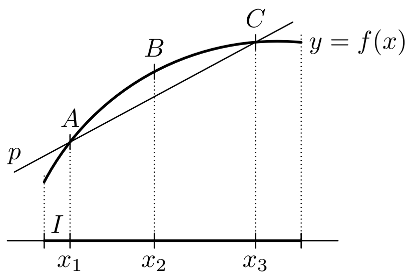
Definice 5.5. (Ryze konvexní a ryze konkávní funkce)

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *ryze konvexní* (*ryze konkávní*) na intervalu I, jestliže má tuto vlastnost:
Jestliže $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ a jestliže p je přímka jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, potom bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod (nad) přímkou p.

Na obr. 5.17 je znázorněna funkce ryze konvexní na intervalu I a na obr. 5.18 je znázorněna funkce ryze konkávní na intervalu I.



Obrázek 5.17: Funkce ryze konvexní na intervalu I.



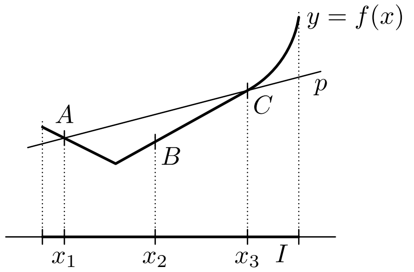
Obrázek 5.18: Funkce ryze konkávní na intervalu I.

Podobným způsobem zavádíme pojem konvexnosti a pojem konkávnosti funkce na intervalu.

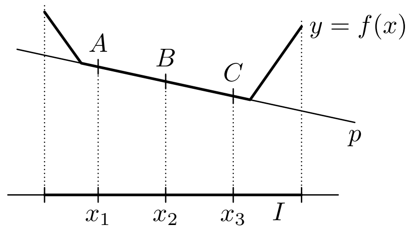
Definice 5.6. (Konvexní a konkávní funkce)

Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I *konvexní* (*konkávní*), jestliže má tuto vlastnost:
Jestliže $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ a jestliže p je přímka jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, potom bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod (nad) přímkou p nebo na ní.

Na obr. 5.19 je znázorněna funkce konvexní na intervalu I a na obr. 5.20 je znázorněna funkce konkávní na intervalu I.



Obrázek 5.19: Funkce konvexní na intervalu I.



Obrázek 5.20: Funkce konkávní na intervalu I.

Poznámka 1. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu I. Nechť x_1, x_2, $x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Potom přímka p, jdoucí body $A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$, má rovnici

$$p: \; y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p, jestliže

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
&f(x_2)(x_3 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1) \\
&f(x_2)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1) \\
&\Big[f(x_2) - f(x_1)\Big](x_3 - x_2) < \Big[f(x_3) - f(x_2)\Big](x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

Tedy bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.9}$$

Podobně se ukáže, že bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží pod přímkou p nebo na ni, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.10}$$

Analogicky se odvodí, že bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží nad přímkou p, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.11}$$

Podobně, bod $B[x_2, f(x_2)]$ leží nad přímkou p nebo na ni, jestliže platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.12}$$

O vztahu mezi konvexností (konkávností) funkce $f(x)$ a znamením druhé derivace $f''(x)$ funkce $f(x)$ vypovídají následující věty.

Věta 5.16. (Vztah konvexnosti a druhé derivace funkce)

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť funkce $f(x)$ má druhou derivaci $f''(x)$ na intervalu I_0. Potom platí: Funkce $f(x)$ je konvexní (konkávní) na intervalu I, když a jenom když $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro $x \in I_0$.

Důkaz: Důkaz rozdělíme do dvou částí.

a) Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť existuje $f''(x)$ pro $x \in I_0$. Nechť $f(x)$ je konvexní na I. Dokažme, že potom je $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod $x_2 \in I_0$, tak, že $f''(x_2) < 0$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$, $x \neq x_2$, existuje $\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2}$ a platí

$$\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0. \tag{5.13}$$

Zvolme $x_1 \in (x_2 - \delta, x_2)$, $x_3 \in (x_2, x_2 + \delta)$. Poněvadž dle předpokladu je funkce $f(x)$ konvexní na I, platí (5.10) i pro takto zvolené body x_1, x_2, x_3. Aplikujeme-li větu o přírustku funkce na (5.10), dostáváme, že existuje $c \in (x_2 - \delta, x_2)$ a $d \in (x_2, x_2 + \delta)$ tak, že

$$f'(c) \leq f'(d). \tag{5.14}$$

Avšak z (5.13) vyplývá, že

$$f'(c) > f'(x_2) > f'(d). \tag{5.15}$$

Poněvadž (5.14), (5.15) nemohou současně platit, dospěli jsme ke sporu. Je tedy $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I$.

b) Nechť $f(x)$ je spojitá na I a nechť $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$. Dokažme, že potom je $f(x)$ konvexní na I.

Poněvadž $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$, je $f'(x)$ neklesající na I_0. Předpokládejme, že $f(x)$ není konvexní na I. Existují tedy body $x_1, x_2, x_3 \in I$ tak, že neplatí (5.10), tedy že je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad x_1 < x_2 < x_3. \tag{5.16}$$

Aplikujeme-li na (5.16) větu o přírustku funkce, dostáváme, že existuje $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ tak, že

$$f'(c) > f'(d). \tag{5.17}$$

Poněvadž $c, d \in I_0$, $c < d$ a $f'(x)$ je neklesající na I_0, nemůže (5.17) platit. Je tedy $f(x)$ konvexní na I.

Podobně se dokáže věta pro funkce konkávní. □

Poznámka. K větě 5.16 lze vyslovit analogickou větu pro funkce ryze konvexní a pro funkce ryze konkávní.

Uveďme si ještě další větu, která je zobecněním tvrzení ve větě 5.16.

Věta 5.17. (Ryze konvexní funkce na intervalu)

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu jeho vnitřních bodů. Nechť $f''(x) \geq 0$ pro $x \in I_0$, přičemž $f''(x) = 0$ jen v konečném počtu bodů z I_0. Potom funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze konvexní.

Důkaz: Princip důkazu ukažme v následujícím případě. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $I = \langle a, b\rangle$. Nechť $c \in (a, b)$, $f''(c) = 0$ a nechť $f''(x) > 0$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$.

Za těchto předpokladů je $f'(x)$ spojitá na (a, b). Jsou-li $x_1, x_2 \in (a, c\rangle$, $x_1 < x_2$, je podle věty o přírustku funkce

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(\xi), \quad \text{kde } \xi \in (x_1, x_2).$$

Je tedy $f'(x_2) - f'(x_1) > 0$. Je tedy $f'(x_1) < f'(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in \langle a, c)$, $x_1 < x_2$. Funkce $f'(x)$ je tedy rostoucí na $(a, c\rangle$. Podobně se dokáže, že $f'(x)$ je rostoucí na intervalu $\langle c, b)$. Tedy $f'(x)$ je rostoucí na intervalu (a, b). Předpokládejme, že funkce $f(x)$ není ryze konvexní na $\langle a, b\rangle$. Pak existují taková čísla $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$, že pro ně neplatí (5.9), to jest, že platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.18}$$

Aplikujeme-li na každou stranu (5.18) větu o přírustku funkce, dostáváme

$$f'(\xi) \geq f'(\eta), \quad \text{kde } \xi \in (x_1, x_2),\ \eta \in (x_2, x_3). \tag{5.19}$$

Nelezli jsme tedy $\xi, \eta \in (a, b)$, $\xi < \eta$, pro něž platí (5.19). To však nemůže platit, neboť $f'(x)$ je rostoucí na (a, b). Je tedy $f(x)$ ryze konvexní na $\langle a, b\rangle$.

□

Věta 5.18. (Ryze konkávní funkce na intervalu)

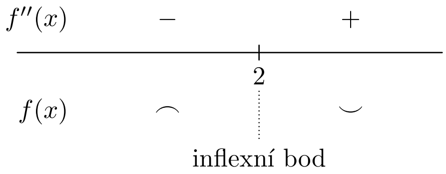
Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Označme I_0 množinu jeho vnitřních bodů. Nechť $f''(x) \leq 0$ pro $x \in I_0$, přičemž $f''(x) = 0$ jen v konečném počtu bodů z I_0. Potom funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze konkávní.

Důkaz: Důkaz je analogický důkazu věty 5.17. □

Při hledání intervalů konvexity a konkávnosti a inflexních bodů lze často použít následující postup.
Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu I spojitá. Nechť I_0 je množina jeho vnitřních bodů. Na číselné ose vyznačíme interval I. Nad číselnou osu napíšeme „$f''(x)$“, budeme totiž nad číselnou osou vyznačovat znamení funkce $f''(x)$. Pod číselnou osu napíšeme „$f(x)$“, budeme totiž pod číselnou osou vyznačovat symboly konvexnost, resp. konkávnost funkce $f(x)$. Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I_0 druhou derivaci $f''(x)$. Nechť $f''(x)$ má na I_0 konečný počet nulových bodů. Tyto nulové body rozdělí interval I na několik částečných intervalů. Je-li $c \in I_0$ takový bod, že $f''(c) = 0$, počítáme bod c k oběma sousedním intervalům s koncovým bodem c. Ve všech vnitřních bodech každého z těchto částečných intervalů je buďto $f''(x) > 0$ nebo $f''(x) < 0$. V případě, že je zde $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), napíšeme nad tento interval symbol „$+$“ (symbol „$-$“) a pod tento interval symbol „$\smile$“ („$\frown$“) vyjadřující, že je na něm funkce $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní). Je-li $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní) ve dvou sousedních intervalech, je ryze konvexní (ryze konkávní) i na jejich sjednocení. Ve společném bodě c těchto sousedních intervalů, v němž je $f''(c) = 0$, nemá funkce $f(x)$ inflexní bod. Je-li $f(x)$ ryze konvexní (ryze konkávní) v některém částečném intervalu a v sousedním intervalu je $f(x)$ ryze konkávní (ryze konvexní), má funkce $f(x)$ ve společném bodě c těchto intervalů inflexní bod.

Příklad 5.14. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$ konvexní a intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Výpočtem dostáváme $f''(x) = 6x - 12$, $x \in (-\infty, \infty)$. Řešme rovnici $f''(x) = 0$, tj. $6x - 12 = 0$. Tato rovnice má jediné řešení $x_1 = 2$. Tento nulový bod rozdělí interval I na dva částečné intervaly: $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, \infty)$. Ve vnitřních bodech intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f''(x) < 0$ a ve vnitřních bodech intervalu $\langle 2, \infty)$ je $f''(x) > 0$. Je tedy funkce $f(x)$ ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 2\rangle$ a ryze konvexní na intervalu $\langle 2, \infty)$. V bodě $x = 2$ má funkce $f(x)$ inflexní bod. (Viz obr. 5.21)



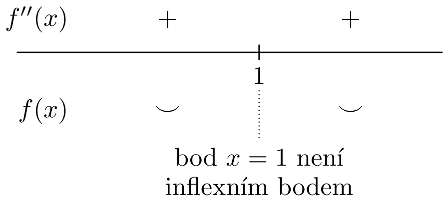
Obrázek 5.21: Konvexita funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$.

Příklad 5.15. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ konvexní, intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní a inflexní body.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Zřejmě $I_0 = (-\infty, \infty)$ je množina vnitřních bodů intervalu I. Výpočtem dostáváme

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12.$$

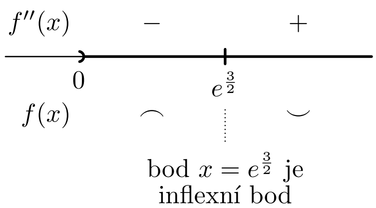
Řešením rovnice $f''(x) = 0$, tj. rovnice $x^2 - 2x + 1 = 0$, dostáváme $x_{1,2} = 1$. Body $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ rozdělí interval I na dva částečné intervaly $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 1, \infty)$. Ve vnitřních bodech každého z nich je $f''(x) > 0$. Je tedy $f(x)$ ryze konvexní jak na intervalu $(-\infty, 1\rangle$, tak i na intervalu $\langle 1, \infty)$. Je tedy ryze konvexní i na jejich sjednocení, to jest na intervalu $(-\infty, \infty)$. Viz obr. 5.22. Tato funkce nemá inflexní bod.



Obrázek 5.22: Konvexita funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$.

Příklad 5.16. Určete inflexní body funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na svém definičním oboru $I = (0, \infty)$. Výpočtem dostáváme $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$, $f''(x) = \frac{1}{x^3}(2 \ln x - 3)$. Řešením rovnice $f''(x) = 0$, tj. rovnice $\frac{1}{x^3}(2 \ln x - 3)$, dostáváme $\ln x = \frac{3}{2}$, tj. $x = e^{\frac{3}{2}}$. Určením znamení $f''(x)$ dostáváme, že $f(x)$ je konkávní v intervalu $(0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$, konvexní na intervalu $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$. V bodě $x = e^{\frac{3}{2}}$ má inflexní bod. Viz obr. 5.23.



Obrázek 5.23: Konvexita funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

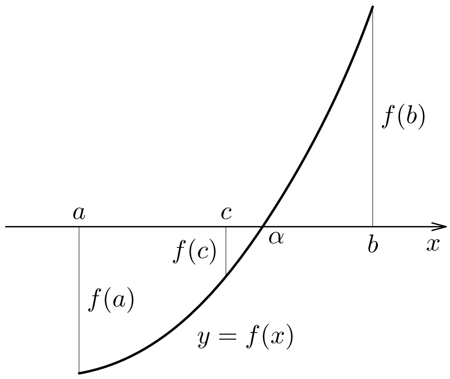
5.6 Hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$ „metodou půlení intervalu“.

metoda půlení intervalu

Ukažme si nyní větu, která je velice prospěšná při hledání kořenů rovnic. Tuto větu jsme mohli vyslovit již dříve, ale na tomto místě můžeme využít v následujícím příkladě poznatky o hledání extrémů funkce.

Věta 5.19.

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje alespoň jedno takové číslo $\alpha \in (a, b)$, že $f(\alpha) = 0$. (Viz obr 5.24.)



Obrázek 5.24: Ilustrace významu věty 5.19.

Tato věta umožňuje nalézt kořen α rovnice $f(x) = 0$ s libovolnou přesností postupným dělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Určíme bod $c = (a+b)/2$. Je-li $f(c) = 0$, je $\alpha = c$. V opačném případě, je-li $f(c) \cdot f(a) > 0$, položíme $a = c$; je-li $f(c) \cdot f(a) < 0$, položíme $b = c$. Tím se obdrží nový zúžený interval $\langle a, b\rangle$ v němž leží číslo α. Celý postup opakujeme tak dlouho, až obdržíme buďto číslo c, v němž je $f(c) = 0$ anebo interval $\langle a, b\rangle$, v němž leží kořen α a jehož délka $b - a$ je menší než zvolené číslo, udávající požadovanou přesnost.

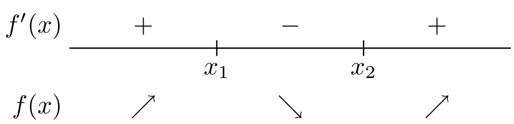
Příklad 5.17. Nalezněme reálné kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Řešení: Abychom určili reálné kořeny daného polynomu, určeme napřed jeho znamení.

Určeme lokální extrémy dané funkce. Výpočtem dostáváme

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$$

Polynom $f'(x)$ má kořeny $x_1 = 1 - 1/3\sqrt{6}$, $x_2 = 1 + 1/3\sqrt{6}$. Určeme znamení funkce $f'(x)$ a intervaly monotónnosti funkce $f(x)$. Dostáváme



Je tedy $f(x)$ rostoucí v intervalu $(-\infty, x_1\rangle$, klesající v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle x_2, \infty)$. Funkce f má tedy v bodě x_1 lokální minimum. Poněvadž výpočtem zjistíme, že

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

má funkce $f(x)$ jenom jeden reálný kořen $\alpha \in (x_2, \infty)$. Funkce $f(x)$ je záporná pro $x \in (-\infty, \alpha)$ a kladná pro $x \in (\alpha, \infty)$.

Počítáním hodnot funkce $f(x)$ v bodech intervalu (x_2, ∞), zjistíme, že např. $f(2) = -3$, $f(3) = 2$.

Poněvadž $f(x)$ je funkce spojitá a rostoucí na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ a $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, má funkce $f(x)$ na intervalu $(2, 3)$ právě jeden kořen. Tento kořen můžeme hledat metodou půlení intervalu.

Položme $a := 2$, $b := 3$. Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
&f(a) := -3,\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{5}{2},\ f(c) = -\frac{13}{8},\ a := c\\
&f(a) := -\frac{13}{8},\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{11}{4},\ f(c) = -\frac{9}{64},\ a := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := 2;\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{23}{8},\ f(c) = \frac{431}{512},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{431}{512};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{89}{32},\ f(c) = \frac{1349}{4096},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{1349}{4096};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{5}{2},\ f(c) = \frac{2921}{32768},\ b := c\\
&f(a) := -\frac{9}{64},\ f(b) := \frac{2921}{32768};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{177}{64},\ f(c) = -\frac{7087}{262144},\\
&\quad a := c\\
&f(a) := -\frac{7087}{262144},\ f(b) := \frac{2921}{32768};\ c := \frac{a+b}{2},\ c := \frac{355}{128},\\
&\quad f(c) = \frac{64443}{2097152},\ b := c
\end{aligned}$$

Tedy $a \doteq 2{,}7656$, $b \doteq 2{,}7734$, takže

$$\alpha \doteq 2{,}7695.$$

Úkol. Načrtněte si graf funkce $f(x)$ a vyznačte body x_1, x_2, $a = 2$, $b = 3$ a kořen α.

5.7 L'Hôspitalovo pravidlo

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou dvě funkce a nechť $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Symbol lim zde zastupuje kterýkoliv ze symbolů $\lim\limits_{x\to a_+}$, $\lim\limits_{x\to a_-}$, $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, kde $a \in \mathbb{R}$. Zatím jsme uvažovali dva případy pro výpočet $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Ve větě 3.3 jsme uvedli, že

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$$

pokud $\frac{A}{B}$ má význam v $\mathbb{R}^*$. Podíl $\frac{A}{B}$ nemá význam v případě, že $B = 0$, a v případě, že $A = \pm\infty$, $B = \pm\infty$.

b) Ve větě 3.5 jsme uvedli případ, kdy $A \neq 0$, $B = 0$.

Doporučuji, abyste si obě tyto věty zopakovali. Přistoupíme nyní k další větě pro výpočet limity podílu dvou funkcí.

c) V další větě, zvané L'Hôspitalovo pravidlo, vyšetříme případy α) $A = B = 0$, β) $A = \pm\infty$, $B = \pm\infty$.

L'Hôspitalovo pravidlo

L'Hôspitalovo pravidlo

Věta 5.20. (L'Hôspitalovo pravidlo)

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou takové funkce, že

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \textit{nebo}$$
$$\lim f(x) = \pm\infty,\ \lim g(x) = \pm\infty.$$

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

pak existuje $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Symbol lim *zde může nabýt kteréhokoliv z pěti významů:*

$$\lim_{x\to a^+},\ \lim_{x\to a^-},\ \lim_{x\to a},\ \lim_{x\to -\infty},\ \lim_{x\to +\infty}.$$

Důkaz: Omezme se na případ, že $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ a pro určitost předpokládejme, že jde o limity zprava v čísle a a že α je reálné číslo. Položme $f(a) = g(a) = 0$. Pak funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou v čísle a zprava spojité. Poněvadž

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ takové číslo $\delta > 0$, že funkce $f(x)$, $g(x)$ mají v intervalu $(a, a+\delta)$ derivaci a v něm platí

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon. \tag{5.20}$$

Odtud též vyplývá, že $g'(x) \neq 0$. Buď $\overline{x}$ libovolné číslo tohoto intervalu. Pak na intervalu $\langle a, \overline{x}\rangle$ splňují funkce f, g předpoklady věty o přírustku funkce. Podle ní tedy existuje $c \in (a, \overline{x})$ tak, že

$$[f(\overline{x}) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(\overline{x}) - g(a)] \cdot f'(c).$$

Poněvadž $f(a) = g(a) = 0$, dostáváme odtud

$$f(\overline{x}) \cdot g'(c) = g(\overline{x}) \cdot f'(c).$$

Poněvadž $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, \overline{x})$, je též $g'(c) \neq 0$. Ukažme, že je $g(\overline{x}) \neq 0$. Předpokládejme, že $g(\overline{x}) = 0$. Pak by podle věty o přírustku funkce existovalo uvnitř $(a, \overline{x})$ číslo c_1 tak, že $g'(c_1)(\overline{x} - a) = g(\overline{x}) - g(a) = 0$. To by byl spor, neboť $g'(x) \neq 0$ na intervalu $(a, a+\delta)$, tedy i $g'(c_1) \neq 0$. Tedy $g(\overline{x}) \neq 0$. Je tedy

$$\frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Odtud a ze vztahu (5.20) pak dostáváme, že

$$\left|\frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

Proto platí:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Podobně se důkaz provede i v ostatních případech. □

Příklad 5.18. Vypočítejte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}.$$

Řešení: Položme

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - 1, \qquad g(x) = x.$$

Zřejmě $f(x)$ i $g(x)$ jsou funkce spojité v bodě 0. Je tedy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = 0.$$

Podle L'Hôspitalova pravidla platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)_{x=0} = 0.$$

Poznámka. Užitím věty 5.20 lze počítat i limitu tzv. neurčitých výrazů. Jsme zvyklí je zapisovat takto
„$\frac{0}{0}$“, jestliže limita čitatele i jmenovatele je rovna 0,
„$\frac{\infty}{\infty}$“, jestliže čitatel i jmenovatel mají nevlastní limity,
„$0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$“, pro případ výpočtu $\lim f(x)g(x)$, kdy $\lim f(x) = 0$ a $\lim g(x) = \infty(-\infty)$,
„$\infty - \infty$“, kdy limita jednoho sčítance je $+\infty$ a druhého je rovna $-\infty$,
„0^0“, pro případ výpočtu $\lim f(x)^{g(x)}$, kdy $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$
„$0^{\pm\infty}$“, pro případ výpočtu $\lim f(x)^{g(x)}$, kdy $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \pm\infty$.
Limity takovýchto výrazů počítáme převedením na výpočet podílu takových funkcí, abychom mohli použít L'Hôspitalovo pravidlo. Výpočet limity $f(x)^{g(x)}$ počítáme tak, že zapíšeme

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

a limitu počítáme výpočtem limity funkce $g(x)\ln f(x)$ a použijeme větu o výpočtu limity složené funkce.

Příklad 5.19. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

Řešení. Zde menšenec i menšitel mají limitu rovnu $+\infty$. Jde o případ, který jsme označili „$\infty - \infty$“. Dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{y\to 0_+}\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|} - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0_+}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y}.$$

Poněvadž

$$\lim_{y\to 0_+}\left(\sqrt{1-y^2}-1\right) = \left(\sqrt{1-y^2}-1\right)_{y=0} = 0, \qquad \lim_{y\to 0_+} y = 0$$

použijeme L'Hôspitalovo pravidlo. Dostáváme

$$\lim_{y\to 0_+}\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{y} = \lim_{y\to 0_+}\frac{\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)}{1} = \lim_{y\to 0_+}\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Příklad 5.20. Vypočítejte

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0_-} xe^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení.

a) Zřejmě

$$\lim_{x\to 0_+} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty.$$

Jde tedy o výpočet limity typu „$0 \cdot \infty$“. Úpravou dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}},$$

tedy jde o typ „$\frac{\infty}{\infty}$“. Použitím L'Hôspitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

b) Zřejmě

$$\lim_{x\to 0_-} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^{y} = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0_-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

Příklad 5.21. Vypočítejte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení. Jde o výpočet limity typu „$\frac{\infty}{\infty}$“. Užitím L'Hôspitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Příklad 5.22. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 0_+} x^x.$$

Řešení. Jde o výpočet limity typu „0^0“. Funkce x^x je definovaná pro $x \in (0, \infty)$. Lze ji přepsat na tvar

$$x^x = e^{x \ln x}.$$

Jde o složenou funkci, její vnější složkou je funkce e^u, vnitřní složkou je funkce $x \ln x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} x \ln x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Užitím L'Hôspitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0_+} x = 0.$$

Poněvadž e^u je funkce spojitá, je

$$\lim_{x\to 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0_+}(x \ln x)} = e^0 = 1.$$

5.8 Průběh funkce

asymptoty

Zavedeme nyní pojem asymptot funkce $f(x)$. Jde o přímky, které dále uvedeným způsobem charakterizují průběh funkce. Dělíme je na a) asymptoty bez směrnice a na b) asymptoty v nevlastních bodech $-\infty$, ∞.

asymptoty

Definice 5.7. (Asymptoty bez směrnice)

Přímku $x = a \in \mathbb{R}$ nazýváme *asymptotou bez směrnice* funkce $y = f(x)$, jestliže $\lim f(x) = \infty$ nebo $\lim f(x) = -\infty$, kde lim značí alespoň jeden ze symbolů

$$\lim_{x\to a^-}, \qquad \lim_{x\to a^+}, \qquad \lim_{x\to a}.$$

Poznámka. Otázkou je, jak určit a, pro nějž je

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = +\infty \quad (\text{nebo } \lim_{x\to a_+} f(x) = -\infty)$$

nebo

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = +\infty \quad (\text{nebo } \lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty).$$

Lehce nahlédneme, že a je boďto bodem, v němž funkce $f(x)$ není spojitá, nebo koncovým bodem intervalu $J \subseteq D_f$.

Příklad 5.23. Určeme asymptotu bez směrnice funkce

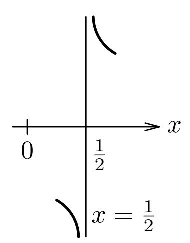
$$f(x) = \frac{3x^2+1}{2x-1}.$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá pro $x \in (\infty, \infty) - \{\frac{1}{2}\}$. Výpočtem dostáváme

$$\lim_{x\to 1/2^+} \frac{3x^2+1}{2x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1/2^-} \frac{3x^2+1}{2x-1} = -\infty.$$

Je tedy $x = \frac{1}{2}$ asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$.

Při vyšetřování průběhu funkce $\frac{3x^2+1}{2x-1}$ vyznačíme asymptotu bez smernice takto



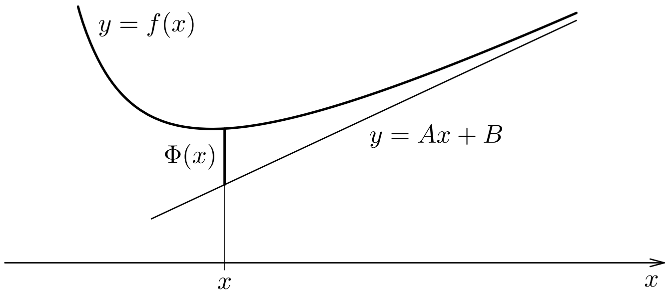
Obrázek 5.25: Asymptoty bez směrnice – $x = \frac{1}{2}$.

Definice 5.8. (Asymptota v nevlastním bodě) Přímku $y = Ax + B$ (A, B jsou reálná čísla) nazýváme *asymptotou* funkce $y = f(x)$ v nevlastním bodě ∞ ($-\infty$), jestliže (viz obr. 5.26)

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0\right),$$

kde

$$\Phi(x) = f(x) - Ax - B.$$



Obrázek 5.26: Asymptotou v bodě ∞.

K určení asymptot se směrnicí používáme následující věty.

Věta 5.21. (Určení asymptoty v nevlastním bodě) *Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou grafu $y = f(x)$ v nevlastním bodě ∞ ($-\infty$), když a jen když*

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax)$$
$$\left(A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax)\right).$$

Poznámka. Místo „asymptota bez směrnice“ se používá též termín „*asymptota rovnoběžná s osou y*“. Název vychází z toho, že přímka rovnoběžná s osou y svírá s osou x úhel 90° a tato přímka nemá směrnici ($\operatorname{tg} 90°$ není definováno).

Místo „asymptota v nevlastním bodě“ lze použít i termínu „*asymptota se směrnicí*“.

Příklad 5.24. Určete asymptoty se směrnicí funkce

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x - 1}.$$

Řešení. Výpočtem dostáváme

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{3}{y^2}-1}{\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{3-y^2}{2-y} = \frac{3}{2}.$$

Dále dostáváme:

$$B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-1}{2x-1} - \frac{3}{2}x \right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-2-6x^2+3x}{2(2x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{2(2x-1)} = \frac{3}{4}.$$

Je tedy $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ asymptotou grafu funkce $y = \frac{3x^2-1}{2x-1}$ v nevlastním bodě ∞. Lehce se přesvedčíme, že tato přímka je i asymptotou dané funkce v nevlastním bodě $-\infty$.

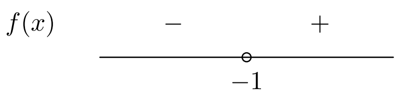
Příklad 5.25. Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}.$$

Řešení.

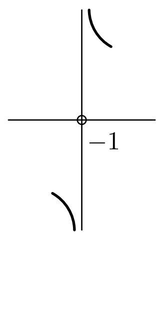
a) Asymptoty bez směrnice.

Definičním oborem je množina $(-\infty, \infty) - \{-1\}$. Tedy $f(x)$ není spojitá jen v bodě -1. Abychom určili $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x)$ určíme znamení funkce $f(x)$. Dostáváme



Poněvadž $\lim\limits_{x\to -1_+} (2x^2+1) = 3 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -1_+} (x+1) = 0$, použijeme k výpočtu $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x)$ větu 3.5.

Poněvadž existuje $U^+(-1)$ tak, že pro $x \in U^+(-1) - \{-1\}$ je $f(x) > 0$, je $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = \infty$. Podobně zjistíme, že $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = -\infty$. Je tedy $x = -1$ asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$. (Viz následující náčrtek.)



b) Asymptoty se směrnicí.

Hledejme asymptotu v nevlastním bodě ∞. Asymptotou je přímka $Ax+B$ kde A, B, se určí podle věty 5.21. Dostáváme

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 2 \\
B &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x+1} - 2x \right) = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2.
\end{aligned}$$

Je tedy

$$y = 2x - 2$$

asymptotou v nevlastním bodě ∞. Tato přímka je zároveň asymptotou v nevlastním bodě $-\infty$.

Poznámka. Lze ukázat, že u racionálních lomených funkcí je asymptota v nevlastním bodě $+\infty$ totožná s asymptotou v nevlastním bodě $-\infty$.

postup při vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

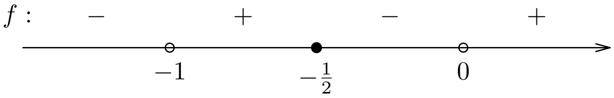
1. *Kde je funkce definovaná, kde má nulové body, kde je nad osou x a kde je pod osou x (znamení funkce). Zda je funkce sudá, lichá, periodická.*
2. *Kde funkce roste, kde klesá, kde má extrémy.*
3. *Kde je funkce konvexní, kde je konkávní a kde má inflexní body.*
4. *Jaké má asymptoty.*
5. *Graf.*

Příklad 5.26. Vyšetřeme průběh funkce

$$y = \frac{2x+1}{x(x+1)}.$$

1. Jde o reálnou racionální lomenou funkci. Čitatel $2x+1$ má kořen $x = -\frac{1}{2}$, jmenovatel $x(x+1)$ má dva kořeny, a to $x = 0$ a $x = -1$. Poněvadž čitatel a jmenovatel funkce nemají stejné kořeny a každý kořen čitatele a jmenovatele je jednoduchý (liché násobnosti), rozdělí tyto kořeny interval $(-\infty, \infty)$ na 4 částečné intervaly. V sousedních

intervalech má funkce opačné znaménko (viz náčrtek).



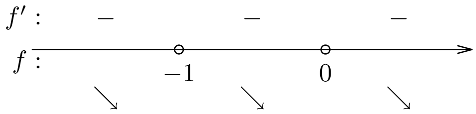
Funkce není definovaná v bodech $x = 0$, $x = -1$. Graf funkce protíná osu x v bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Funkce není ani sudá ani lichá, není periodická.

2. Vypočítejme $f'(x)$. Dostáváme:

$$f'(x) = -\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2}.$$

Čitatel nemá reálné kořeny, jmenovatel má čísla -1, 0 za dvojnásobné kořeny. Znamení $f'(x)$a monotónnost funkce $f(x)$ jsou patrny z následujícího náčrtku:

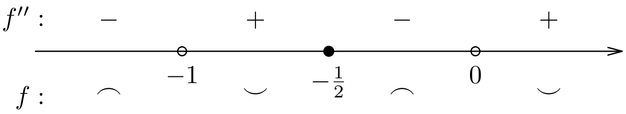


Podle věty 5.6 funkce $f(x)$ klesá v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$. Poněvadž $f'(x)$ existuje v D_f a je zde $f'(x) \neq 0$, nemá $f(x)$ lokální extrémy.

3. Výpočítejme $f''(x)$. Dostáváme

$$f''(x) = 2\frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3}.$$

Zřejmě $f''(-\frac{1}{2}) = 0$. Funkce $f''(x)$ nemá jiné reálné kořeny. Znamení $f''(x)$ a konvexita funkce $f(x)$ jsou patrny z náčrtku:



Je tedy $f(x)$ konkávní v intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a konvexní v intervalech $(-1, -\frac{1}{2}\rangle$, $(0, \infty)$. Bod $x = -\frac{1}{2}$ je inflexním bodem.

4. Přímka $x = a$ může být asymptotou bez směrnice grafu $y = f(x)$ pouze tehdy, není-li funkce f v bodě a spojitá zprava nebo zleva. V našem případě se jedná o body $x = 0$, $x = -1$. Výpočtem dostáváme (podívejte se na znamení funkce $f(x)$):

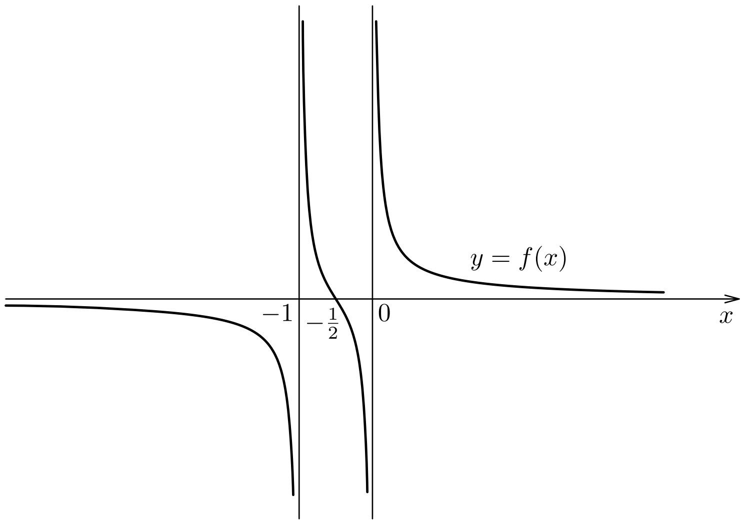
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Tedy přímky $x = -1$, $x = 0$ jsou asymptoty bez směrnice. K určení asymptot se směrnicí vypočítáme:

$$A = \lim_{x\to\pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad B = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

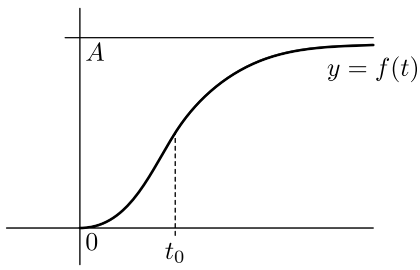
Tedy $y = 0$ je asymptotou se směrnicí v bodech ∞, $-\infty$.

5. Náčrtek grafu:



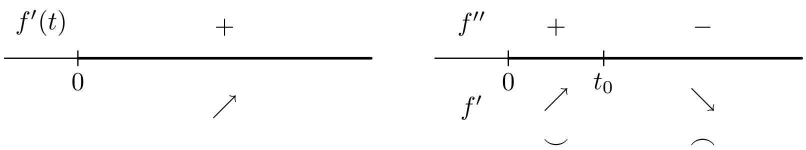
Obrázek 5.27: Náčrtek grafu funkce $\frac{2x+1}{x(x+1)}$.

Příklad 5.27. Na obr. 5.28 je znázorněna funkce $y = f(t)$, $t \in \langle 0, \infty)$ popisující množství y prodeje nějakého zboží jako funkci času t.



Obrázek 5.28: Prodej zboží.

Na následujících náčrtcích je znázorněno znamení $f'(t)$, $f''(t)$. Z nich lze vyvodit tyto závěry



Funkci $f'(t)$ lze chápat jako funkci „rychlosti“ prodeje. Rychlost prodeje se zvyšuje až do časového okamžiku t_0, potom rychlost prodeje klesá.

5.9 Diferenciál a Taylorova věta

V této části se budeme zabývat přibližným vyjádřením funkce. Řešme tuto úlohu. Je dána funkce $f(x)$; nahraďme ji pro x v blízkosti bodu a polynomem.

Úloha je nejjednodušeji rešena, nahradíme-li ji polynomem prvního stupně – tečnou, za předpokladu, že existuje $f'(a)$.

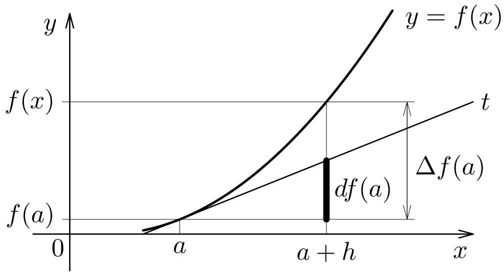
Zvolme h. Položme $x = a + h$. Výraz

zavedení pojmu „diferenciál funkce“

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

nazveme diferencí – jde o přírustek funkce, při přechodu z bodu a do bodu $a + h$.

Přírustek na tečně t funkce $y = f(x)$ v jejím bodě $T[a, f(a)]$ při přechodu z bodu a do bodu $a + h$ je roven $f'(a)h$. (Viz obr. 5.29)



Obrázek 5.29: Význam diferenciálu.

Zaveďme si nyní pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a touto definicí.

Definice 5.9. (Diferenciál funkce $y = f(x)$) Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a derivaci $f'(a)$. Potom

$$df(a) = f'(a)h, \quad h \in \mathbb{R} \text{ je proměnná}$$

nazýváme *diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a*.

Poznámka. Poněvadž pro $y = x$ je $dx = h$, píšeme často dx místo h. Potom

$$df(a) = f'(a)dx.$$

Má-li funkce $y = f(x)$ derivaci na intervalu I, potom píšeme

$$df = f'(x)dx, \quad \text{resp.} \quad dy = f'(x)dx, \ x \in I. \tag{5.21}$$

Potom diferenciál dy je funkcí dvou proměnných: x, dx.

Vztah (5.21) lze přepsat jako podíl

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad x \in I. \tag{5.22}$$

Zde dx je diferenciál neodvisle proměnné x a dy je diferenciál odvisle proměnné y.

Na derivaci $f'(x)$ se můžeme dívat jako na podíl diferenciálu odvisle proměnné a neodvisle proměnné.

Ukažme, že pro dostatečně malé h je $\Delta f(a)$ rovno přibližně $df(a)$. Zaveďme $\tau(h)$ jako chybu aproximace $\Delta f(a)$ diferenciálem $df(a)$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \tau(h).$$

Dělíme-li tento výraz číslem h, dostáváme

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{\tau(h)}{h}.$$

Výpočtem limity levé i pravé strany v bodě $h = 0$ dostáváme

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Tedy

Pro malé h je $\Delta f(a)$ rovno přibližně $df(a)$:

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h.$$

Příklad 5.28. Určete diferenciál funkce $f(x) = \sin 2x$ v bodě $x = \frac{\pi}{8}$.

Řešení. V obecném bodě x je

$$df(x) = (\sin 2x)' \cdot dx.$$

Tedy $df(x) = 2\cos 2x \cdot dx$. V bodě $a = \frac{\pi}{8}$ pak platí

$$df\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) dx = \sqrt{2}dx.$$

Příklad 5.29. Určete přibližně $\sin(31°)$, víte-li, že $\sin(30°) = 0{,}5$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. Úhel $31°$ vyjádřený v obloukové míře je roven $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$. Položme $a = \frac{\pi}{6}$, $dx = \frac{\pi}{180}$. Potom

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}5 + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zabývejme se nyní aproximací funkce $f(x)$ polynomem stupně $n \geq 1$.

Taylorova věta

Taylorova věta

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x = a$ derivace až do řádu n včetně. Potom polynom v proměnné h

$$T_n(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \tag{5.23}$$

se nazývá *Taylorovým polynomem stupně n* příslušným k funkci $f(x)$ v bodě a.
Lehce se přesvědčíme, že polynom $T_n(x)$ a funkce $f(x)$ mají v bodě a stejnou funkční hodnotu a derivace až do řádu n včetně. Označíme-li $h = x - a$, dostáváme z (5.23)

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.24}$$

Příklad 5.30. Určete Taylorův polynom příslušný k funkci $f(x) = \sin x$ v bodě $a = 0$ pro $n = 5$.

Řešení. Zřejmě $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, $(\sin x)^{(5)} = \cos x$. Je tedy

$$T_5(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Lze tedy pro x blízká číslu $a = 0$ psát přibližný vztah

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Zabývejme se nyní otázkou, jaké chyby se dopouštíme, nahradíme-li funkci $f(x)$ polynomem $T_n(x)$. Odpověď dává tato věta.

Věta 5.22. (Taylorova věta)

Nechť funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu I derivace až do řádu $n+1$ včetně. Nechť $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}, \tag{5.25}$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom určený vztahem (5.24) a R_{n+1} je chyba aproximace, určená např. vztahem

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{5.26}$$

kde θ leží mezi body a, x.

Důkaz: Důkaz používá Rolleovu větu. Není obtížný, ale nebudeme jej však provádět. $\square$

Poznámka 1. R_{n+1} představuje chybu, které se dopustíme, aproximujeme-li hodnotu funkce f v bodě x hodnotou polynomu T_n v bodě x. Číslo θ, které zde vystupuje, není větou určeno. Pouze je uvedeno, že leží mezi body a, x. Jestliže platí odhad

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$$

pro všechna t z intervalu o koncových bodech a, x, lze psát

$$|R_{n+1}| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Poznámka. Specielně pro $a = 0$ dostáváme z (5.24)

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

a z (5.26)

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{kde } \theta \text{ leží mezi } 0 \text{ a } x.$$

Poněvadž případ $a = 0$ se často vyskytuje, uvádí se někdy pro $a = 0$ místo „Taylorova věta“ název „Maclaurinova věta“.

Taylorova a Maclaurinova řada

Předpokládejme, že a, x jsou dvě navzájem různá čísla a že funkce $f(x)$ má v uzavřeném intervalu I o koncových bodech a, x derivace všech řádů. Na intervalu I uvažujme řadu

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots . \tag{5.27}$$

Potom řada (5.27) je konvergentní a její součet je $f(x)$ na intervalu I, když a jenom když

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in I,$$

kde R_{n+1} je dáno vztahem (5.26).

Je-li tedy (5.27) konvergentní, lže psát

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots . \tag{5.28}$$

Řada (5.28) se nazývá Taylorova řada, resp. pro $a = 0$ se nazývá Maclaurinova řada.

Příklad 5.31. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $f(x) = e^x$.

Řešení. Pro každé n je $(e^x)^{(n)} = e^x$. Je tedy $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = e^0 = 1$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (5.27), obdržíme řadu

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{5.29}$$

Tato řada je absolutně konvergentní pro každé x. Skutečně, pro každé x jde o číselnou řadu. Aplikací limitního podílového kriteria obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Je tedy řada (5.29) absolutně konvergentní pro každé x. Tedy konverguje na intervalu $(-\infty, \infty)$. Lze tedy psát

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Jde o mocninnou řadu se středem konvergence $x_0 = 0$ a poloměrem konvergence $r = \infty$.

5.10 Shrnutí a úlohy

Shrnutí kapitoly

V kapitole je zaveden pojem lokálního extrému funkce $f(x)$ a absolutního extrému funkce (Definice 5.1, Definice 5.3). V kapitole se pojednává o jejich existenci a způsobu jejich nalezení.

V kapitole se uvádí důležitá věta „Věta o přírustku funkce“.

Ukazuje se též postup při hledání intervalů, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní. Dále se vyšetřuje konvexita a konkávnost funkcí. Zavádí se též pojem inflexního bodu funkce. Je uveden postup, jak je v jistých případech možno určit intervaly, na nichž je daná funkce konvexní, resp. konkávní. Je prezentovaná metodika hledání inflexních bodů dané funkce.

V kapitole se též pojednává o numerické metodě hledání kořene rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(a)f(b) < 0$.

V kapitole je pojednáno o zatím neřešeném případě výpočtu limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (L'Hôspitalovo pravidlo).

Jedna podkapitola je pak věnována vyšetřování průběhu funkce.

Poslední podkapitola pak pojednává o diferenciálu funkce $f(x)$ a o Taylorově větě.

Úlohy

1. Vysvětlete pojem lokálního extrému funkce $f(x)$ a popište způsob jeho hledání.

2. Vysvětlete pojem absolutního extrému funkce $f(x)$ na intervalu a způsob jeho hledání.

3. Vyslovte větu o přírustku funkce (neboli větu o střední hodnotě funkce).

4. Jak hledáme intervaly, na nichž je vyšetřovaná funkce monotónní?

5. Vysvětlete pojmy: funkce konvexní na intervalu, funkce konkávní na intervalu a pojem inflexního bodu. Jak se hledají intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní? Jak se hledají inflexní body funkce?

6. Popište metodu hledání kořenů rovnice $y = f(x)$ metodou půlení intervalu.

7. Vyslovte L'Hôspitalovo pravidlo.

8. Co je to diferenciál funkce? Uveďte definici a vysvětlete tento pojem na obrázku.

9. Vyslovte Taylorovu větu.

10. Určete body, v nichž má funkce $f(x) = 3x - |x-2| + |x+1|$ lokální extrémy. Danou funkci načrtněte.

11. Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
[klesá $(-\infty, \frac{5}{2}\rangle$, roste $\langle \frac{5}{2}, \infty)$, lok. min. v bodě $x = \frac{5}{2}$]

b) $f(x) = x \ln x$ [klesá $(0, \frac{1}{e}\rangle$, roste $\langle \frac{1}{e}, \infty)$, lok. min. $x = \frac{1}{e}$]

c) $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$
[roste $(-\infty, -3\rangle$, $\langle 1, \infty)$, klesá $\langle -3, -1)$, $(-1, 1\rangle$, lok. max. $x = -3$, lok. min. $x = 1$]

d) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ [klesá $(-\infty, -3)$, $(-3, \infty)$]

e) $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ [roste $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, klesá $\langle \frac{1}{3}, \infty)$, lok. max. $x = \frac{1}{3}$]

f) $f(x) = \sin 2x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
[roste $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle$, klesá $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\rangle$, $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, lok. min. v bodě $x = -\frac{\pi}{4}$, lok. max. v bodě $x = \frac{\pi}{4}$]

g) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ [roste $(0, e^2\rangle$, klesá $\langle e^2, \infty)$, lok. max. v bodě $x = e^2$]

h) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ [roste $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, lok. extrémy nemá]

i) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$
[roste $\langle 0, \frac{2}{\ln 2}\rangle$, klesá $(-\infty, 0\rangle$, $\langle \frac{2}{\ln 2}, \infty)$, lok. max. v bodě $x = \frac{2}{\ln 2}$, lok. min. v bodě $x = 0$]

j) $f(x) = x^2 + |x| - 1$
[Návod: $f(x) = x^2 + x - 1$ pro $x \geq 0$, $f(x) = x^2 - x - 1$ pro $x < 0$; roste $\langle 0, \infty)$, klesá $(-\infty, 0\rangle$, lok. min. pro $x = 0$]

12. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konvexní, intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ konkávní, a určete inflexní body.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

[konv. $\langle \frac{5}{3}, \infty)$, konk. $(-\infty, \frac{5}{3}\rangle$, infl. bod $x = \frac{5}{3}$]

b) $f(x) = (x+1)^4 + e^x$ [konv. $(-\infty, \infty)$, nemá infl. body]

c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ [konv. $\langle -1, 1\rangle$, konk. $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, \infty)$]

d) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ [konv. $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$, konk. $(0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$, infl. bod $x = e^{\frac{3}{2}}$]

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

[konk. $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konv. $\langle -\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \infty)$, infl. bod. $x = -\frac{1}{2}$]

13. Určete absolutní extrémy funkce $f(x)$ na daném intervalu.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \langle 0, 10\rangle$

[abs. min. v bodě $x = \frac{5}{2}$, abs. max. v bodě $x = 10$]

b) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},\ x \in (-1, 1)$ [abs. max. v bodě $x = 0$, abs. min. není]

c) $f(x) = \sin \frac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$

[abs. max. pro $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k2\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$, abs. min. pro $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$]

14. Určete asymptoty funkce.

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ [bez směrnice $x = -1$, v bodech $\pm\infty$: $y = 2x - 2$]

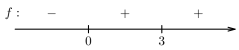
b) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ [bez směrnice $x = 2$, v bodech $\pm\infty$: $y = 3$]

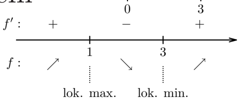
c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

[asymptoty bez směrnice nemá, $y = x$ v bodě ∞, $y = -x$ v bodě $-\infty$]

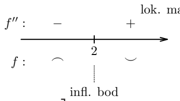
15. Vyšetřete průběh funkce.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

[$D_f = (-\infty, \infty)$, znamení 

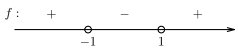
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, 

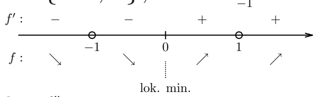
$f(1) = 4$, $f(3) = 0$,

$f''(x) = 6x - 12$, 

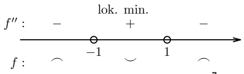
$f(x)$ nemá asymptoty]

b) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

[$D_f = (-\infty, \infty) - \{-1, 1\}$, 

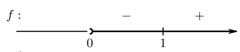
$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, 

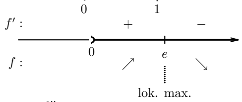
$f(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$, 

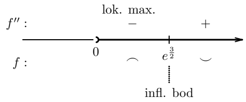
asymptoty: $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$]

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

[$D_f = (0, \infty)$, 

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 

$f(e) = \frac{1}{e}$

$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$, 

$\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, asymptoty: $x = 0$, $y = 0$]

16. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$ $[\infty]$

b) $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x^2}$ $[\infty]$

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1})$ $[\frac{1}{2}]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ $[0]$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$ $[\infty]$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ $[1]$

17. Nalezněte diferenciál funkce

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ v bodě $x = 2$ $[df = (3x^2 - 3)dx,\ df(2) = 9dx]$

b) $y = \sin 2x$ $[dy = 2\cos 2x dx]$

c) $y = \sqrt{x-1}$ $[dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx]$

18. Vypočítejte přibližně podle Taylorovy věty $\ln e^{2,1}$ pro $n = 1, 2, 3$. Odhadněte chybu.

19. Napište MacLaurinovu řadu funkce

a) $f(x) = \sin x$ $[\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,\ x \in (-\infty, \infty)]$

b) $f(x) = \cos x$ $[\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,\ x \in (-\infty, \infty)]$

c) $f(x) = \ln(1+x)$ $[\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,\ -1 < x \leq 1]$

20. Vytvořte tabulku, v níž vyznačíte funkční hodnoty funkcí $\sin x$, $T_5(x)$ v bodech $x \in \{\pm 0{,}1,\ \pm 0{,}2,\ \pm 0{,}3,\ \pm 0{,}4,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}6,\ \pm 0{,}7,\ \pm 0{,}8,\ \pm 0{,}9\}$.

- Primitivní funkce
- Metoda per partes (po částech).
- Výpočet neurčitého integrálu substitucí.
- Integrování racionálních lomených funkcí
- Shrnutí, úlohy

6. Neurčitý integrál

Cíl kapitoly

- Seznámit se s pojmy primitivní funkce, neurčitý integrál a s problematikou jejich existence.
- Naučit se neurčité integrály základních funkcí a integraci lineárních kombinací funkcí, jejichž neurčité integrály dovedeme určit.
- Zvládnout základní metody výpočtu neurčitých integrálů – metodu per partes a metodu substituční.
- Zvládnout integraci racionálních lomených funkcí.

Časová zátěž

- 10 hodin

Úvod.

V této kapitole se setkáte s novým pojmem – neurčitý integrál. S tímto pojmem jste se již asi setkali v předcházejícím studiu, avšak vzhledem k jeho závažnosti se nebudou předpokládat žádné předcházející znalosti. Jde o tento problém: Na daném intervalu nalézt k dané funkci $f(x)$ všechny funkce $F(x)$, pro něž platí $F'(x) = f(x)$. Množina všech takovýchto funkcí $F(x)$ k funkci $f(x)$ na daném intervalu se nazývá neurčitým integrálem z funkce $f(x)$. Tato úloha je poměrně složitá a její řešení vyžaduje často dosti důvtipu.

Znalost určení neurčitého integrálu je základem pro určení určitého integrálu a pro řešení vícerozměrných integrálů. Probírání těchto pojmů bude navazovat na tuto kapitolu. S integrály se setkáte v řadě aplikací, např. při řešení úloh statistickými metodami.

6.1 Primitivní funkce

V minulých kapitolách jsme se naučili derivovat. Nechť derivováním funkce $F(x)$ na intervalu I obdržíme funkci, kterou označíme $f(x)$. Potom tedy $F'(x) = f(x)$. Např. derivováním funkce $F(x) = x^3$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ obdržíme funkci $f(x) = 3x^2$. K funkci $F(x)$ přiřaďme nyní derivováním funkci $f(x) = F'(x)$. Symbolicky zapišme toto přiřazení takto:

$$F(x) \overrightarrow{deriv} f(x), \quad x \in I.$$

V různých situacích však jsme postaveni před úlohu opačnou. K dané funkci $f(x)$ se má na intervalu I, na němž je $f(x)$ definovaná, přiřadit taková funkce $F(x)$, že její derivací je funkce $f(x)$ (pokud existuje; je-li takových funkcí více, zvolit jednu z nich). Tedy k dané funkci $f(x)$ se má na intervalu I nalézt taková funkce $F(x)$, aby $F'(x) = f(x)$. Toto opačné přiřazení nazveme prozatimně *antiderivováním* a vyznačíme je takto

$$f(x) \overrightarrow{antideriv} F(x), \quad x \in I.$$

Je-li tedy např. $f(x) = \sin x$, potom k ní antiderivovámím přiřadíme na intervalu $(-\infty, \infty)$ např. funkci $F(x) = -\cos x$, neboť $(-\cos x)' = \sin x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Zatímco derivování funkcí je záležitost přímočará a poměrně jednoduchá, antiderivování je záležitost mnohem složitější. Zavedeme si nyní několik základních pojmů.

Co je to primitivní funkce

Definice 6.1. Zavedení pojmu primitivní funkce

Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou takové funkce na intervalu I, že $F'(x) = f(x)$ pro každý vnitřní bod intervalu I a jestliže jeho levý (pravý) koncový bod a patří do intervalu I, potom v něm platí $F'^{+}(a) = f(a)$ $(F'^{-}(a) = f(a))$. Pak říkáme, že funkce $F(x)$ je na intervalu I primitivní k funkci $f(x)$.

a) Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, \infty)$, neboť $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, \infty)$.
b) Funkce $F(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, neboť pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ platí $F'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

Poznámka 1. Jestliže funkce $F(x)$ je na intervalu I primitivní k funkci $f(x)$, potom má na něm derivaci, takže funkce $F(x)$ je na intervalu I spojitá.

Kdy existuje k funkci $f(x)$ funkce primitivní

Zabývejme se nyní otázkou, zda k dané funkci vždy existuje primitivní funkce a jestliže existuje, zda je určena jednoznačně. Ukazuje se, že *existují funkce, k nimž neexistuje funkce primitivní na uvažovaném intervalu.* Uveďme příklad takovéto funkce $f(x)$. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x \in (0, 1). \end{cases} \tag{6.1}$$

Předpokládejme, že k této funkci $f(x)$ existuje na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkce. Označme ji $F(x)$. Tento předpoklad vede ke sporu. Vypočítejme $F'^{+}(0)$. Výpočtem dostáváme postupně: $F'^{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x}$. Užitím věty o střední hodnotě diferenciálního počtu dostáváme $F'^{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F'(c)\,x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(c)\,x}{x} = 1$, kde c je vhodné číslo z intervalu $(0, x)$. Podobně dokážeme, že $F'^{-}(0) = -1$. Tedy $F'(0)$ neexistuje. Funkce $F(x)$ není tedy primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $(-1, 1)$, což je spor s předpokladem.

Existence primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I je však zaručena pro širokou třídu funkcí – pro funkce spojité na uvažovaném intervalu I. Platí totiž věta 6.1.

Poznámka 2. V dalším většinou budeme uvádět primitivní funkce na otevřených intervalech. Pokud budeme mluvit o primitivní funkci $F(x)$ na intervalu I, jehož levý (pravý) koncový bod a je jeho bodem, můžeme místo $F'^{+}(a)$ $(F'^{-}(a))$ používat zápis $F'(a)$.

Věta 6.1.

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I. Pak k ní na intervalu I existuje funkce primitivní.

Důkaz: Věta bude dokázána později. Viz věta 7.15. □

Ukažme, že spojitost funkce $f(x)$ na intervalu I není nutnou, ale je jen postačující podmínkou k existenci primitivní funkce $F(x)$ na intervalu I. Uveďme příklad funkce $f(x)$ nespojité na intervalu $(-1,1)$ a funkce k ní primitivní.

Uveďme příklad funkce $f(x)$, která sice není spojitá na $(-1,1)$, avšak přesto k ní existuje na intervalu $(-1,1)$ funkce primitivní. Jde o obtížnější příklad. Pokud Vám bude obtížný, není nutno jej znát. Musíte však vzít na vědomí, že existují funkce nespojité na $\langle a,b\rangle$, k nimž existuje primitivní funkce.

Příklad 6.1. Uvažujme funkci

$$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & \text{pro } x\in(-1,1), x\neq 0\\ 0 & \text{pro } x=0.\end{cases} \tag{6.2}$$

Tato funkce je v bodě $x=0$ nespojitá, neboť $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje; funkce $\sin\frac{1}{x}$ nabývá totiž v každém ryzím okolí bodu 0 všechny hodnoty z intervalu $\langle -1,1\rangle$.

Ukažme, že funkce

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{pro } x\in(-1,1),\ x\neq 0\\ 0 & \text{pro } x=0\end{cases}$$

je na intervalu $(-1,1)$ primitivní k funkci $f(x)$.

Řešení: Výpočtem dostáváme, že pro $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$ je

$$F'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}.$$

Vypočítejme nyní ještě derivaci funkce $F(x)$ v bodě 0. Z definice derivace funkce v daném bodě dostáváme postupně

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}.$$

Poněvadž pro $x\neq 0$ je $|x\cos(\frac{1}{x})|\leq |x|$, a $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, je $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x})=0$, takže $F'(0)=0$.

Dostali jsme tedy tento výsledek

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-1,1), x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Je tedy $F'(x) = f(x)$, takže funkce $F(x)$ je na intervalu $(-1,1)$ primitivní k funkci $f(x)$, která je nespojitá v bodě 0.

Počet primitivních funkcí

Nyní k otázce, kolik primitivních funkcí má daná funkce na intervalu I. Lehce nahlédneme, že je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I a c je libovolné číslo, pak $(F(x)+c)' = f(x)$, takže i funkce $F(x)+c$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I. Ukažme nyní následující vlastnost primitivních funkcí.

Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou dvě funkce primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I. Pak existuje číslo c tak, že $G(x) = F(x) + c$ na intervalu I.

Skutečně, položme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$. Jsou-li x_1, x_2 dva body z intervalu I, $x_1 < x_2$, potom podle věty o přírustku funkce je

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(\alpha)\cdot(x_2 - x_1) = 0\cdot(x_2 - x_1) = 0,$$

kde $\alpha \in (x_1, x_2)$. Je tedy $H(x_1) = H(x_2)$ a odtud $H(x) = \textit{konstanta}$. Označíme-li tuto konstantu c, je $F(x) = G(x) + c$ na intervalu I. □

Známe-li tedy jednu primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu I, známe všechny. Každá z nich se dá zapsat jako $F(x) + c$, kde c je vhodná konstanta. Pro množinu všech primitivních funkcí k dané funkci zavádíme zvláštní pojem – neurčitý integrál následující definicí.

Co je to neurčitý integrál

Definice 6.2. (Neurčitý integrál)

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu I a označujeme symbolem $\int f(x)\,dx$. Píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad x \in I,$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I. Funkci $f(x)$ nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem a dx je diferenciál neodvisle proměnné.

Poznámka. Úkon, kterým určujeme neurčitý integrál $F(x)+c$ k dané funkci $f(x)$, nazýváme *integrací či integrováním funkce* $f(x)$. Konstantu c nazýváme integrační konstantou. Kvůli zjednodušení *nebudeme někdy integrační konstantu zapisovat.*

Ze vzorců pro derivování funkcí lze snadno odvodit odpovídající vzorce pro integraci. Např. ze vztahu

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n, \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty), \; n \in \mathbb{N}$$

vyplývá, že

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \; n \in \mathbb{N}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Podobně víme, že

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Odtud dostáváme, že

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Uveďme nyní několik základních neurčitých integrálů, které vyplývají z dříve odvozených vzorců pro derivování. V uvedených vzorcích značí c integrační konstantu.

Tabulka význačných neurčitých integrálů

$$\int 0 \, dx = c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty);$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \begin{array}{l} x \in (-\infty, \infty) \text{ pro } \; n \geq 0, \text{ celé}, \\ \text{nebo } x \in (0, \infty), \; n < 0, n \neq -1, n \text{ celé}, \\ \text{nebo } x \in (-\infty, 0), \; n < 0 \text{ celé}, n \neq -1 \\ \text{nebo } x \in (0, \infty), \; n \text{ necelé}; \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty);$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty);$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty);$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty);$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad \text{pro } x \in (-1, 1);$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \qquad \begin{array}{l} \text{v libovolném otevřeném intervalu,} \\ \text{v němž je } \cos x \neq 0; \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c \qquad \text{v libovolném otevřeném intervalu, v němž je } \sin x \neq 0;$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c \qquad \text{v libovolném otevřeném intervalu, v němž je } f(x) \neq 0 \text{ a v němž má funkce } f(x) \text{ derivaci}$$

Důkaz: Důkaz plyne ze základních vzorců pro derivování. □

Příklad 6.2. Vypočtěte

$$\text{a)} \quad \int x^5\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Řešení:

$$\text{a)} \quad \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty),$$

$$\text{b)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-1/4}\,dx = \frac{4}{3}x^{3/4} + c \qquad \text{pro } x \in (0, \infty).$$

Poznámka. Derivací pravé strany se přesvědčte o platnosti následujících vztahů :

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty),\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty),\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

$$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + c \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty),\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1 + k^2x^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg} kx + c \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty),\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2x^2}} = \frac{1}{k}\arcsin kx + c \quad \text{pro } kx \in (-1, 1),\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

Ukážeme si nyní několik vět, které nám umožní hledat integrály některých funkcí vytvořených pomocí funkcí, jejichž integrály známe.

Integrace lineární kombinace funkcí

Věta 6.2. (Integrace lineární kombinace funkcí)

Buď I interval, v němž existují neurčité integrály funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$. Buďte c_1, $c_2, \ldots,$ c_n reálná čísla. Potom existuje v intervalu I neurčitý integrál funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ a platí

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x))\, dx =$$
$$= c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx + \qquad (6.3)$$
$$+ \cdots + c_n \int f_n(x)\, dx + c,$$

kde c je integrační konstanta.

Důkaz: Položme $F_i(x) = \int f_i(x)\, dx$, $x \in I$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Podle známých vět z diferenciálního počtu platí

$$(c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_n F_n(x))' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x).$$

Tedy funkce $c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_n F_n(x)$ je v intervalu I primitivní k funkci $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$. Platí tedy (6.3). □

Příklad 6.3. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int (x^4 + \sqrt{x} - \cos 2x + 1)\, dx,$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{1 + 2x^2} + \frac{3}{2x} + 5e^{x/2} \right) dx.$

Řešení: Integrací člen po členu podle předešlé věty dostáváme

a) $$\int (x^4 + \sqrt{x} - \cos 2x + 1)\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}\sin 2x + x + c,$$
$$x \in \langle 0, \infty)$$

b) $$\int \left(\frac{2}{1 + 2x^2} + \frac{3}{2x} + 5e^{x/2} \right) dx = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}\ln|x| +$$
$$+ 5 \cdot 2e^{x/2} + c = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}\ln|x| + 10e^{x/2} + c,\ x \in I, 0 \neq I.$$

Poznámka. K výpočtu neurčitých integrálů některých funkcí je někdy vhodné integrované funkce přepsat na jiný ekvivalentní tvar.

Jako příklad uveďme výpočet těchto integrálů.

$$a) \int \cos^2 x\, dx, \qquad b) \int \sin^2 x\, dx, \qquad c) \int \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

V případech a), b) použijeme k úpravě trigonometrické vzorce

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

čímž dostaneme funkce, jejichž integrál lze spočítat pomocí předchozích vět takto.

a) $$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+c;\ \ x\in(-\infty,\infty)$$

b) $$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+c,\ \ x\in(-\infty,\infty).$$

c) V tomto případě převedeme integrand na součet dvou zlomků. Postupně dostáváme

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x + c, \quad x\in(-\infty,\infty).$$

6.2 Metoda per partes (po částech).

Poměrně jednoduchou metodou pro výpočet neurčitých integrálů je v některých případech *metoda per partes.*

Metoda per partes

Věta 6.3. (Integrace per partes)

Buď I interval. Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v interalu I spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$. Potom v intervalu I platí

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Důkaz: Funkce $u(x)v(x)$ má v intervalu I derivaci $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, a tedy platí

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,dx.$$

Funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou v intervalu I spojité, neboť zde mají derivace. Tedy funkce $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ jsou také spojité v intervalu I a existují k nim proto primitivní funkce

$$\int u'(x)v(x)\,dx, \qquad \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Podle věty 6.2 tedy platí

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

a odtud plyne tvrzení věty. □

Příklad 6.4. Následující integrály jsou řešeny metodou per partes. Ověření splnění předpokladů pro aplikaci naznačeného postupu výpočtu přenechávám čtenáři.

a) $$\int x e^{2x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = e^{2x} & v = x \\ u = \frac{1}{2}e^{2x} & v' = 1 \end{array}\right| = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c, \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

b) $$\int x^2 \cos 3x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \cos 3x & v = x^2 \\ u = \frac{1}{3}\sin 3x & v' = 2x \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\int x \sin 3x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sin 3x & v = x \\ u = -\frac{1}{3}\cos 3x & v' = 1 \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{9}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + c, \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

c) $$\int x \ln^2 x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = x & v = \ln^2 x \\ u = \frac{1}{2}x^2 & v' = \frac{2}{x}\ln x \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x \ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = x & v = \ln x \\ u = \frac{1}{2}x^2 & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + c,$$
pro $x \in (0, \infty)$.

d) $$\int e^x \sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = e^x & v = \sin x \\ u = e^x & v' = \cos x \end{array}\right| =$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = e^x & v = \cos x \\ u = e^x & v' = -\sin x \end{array}\right| =$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx.$$
Dostali jsme rovnici
$$\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx,$$
ve které hledaný integrál je neznámou, jejím řešením dostáváme
$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c, \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

e) $$\int \ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\,dx =$$
$$x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x + c = x\,(\ln x - 1) + c, \quad \text{pro} \quad x \in (0, \infty).$$

Poznámka. Jak je patrné z předchozího příkladu, je metoda integrace per partes vhodná zejména pro řešení některých neurčitých integrálů, jejichž integrand je tvořen součinem dvou různých funkcí. Touto metodou lze řešit např. integrály těchto typu:

$$\int x^m e^{kx}\,dx, \qquad \int x^m \cos kx\,dx, \qquad \int x^m \sin kx\,dx,$$

$$\int x^k (\ln x)^m\,dx, \qquad \int e^{kx} \sin lx\,dx, \qquad \int e^{kx} \cos lx\,dx,$$

kde m je přirozené, k, l libovolná reálná čísla.

Při aplikaci metody per partes je nutno si uvědomit, že každou funkci můžeme považovat za součin této funkce a funkce rovné 1 pro všechna x; viz případ e) v minulém příkladě nebo $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

6.3 Výpočet neurčitého integrálu substitucí.

Výklad další metody, zvané *substituční metoda*, začneme bez nároku na preciznost. Zpřesnění bude následovat. Substituční metody

Uvažujme integrál

$$\int f(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Nechť $x = \varphi(t)$ je funkce proměnné t, mající derivaci $\varphi'(t)$. Víme, že diferenciál funkce $\varphi(t)$ je roven součinu derivace této funkce a diferenciálu její neodvisle proměnné t. Tedy $dx = \varphi'(t)\,dt$. Dosadíme-li do (6.4) za x a dx, dostáváme

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{6.5}$$

Budeme řešit otázku, jak mezi sebou souvisí neurčité integrály (6.4), (6.5). Dovedeme-li vypočítat jeden z nich, dovedeme určit druhý z nich? Odpověď na tuto otázku dávají následující dvě věty.

metoda substituční I

Věta 6.4. (I. výpočet integrálu substitucí)

Nechť $F(x)$, $x \in J$, je primitivní funkce k funkci $f(x)$, $x \in J$, na intervalu J.
Nechť funkce

$$x = \varphi(t), \quad t \in I,$$

má na intervalu I derivaci $\varphi'(t)$ a nechť $\varphi(I) \subset J$.
Potom na intervalu I existuje $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ a platí na něm

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=\varphi(t)} + c = F(\varphi(t)) + c, \qquad t \in I. \tag{6.6}$$

Poznámka. Jde o výpočet integrálu ze složené funkce $f(\varphi(t))$, násobené funkcí $\varphi'(t)$, tedy derivací vnitřní složky této složené funkce.

Vztah (6.6) si snadno zapamatujete. Položme $\varphi(t) = x$. Diferenciál levé strany tohoto vztahu je roven diferenciálu jeho pravé strany. Tedy

$$\varphi'(t)\,dt = dx.$$

Dosadíme-li tedy do integrálu

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$\varphi(t)$ za x, a $\varphi'(t)\,dt$ za dx dostáváme

$$\int f(x)\,dx.$$

Věta nám říká, že dovedeme-li vypočítat $\int f(x)\,dx$, potom *za ve větě uvedených podmínek* dovedeme vypočítat i $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ a platí (6.6), to jest

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=\varphi(t)}.$$

Důkaz: Derivací funkce $F(\varphi(t))$, jakožto složené funkce, postupně dostáváme pro $t \in I$.

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

takže $[F(\varphi(t))]$ je pro $t \in I$ primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Je tedy

$$F(\varphi(t)) = \left[\int f(x)dt\right]_{x=\varphi(t)}, \quad t \in I,$$

takže $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=\varphi(t)}$, $t \in I$. $\square$

Příklad 6.5. Vypočítejte

$$A = \int e^{t^2} t\,dt.$$

Řešení. Máme nalézt integrál ze složené funkce e^{t^2}, násobené, až na multiplikativní konstantu, derivací funkce t^2 tj. derivací vnitřní složky složené funkce e^{t^2}. Zvolíme tedy substituci

$$x = t^2.$$

Je to funkce se spojitou derivací $2t$ na intervalu$(-\infty, \infty)$. Funkce $x = t^2$ zobrazuje interval $I = (-\infty, \infty)$ na interval $J = \langle 0, \infty) \subset (-\infty, \infty)$, na němž je funkce e^x spojitá. Diferenciálem funkce $x = t^2$ je

$$dx = 2t\,dt.$$

Odtud $t\,dt = \frac{1}{2}\,dx$. Jsou tedy splněny předpoklady věty 6.4. Platí

$$A = \int e^{t^2} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\int e^x\,dx\right]_{x=t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2}, \quad \text{pro } t \in (-\infty, \infty).$$

Derivováním obdrženého výsledku (jako zkoušku správnosti výsledku) dostáváme

$$\frac{1}{2}(e^{t^2})' = t\,e^{t^2}, \quad \text{pro } t \in (-\infty, \infty).$$

Tím jsme se přesvědčili o správnosti výpočtu.

Poznámka. *Označení proměnné v integrálu je nepodstatné.* Nenechte se zmást změněným označením v následujícím příkladě.

Příklad 6.6. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$B = \int x\sqrt{x^2+1}\,dx \tag{6.7}$$

Řešení. Všimněte si, že $\sqrt{x^2+1}$ je složená funkce, její vnitřní složkou je funkce x^2+1. Zřejmě $(x^2+1)' = 2x$. Tedy $x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)'\sqrt{x^2+1}$. Zvolme tedy

$$t = \varphi(x), \quad \text{kde } \varphi(x) = x^2+1.$$

Tato funkce je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a má v něm derivaci. Dále zobrazuje interval $(-\infty, \infty)$ na interval $\langle 1, \infty) \subset (0, \infty)$. Položme $f(t) = \sqrt{t}$. Tato funkce je spojitá na intervalu $(0, \infty)$ a má na něm tedy primitivní funkci. Podle věty 6.4 tedy dostáváme

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt\right]_{t=x^2+1}, \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Výpočtem dostáváme

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}, \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

formální výpočet $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Při aplikaci věty 6.4 k výpočtu integrálu $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ může být někomu obtížné zjišťování splnění předpokladů věty 6.4. Chceme-li se vyhnout zkoumání splnění předpokladů věty 6.4, lze postupovat zcela formálně, ale nakonec je nutno derivováním výsledek prověřit, zda výsledná funkce je skutečně primitivní funkcí a je nutno zjistit i interval, na němž je obdržená funkce primitivní k dané funkci. Lze tedy postupovat následovně, ovšem za předpokladu, že jednotlivé kroky lze provést.

Máme vypočítat $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

- *Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.*
- *Vypočítáme $dx = \varphi'(t)\,dt$ (diferenciál levé strany substituce se rovná diferenciálu její pravé strany).*
- *Dosazením do daného integrálu za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)\,dt$, dostaneme $\int f(x)\,dx$.*
- *Výpočtem dostaneme $F(x) = \int f(x)\,dx$.*
- *Provedeme zkoušku derivováním; zjistíme, zda*

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{6.8}$$

  a určíme interval I, na němž platí (6.8).
- *Jestliže (6.8) platí na intervalu I, potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in I.$$

Příklad 6.7. Vypočítejte

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt.$$

Řešení. Zaveďme substituci $x = t^2 + 4$. Potom $dx = 2t\,dt$. Dosazením do daného integrálu obdržíme

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Jeho řešením dostáváme $F(x) = \frac{1}{2}2\sqrt{x}$. Tedy

$$F(\varphi(t)) = \sqrt{t^2+4}.$$

Derivací $\sqrt{t^2+4}$ dostáváme

$$\left(\sqrt{t^2+4}\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \quad \text{pro} \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Tedy

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt = \sqrt{t^2+4} + c \quad \text{pro} \quad t \in (-\infty, \infty).$$

metoda substituční II

Věta 6.5. (II. Výpočet integrálu substitucí)

Nechť funkce

$$x = \varphi(t)$$

má na intervalu I spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a nechť $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechny vnitřní body intervalu I. Nechť $\varphi(I) = J$. (Potom existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$ zobrazující interval J na I.) Nechť

$$f(x), \quad x \in J,$$

je taková funkce na intervalu J, že složená funkce

$$f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I,$$

má na intervalu I primitivní funkci, označme ji $G(t)$. Potom existuje $\int f(x)\,dx$, $x \in J$ a platí

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} + c, \tag{6.9}$$

tj.

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Důkaz: Dokažme (6.9). Nechť funkce $G(t)$ je primitivní k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu I. Vzhledem k předpokladům je funkce $\varphi(t)$ ryze monotónní, existuje k ní tedy funkce inverzní $t = \varphi^{-1}(x)$. Derivujeme-li pravou stranu v (6.9), to jest funkci $G(\varphi^{-1}(x))$ podle věty o derivování složené funkce, dostáváme na intervalu J postupně:

$$[G(\varphi^{-1}(x))]' = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = G'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$$
$$= f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

takže $G(\varphi^{-1}(x))]$ je pro $x \in J$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Je tedy

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} + c. \qquad \square$$

Věta ovšem nic nevypovídá o nalezení vhodné substituce. Pro jisté třídy funkcí jsou v literatuře popsané vhodné substituce.

Poněvadž podle předpokladů věty je funkce $\varphi\,(t)$ ryze monotónní na intervalu I, vychází se někdy místo substituce $x = \varphi(t)$ z ekvivalentu $t = \varphi^{-1}(x)$, resp. z jiného ekvivalentu $\phi(x) = \psi(t)$. Tento zápis totiž často lépe vyjadřuje záměry, které substitucí sledujeme. *Při řešení konkrétních integrálů se může stát, že se zvolí nevhodná substituce a integrál je nutno řešit jinak.*

Příklad 6.8. Určete

$$A = \int \sqrt{3x+1}dx.$$

Řešení. Především je vidět, že integrand je funkce spojitá na svém definičním oboru. Budeme tedy úlohu řešit na intervalu $J = (-\frac{1}{3}, \infty)$, tedy $x \in J$. Daný integrál budeme řešit zavedením vhodné substituce. Jak ji zvolíme? Dovedeme nalézt $\int \sqrt{t}\,dt$, který je podobný k danému integrálu. To nás vede k pokusu zavést mezi proměnnými t, x vztah $t = 3x+1$, což je ekvivalentní se vztahem $x = \frac{1}{3}(t-1)$. Jestliže $x \in J$, potom t, vyhovující tomuto vztahu, patří do intervalu $I = (0, \infty)$, $t \in I$. Pokusíme se tedy zavést substituci $x = \varphi(t) = \frac{1}{3}(t-1)$ pro $t \in I$. Funkce $\varphi(t)$ má na intervalu I spojitou kladnou derivaci $\varphi'(t) = \frac{1}{3}$. Zřejmě $\varphi(I) = J$ a $dx = \frac{1}{3}\,dt$. Podle nahoře uvedené věty je tedy

$$A = \int \sqrt{3x+1}\,dx = \left[\int \sqrt{t}\frac{1}{3}\,dt\right]_{t=3x+1} = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c,\ x \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Příklad 6.9. Vypočítejte

$$A = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \quad a > 0, \quad x \in (-a, a).$$

Řešení. Označme $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Tato funkce je na intervalu $(-a, a)$ spojitá, takže v něm k dané funkci existuje primitivní funkce. Integrál se pokusíme řešit vhodnou substitucí $x = \varphi(t)$. Ale jak zvolit $x = \varphi(t)$? Pokusíme se zavést takovou substituci $x = \varphi(t)$, abychom po dosazení $x = \varphi(t)$ do $\sqrt{a^2 - x^2}$ dostali výraz bez odmocniny. To nás vede k pokusu zvolit substituci

$$x = \varphi(t) = a \sin t, \quad \text{pro} \quad t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkce $\varphi(t)$ zobrazuje interval I na interval $J = (-a, a)$. Její derivací je funkce $\varphi'(t) = a \cos t$. Funkce $\varphi'(t) = a \cos t$ je spojitá a kladná na intervalu I. Existuje proto k ní funkce inverzní $t = \arcsin \frac{x}{a}$, která zobrazuje interval $J = (-a, a)$ na interval $I = -(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Podle věty 6.5 o substituci dostáváme

$$A = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t\,dt\right]_{t=\arcsin\frac{x}{a}}$$

Odtud

$$A = a^2 \int \left[\sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\,dt\right]_{t=\arcsin\frac{x}{a}} = \left[a^2 \int\ |\cos t|\ \cos t\,dt\right]_{t=\arcsin\frac{x}{a}}.$$

Poněvadž pro $t \in I$ je $\cos t > 0$, dostáváme

$$A = \left[a^2 \int \cos^2 t\, dt\right]_{t=\arcsin \frac{x}{a}} = \frac{a^2}{2}\left[\int (1+\cos 2t) dt\right]_{t=\arcsin \frac{x}{a}} =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=\arcsin \frac{x}{a}} + c$$

Teď bychom mohli dosadit zpětnou substituci $t = \arcsin \frac{x}{a}$. Abychom si zjednodušili výpočet, vyjádříme $\sin 2t$ jako $\sin 2t = 2\sin t \cos t$. Ze substituce $x = a \sin t$ vyplývá $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, takže

$$A = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

Po malé úpravě tedy dostáváme

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c, \quad \text{v intervalu } (-a, a).$$

Proveďte si zkoušku správnosti výpočtu.

Vraťme se znovu k příkladu 6.5. Stejný příklad budeme řešit nyní ještě jednou, ale trochu odlišnou metodou. Výsledek nebude tak uspokojující. Tento způsob řešení uvádíme, abychom upozornili na některé problémy se substituční metodou. Tedy řešme znovu tento příklad.

Příklad 6.10. Vypočítejte

$$\int x\, e^{x^2}\, dx. \tag{6.10}$$

Řešení. K výpočtu použijeme větu 6.5. Integrand, funkce $x\, e^{x^2}$, je spojitá funkce na intervalu $(-\infty, \infty)$ a tedy na intervalu $(-\infty, \infty)$ existuje k ní primitivní funkce. Pokusíme se zavést takovou substituci, aby v integrálu, vytvořeném substitucí $x = \varphi(t)$, bylo „e^{x^2}“ nahrazeno „e^t“. To nás vede k vyšetření, zda by nebylo možno zavést substituci $x^2 = t$. Tedy zavést jednu ze substitucí

$$\boldsymbol{\alpha})\ x = \sqrt{t}, \qquad \boldsymbol{\beta})\ x = -\sqrt{t}, \qquad t \in (0, \infty) = I.$$

$\boldsymbol{\alpha}$) Uvažujme substituci $x = \sqrt{t} = \varphi(t)$. Zřejmě funkce $\varphi(t)$ zobrazuje interval $I = (0, \infty)$ na interval $J = (0, \infty)$. Funkce $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ je na intervalu I spojitá a je kladná. Proto k funkci $\varphi(t)$ existuje funkce inverzní $t = \varphi^{-1}(x) = x^2$. Jsou splněny předpoklady věty 6.5. Podle této věty dostáváme

$$\int xe^{x^2}\, dx = \left[\int \sqrt{t} e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt\right]_{t=x^2} = \left[\frac{1}{2}\int e^t\, dt\right]_{t=x^2} + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

pro $x \in J = (0, \infty)$.

***β*)** Uvažujme substituci $x = -\sqrt{t} = \varphi(t)$. Zřejmě funkce $\varphi(t)$ zobrazuje interval $I = (0, \infty)$ na interval $J = (-\infty, 0)$. Funkce $\varphi'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$ je na intervalu I spojitá a je na něm záporná. K funkci $\varphi(t)$ existuje tedy funkce inverzní. Dostáváme $\varphi^{-1}(t) = x^2,\ t \in I,\ x \in J$. Jsou splněny předpoklady věty 6.5. Podle této věty dostáváme na intervalu J

$$\int xe^{x^2}\,dx = \left[\int (-\sqrt{t})e^t(-\frac{1}{2\sqrt{t}})\,dt\right]_{t=x^2} = \left[\frac{1}{2}\int e^t\,dt\right]_{t=x^2} + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

pro $x \in J = (-\infty, 0)$.

Dospěli jsme tímto způsobem k tomuto výsledku

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \ \text{ v každém intervalu, který neobsashuje } 0\ .$$

Derivováním funkce $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ zjistíme, že tato funkce je primitivní v každém intervalu, tedy i v intervalu, který obsahuje 0.

Ve větě o výpočtu integrálu substitucí jsou uvedené postačující podmínky a ne nutné.

Přikročíme-li k výpočtu integrálu substitucí podle věty 6.5 bez kontroly předpokladů věty, je možno výpočet $A = \int f(x)\,dx$ provádět následovně. (Předpokládá se, že jednotlivé kroky je možno provést.)

Formální výpočet $\int f(x)\,dx$

Máme vypočítat $A = \int f(x)\,dx$.

- *Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.*
- *Vypočítáme $dx = \varphi'(t)$ a formálním dosazením do daného integrálu A dostaneme integrál $B = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$*
- *Vypočítáme integrál B.*
- *Do integrálu B dosadíme $t = \varphi^{-1}(x)$. Dostaneme tak funkci, označme ji $F(x)$.*
- *Funkci $F(x)$ zderivujeme. Je-li J interval, na němž integrál A existuje a je-li na něm $F'(x) = f(x)$, dospěli jsme ke správnému úplnému řešení. Jestliže jsme nedospěli k tomuto závěru, je nutno provádět hlubší rozbory.*

6.4 Integrování racionálních lomených funkcí

Dříve, než přistoupíme k popisu metody integrace racionální lomené funkce, ukážeme si, jak lze racionální lomenou funkci přepsat do tvaru vhodného pro integraci. Jde o její vyjádření ve tvaru součtu polynomu a tzv. parciálních zlomků. Začneme s rozkladem polynomu.

6.4.1 Polynom a jeho rozklad

O polynomu a jeho rozkladu bylo pojednáno v učebním textu „Matematika A“. Stručně uveďme závěry z tohoto pojednání.

co je to polynom

Nechť $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou komplexní čísla. Jestliže ke každému komplexnímu číslu $x \in \mathbb{C}$ přiřadíme číslo $f(x)$ vztahem

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{6.11}$$

je jím definována komplexní funkce na množině všech komplexních čísel $\mathbb{C}$. Tato funkce se nazývá polynom. *Čísla $a_n, \dots, a_0$ nazýváme koeficienty polynomu $f(x)$. Číslo a_0 nazýváme absolutním členem polynomu $f(x)$. Jestliže $a_n \neq 0$, polynom $f(x)$ nazýváme polynomem n-tého stupně.*

Např. $f(x) = x^2 + 1$ je polynom 2. stupně. Podle definice stupně polynomu není polynomu $f(x) \equiv 0$ přiřazen žádný stupeň. Nazýváme jej *nulovým polynomem*.

kořen polynomu

Číslo α nazýváme kořenem polynomu $f(x)$, jestliže

$$f(\alpha) = 0.$$

Znamená to, že každý kořen polynomu $f(x)$ je řešením rovnice

$$f(x) = 0.$$

Např. polynom

$$P(x) = x^3 + x \tag{6.12}$$

má kořeny $0, i, -i$, neboť $P(0) = 0$, $P(i) = i^3 + i = 0$. Podobně $P(-i) = (-i)^3 + (-i) = 0$.

Nechť α je kořenem polynomu $f(x)$ stupně $n \geq 1$. Potom existuje takový polynom $g(x)$ stupně $n-1$, že pro každé komplexní číslo x platí

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x). \tag{6.13}$$

Faktor $(x - \alpha)$ nazýváme kořenovým činitelem příslušným ke kořenu α.

Známe-li kořen α polynomu $f(x)$, obdržíme polynom $g(x)$ dělením polynomu $f(x)$ kořenovým činitelem $(x-\alpha)$. (Jestliže dělení polynomu $f(x)$ polynomem $(x-\alpha)$ nevyjde beze zbytku, není α kořenem polynomu $f(x)$!)

Příklad 6.11. Uvažujme polynom

$$f(x) = x^3 + 2x - 12. \tag{6.14}$$

Dosadíme-li $x = 2$ do (6.14), vidíme, že $f(2) = 0$. Je tedy $x = 2$ kořenem polynomu (6.14).

Dělením polynomu $f(x)$ kořenovým činitelem $x - 2$ dostáváme

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & & +2x & -12\,) & : (x-2) = x^2 + 2x + 6 \\
\pm x^3 & \mp 2x^2 & & & \\ \hline
& 2x^2 & +2x & -12 & \\
& \pm 2x^2 & \mp 4x & & \\ \cline{2-4}
& & 6x & -12 & \\
& & \pm 6x & \mp 12 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Je tedy

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)g(x),$$

kde $g(x) = x^2 + 2x + 6$, takže

$$x^3 + 2x - 12 = (x-2)(x^2 + 2x + 6).$$

k-násobný kořen polynomu

k-násobný kořen polynomu Nechť $f(x)$ je polynom n-tého stupně a α je jeho kořen. Potom existuje polynom ${}^1g(x)$ stupně $n-1$ tak, že

$$f(x) = (x-\alpha)\cdot {}^1g_{n-1}(x). \tag{6.15}$$

Jestliže α je kořenem polynomu ${}^1g_{n-1}(x)$, existuje polynom ${}^2g_{n-2}(x)$ tak, že

$${}^1g_{n-1}(x) = (x-\alpha)\cdot {}^2g_{n-2}(x). \tag{6.16}$$

Dosadíme-li ${}^1g_{n-1}(x)$ do (6.15), dostáváme

$$f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot {}^2g_{n-2}(x).$$

Jestli α je kořenem polynomu ${}^2g_{n-2}(x)$, pokračujeme dále. Nakonec po k krocích dospějeme k tomuto vyjádření polynomu $f(x)$

$$f(x) = (x-\alpha)^k \cdot {}^kg_{n-k}(x),$$

kde ${}^kg_{n-k}(x)$ je polynom, který nemá číslo α za svůj kořen.

Říkáme, že číslo α je *k–násobným kořenem polynomu* $f(x)$, jestliže pro každé komplexní číslo x platí

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x), \tag{6.17}$$

kde $g(x)$ je takový polynom, že $g(\alpha) \neq 0$.

Příklad 6.12. Polynom $x^3 - 3x^2 + 4$ lze zapsat ve tvaru

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1).$$

Číslo $x = 2$ není kořenem polynomu $g(x) = x + 1$, neboť $g(2) \neq 0$. Je tedy $x = 2$ dvojnásobným kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 4$. Podobně, $x = -1$ je jednoduchým kořenem polynomu $f(x)$.

Zatím jsme pouze zavedli pojem kořene polynomu, ale nezabývali jsme se problémem existence kořene polynomu. O tom vypovídá následující věta:

existence kořene polynomu

Věta 6.6. (Fundamentální věta algebry)

Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel kořen.

Důkaz: Bez důkazu. $\square$

Z předcházejících úvah a z věty 6.6 vyplývá následující důsledek.

Důsledek. *Polynom n–tého stupně*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

má právě n kořenů, počítáme-li k–násobný kořen za k kořenů.

Věta 6.6 vypovídá o existenci kořene polynomu, ale neudává metodu, jak kořeny polynomu $f(x)$ n–tého stupně určit.

Kořeny polynomu 1. a 2. stupně

hledání kořenů polynomu

Polynom 1. stupně

$$P_1(x) = a_1 x + a_2, \quad a_1 \neq 0$$

má právě jeden kořen, jak se můžeme lehce přesvědčit, a to

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Polynom 2. stupně

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2 \neq 0 \tag{6.18}$$

má dva kořeny, počítáme-li dvojnásobný kořen za dva kořeny. Jsou to řešení kvadratické rovnice

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{6.19}$$

Tato rovnice má dva kořeny, označme je x_1, x_2, počítáme-li dvojnásobný kořen za dva kořeny. Tyto kořeny x_1, x_2 lze určit podle vzorců

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}. \tag{6.20}$$

Číslo $D = a_2^2 - 4a_2a_0$ nyzýváme diskriminantem rovnice (6.19). Čísla x_1, x_2 jsou kořeny polynomu $P_2(x)$ určeného vztahem (6.18).

Kořeny polynomů stupňů > 2

V učebním textu „Matematika A“ jsme uvedli, že existují výpočtové postupy, jimiž lze určit všechny kořeny obecného polynomu třetího i čtvrtého stupně konečným počtem operací sečítání, odečítání, násobení, dělení a odmocňování. Tedy tak, jak je to u polynomů 2. stupně. Je však dokázáno, že takovéto výpočetní postupy neexistují pro polynomy stupňů > 4. Avšak uvedené výpočtové postupy pro polynomy třetího a čtvrtého stupně dávají často výsledky v nevhodném tvaru. Proto se většinou nepoužívají.

V některých konkrétních případech se nám podaří kořeny nalézt vzhledem ke speciálnímu zadání polynomu, nebo nalezením několika kořenů zkusmo a pak dělením polynomu součinem kořenových činitelů k nalezeným kořenům převést úlohu na úlohu nalezení kořenů polynomu nižšího stupně. Někdy je možno načrtnout alespoň část grafu polynomu a tím se vést při hledání kořenů polynomu.

Existuje řada numerických metod na hledání přibližných hodnot kořenů polynomů. Těmto metodám se nemůžeme vzhledem k našim časovým možnostem věnovat. Jsou implementované v řadě programových systémů.

Nejčastěji je třeba určit kořeny polynomů, jejichž koeficienty jsou reálná čísla.

Polynom s reálnými koeficienty budeme nazývat reálným polynomem.
Je-li $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ k-násobným kořenem reálného polynomu

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n+1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{6.21}$$

je též číslo $\alpha - i\beta$ jeho k-násobným kořenem.

Předpokládejme, že reálný polynom $f(x)$ má k-násobné komplexně sdružené kořeny $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Potom polynom $f(x)$ lze dělit součinem kořenových činitelů

$$d(x) = \Big\{[x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)]\Big\}^k. \tag{6.22}$$

Úpravou $d(x)$ dostáváme

$$\begin{aligned} d(x) &= \Big\{[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]\Big\}^k \\ &= \Big\{(x-\alpha)^2+\beta^2\Big\}^k. \end{aligned}$$

Tedy

$$d(x) = (x^2+px+q)^k, \quad \text{kde} \quad p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2.$$

Potom je $f(x) = d(x)g_{n-2k}(x)$. Dále pak hledáme kořeny polynomu $g_{n-2k}(x)$.

Z toho, co jsme o kořenech polynomu uvedli, lze dospět k tomuto tvrzení.

reálný rozklad polynomu

Nechť

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

je reálný polynom. Nechť $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny a to α k–násobný, β l–násobný, … , γ m–násobný. Nechť $a \pm ib, \ldots, c \pm id$ jsou všechny jeho navzájem různé dvojice nereálných komplexně sdružených kořenů. Nechť $a+ib$ je p–násobný,…, $c+id$ je q–násobný kořen. Potom platí

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot (x-\alpha)^k \cdot (x-\beta)^l \cdot \cdots \cdot (x-\gamma)^m \cdot \\ &\quad \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \cdot \cdots \cdot [(x-c)^2+d^2]^q. \quad (6.23) \end{aligned}$$

pro každé komplexní číslo x.
Polynom $f(x)$ zapsaný ve tvaru (6.23) nazýváme rozkladem reálného polynomu v reálném oboru.

Příklad 6.13. Určete rozklad reálného polynomu

$$p(x) = x^5 + 6x^4 + 9x^3 + x^2 + 6x + 9.$$

Řešení. Zkusmo zjistíme, že $x=-3$ je kořenem polynomu $p(x)$. Dělením polynomu $p(x)$ výrazem $(x+3)$ dostáváme

$$q(x) = p(x) : (x+3) = x^4 + 3x^3 + x + 3.$$

Zkusmo zjistíme, že $x=-3$ je kořenem polynomu $q(x)$. Dělením polynomu $q(x)$ výrazem $x+3$ dostáváme

$$q(x) = (x+3)(x^3+1).$$

Tedy

$$p(x) = (x+3)^2(x^3+1).$$

Polynom x^3+1 zapišme ve tvaru x^3+1^3. Podle vzorce $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ dostáváme

$$x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1).$$

Tedy

$$p(x)=(x+3)^2(x+1)(x^2-x+1)$$

je reálný rozklad polynomu $p(x)$.

Příklad 6.14. Určete kořeny polynomu

$$p(x)=x^4+4x^3-16x-16.$$

Řešení. Zkusmo zjistíme, že číslo $x=2$ je kořenem polynomu $p(x)$, neboť $p(2)=0$. Dělením $p(x)$ kořenovým činitelem $x-2$ dostáváme

$$q(x)=p(x):(x-2)=x^3+6x^2+12x+8.$$

Tedy

$$p(x)=(x-2)(x^3+6x^2+12x+8).$$

Číslo $x=-2$ je kořenem polynomu $q(x)$. Dělením $q(x)$ polynomem $(x-2)$ dostáváme

$$q(x)=(x+2)(x^2+4x+4),$$

takže

$$p(x)=(x-2)(x+2)(x^2+4x+4).$$

Řešením rovnice $x^2+4x+4=0$ dostáváme $x_{1,2}=-2$. Tedy

$$p(x)=(x-2)(x+2)^3$$

je hledaným reálným rozkladem polynomu $p(x)$.

6.4.2 Racionální lomená funkce a její rozklad

co je to racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy. Jsou-li tyto polynomy reálné, je $F(x)$ reálná racionální lomená funkce. Poněvadž polynom je definován v každém komplexním čísle, je racionální lomená funkce definována ve všech komplexních číslech v nichž je $g(x)\neq 0$, tj. ve všech číslech x, která nejsou kořeny funkce $g(x)$.

Příklad 6.15. Funkce

$$F(x)=\frac{2x+3}{x^3+x}$$

je racionální lomená funkce. Jmenovatel funkce $g(x) = x^3 + x$ lze psát ve tvaru $g(x) = x(x+i)(x-i)$. Je tedy $F(x)$ definovaná ve všech komplexních číslech různých od $0, -i, i$.

Nechť čitatel i jmenovatel racionální lomené funkce $F(x)$ mají společného kořenového činitel $x - \alpha$. Zkrátíme-li tímto společným kořenovým činitelem, dostaneme novou racionální lomenou funkce, označme ji $G(x)$. Funkce $F(x)$, $G(x)$ mají stejné hodnoty pro $x \neq \alpha$. Může se ale stát, že funkce $G(x)$ je v α definována, zatímco $F(x)$ není v čísle α definována. V dalším budeme předpokládat, že čitatel a jmenovatel racionální lomené funkce nemají žádný stejný kořen.

Nechť n je stupeň polynomu čitatele a m je stupeň polynomu jmenovatele racionální lomené funkce $F(x)$. Jestliže je $n < m$, funkci $F(x)$ nazýváme *ryze lomenou*, jestliže $n \geq m$, nazýváme funkci $F(x)$ *neryze lomenou*.

Nechť

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

je neryze lomená funkce. Dělením funkce $f(x)$ funkcí $g(x)$ dostaneme

$$f(x) = P(x) \cdot g(x) + Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Polynom $Q(x)$ je zbytek po dělení, jeho stupeň je menší než stupeň polynomu $g(x)$. Je tedy

$$F(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{g(x)}.$$

Funkce $\frac{Q(x)}{g(x)}$ je ryze lomená racionální funkce.

Slovy: *Neryze lomenou racionální funkci lze napsat jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.*

Rozklad reálné ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků.

rozklad na parciální zlomky

Věta 6.7. (Rozklad na parciální zlomky)

Nechť

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.24}$$

je ryze lomená reálná racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejný kořen. Nechť

$$\begin{aligned} g(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \cdot \dots \cdot (x-\gamma)^m \cdot \\ \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \cdot \dots \cdot [(x-c)^2+d^2]^q, \end{aligned} \tag{6.25}$$

kde $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, a, b, \ldots, c, d$ jsou reálná čísla, $k, l, \ldots, m, p, \ldots, q$ jsou přirozená čísla, je rozklad jmenovatele v reálném oboru. Potom existují reálná čísla

$$\begin{aligned}
&A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\\
&B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_l,\\
&\qquad\vdots\\
&C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m,\\
&M_1,\ N_1;\ M_2,\ N_2;\ \ldots;\ M_p,\ N_p,\\
&\qquad\vdots\\
&P_1,\ Q_1;\ P_2,\ Q_2;\ \ldots;\ P_q,\ Q_q,
\end{aligned}$$

tak, že platí

$$\begin{aligned}
R(x) = {} & \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \\
& + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \frac{B_{l-1}}{(x-\beta)^{l-1}} + \cdots + \\
& + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{B_1}{x-\beta} + \cdots + \frac{C_m}{(x-\gamma)^m} + \\
& + \frac{C_{m-1}}{(x-\gamma)^{m-1}} + \cdots + \frac{C_2}{(x-\gamma)^2} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \\
& + \frac{M_p x + N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p} + \frac{M_{p-1}x + N_{p-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{p-1}} + \cdots + \\
& + \frac{M_2 x + N_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{M_1 x + N_1}{(x-a)^2+b^2} + \cdots + \\
& + \frac{P_q x + Q_q}{[(x-c)^2+d^2]^q} + \frac{P_{q-1}x + Q_{q-1}}{[(x-c)^2+d^2]^{q-1}} + \cdots + \\
& + \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-c)^2+d^2]^2} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x-c)^2+d^2}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

pro všechna komplexní čísla x, jež nejsou kořeny jmenovatele.

Důkaz: Nechť A je libovolné číslo a α je k–násobný kořen plynomu $g(x)$, takže $g(x) = (x-\alpha)^k g_1(x)$, kde $g_1(x) \neq 0$. Položme $F(x) = R(x)$. Potom platí identita

$$F(x) = R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{f(x) - Ag_1(x)}{(x-\alpha)^k g_1(x)}. \tag{6.27}$$

Číslo A je možno zvolit tak, aby výraz $f(x) - Ag_1(x)$ měl číslo α za svůj kořen. Tedy položíme $A = \frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)}$. Toto číslo A označme A_k. Poněvadž je kořenem polynomu $f(x) - A_k g_1(x)$, lze psát $f(x) - A_k g_1(x) = (x-\alpha) f_1(x)$, kde $f_1(x)$ je polynom. Dosazením do (6.27) dostáváme

$$F(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} g_1(x)}.$$

Funkce $\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} g_1(x)}$ je ryze lomená racionální funkce. Je-li $k-1 \geq 1$, postupujeme s touto funkcí stejně jako s $F(x)$. Tím od ní oddělíme zlomek $\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}$. Po k krocích dostaneme

$$F(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{f_k(x)}{g_1(x)}.$$

Poněvadž $g_1(x)$ má reálné kořeny $\beta, \ldots, \gamma$ o násobnostech $l, \ldots, m$, postupujeme s funkcí $\frac{f_k(x)}{g_1(x)}$ stejně jako jsme postupovali s funkcí $F(x)$. Oddělíme tak další zlomky a dostaneme

$$F(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{C_m}{(x-\gamma)^m} + \cdots + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Zde funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ je ryze lomená racionální funkce, jejíž jmenovatel $v(x)$ má nereálné kořeny $a+ib$, $a-ib$, $\ldots$, $c+id$, $c-id$ o násobnostech p, p, $\ldots$, q, q. Rozklad reálného polynomu $v(x)$ je pak tvaru

$$v(x) = [(x-a)^2 + b^2]^p \cdot \cdots \cdot [(x-c)^2 + d^2]^q.$$

Analogicky lze funkci $\frac{u(x)}{v(x)}$ rozložit na součet zlomků

$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{M_p x + N_p}{[(x-a)^2 + b^2]^p} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x-a)^2 + b^2} + \cdots + \\ + \frac{P_q x + Q_q}{[(x-c)^2 + d^2]^q} + \cdots + \frac{P_1 x + Q_1}{(x-c)^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Tím vznikne rozklad funkce $R(x)$ uvedený ve větě. □

Zlomky, vystupující v rozkladu ve větě 6.7, se nazývají *parciální zlomky*. Věta 6.7 sice zaručuje existenci konstant

$$\begin{gathered} A_k;\ A_{k-1};\ \ldots;\ A_2;\ A_1;\ \ldots;\ C_m;\ C_{m-1};\ \ldots;\ C_2;\ C_1; \\ M_p,\ N_p;\ \ldots;\ M_1,\ N_1;\ \ldots;\ P_q,\ Q_q;\ \ldots;\ P_1,\ Q_1, \end{gathered} \tag{6.28}$$

ale nevypovídá o způsobu jejich určení. K výpočtu těchto konstant existuje řada metod. Uvedeme z nich následující metodu.

Metoda neurčitých koeficientů. Tato metoda spočívá v tom, že rovnici (6.27) vynásobíme funkcí $g(x)$. Tím dostáváme rovnost mezi dvěma polynomy, která platí pro všechna x, která nejsou kořeny polynomu $g(x)$, tedy pro nekonečně mnoho čísel x. (Z toho lze vydedukovat, že oba tyto polynomy se rovnají pro všechna x, tedy včetně kořenů polynomu $g(x)$.) Oba polynomy mají pak stejné koeficienty u stejných mocnin x. Vyjádřením rovnosti mezi těmito koeficienty u stejných mocnin x obdržíme systém lineárních rovnic pro neznámé konstanty (6.28).

Příklad 6.16. Rozložte funkci

$$F(x) = \frac{x^5 - x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^4 + x^2} \tag{6.29}$$

na součet polynomu a parciálních zlomků.

Řešení. Funkce $F(x)$ je neryze lomená racionální funkce, neboť její čitatel je stupně $n = 5$, jmenovatel je stupně $m = 4$ a $n > m$. Provedeme-li dělení jmenovatelem, dostáváme

$$F(x) = x + R(x), \tag{6.30}$$

kde

$$R(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^4 + x^2}$$

je ryze lomená racionální funkce. Zřejmě

$$x^2(x^2 + 1)$$

je reálným rozkladem polynomu $x^4 + x^2$. Funkci

$$R(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^4 + x^2}$$

lze psát podle věty 6.7 jako součet parciálních zlomků

$$R(x) = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 1}.$$

Násobením této rovnice funkcí $x^2(x^2 + 1)$ dostáváme

$$-2x^3 + 4x^2 + x + 2 = A_2 x^2 + A_2 + A_1 x^3 + A_1 x + M_1 x^3 + N_1 x^2.$$

Úpravou

$$-2x^3 + 4x^2 + x + 2 = (A_1 + M_1)x^3 + (A_2 + N_1)x^2 + A_1 x + A_2. \tag{6.31}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x v (6.31) dostáváme systém čtyř lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & & +M_1 & & = & -2, \\
 & A_2 & & +N_1 & = & 4, \\
A_1 & & & & = & 1, \\
 & A_2 & & & = & 2,
\end{array}$$

o neznámých A_1, A_2, M_1, N_1. Jeho řešením dostáváme

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad M_1 = -3, \quad N_1 = 2.$$

Je tedy

$$F(x) = x + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-3x+2}{x^2+1}$$

hledaný rozklad.

Příklad 6.17. Rozložte funkci

$$F(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$$

na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení. Funkce $F(x)$ je neryze lomená. Dělením čitatele jmenovatelem dostáváme

$$F(x) = 1 + R(x),$$

kde

$$R(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^3(x-2)} \tag{6.32}$$

je ryze lomená racionální funkce. Funkci $R(x)$ lze podle věty 6.7 zapsat ve tvaru

$$R(x) = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-2}. \tag{6.33}$$

Vynásobením rovnice (6.33) výrazem $x^3(x-2)$ dostáváme

$$2x^3 + 6x^2 + x - 2 = A_3(x-2) + A_2x(x-2) + A_1x^2(x-2) + B_1x^3.$$

Úpravou dostáváme odtud

$$2x^3 + 6x^2 + x - 2 = (A_1 + B_1)x^3 + (A_2 - 2A_1)x^2 + (A_3 - 2A_2)x - 2A_3. \tag{6.34}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin v (6.34) dostáváme tento systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & & & +B_1 & = & 2, \\ -2A_1 & +A_2 & & & = & 6, \\ & -2A_2 & A_3 & & = & 1, \\ & & -2A_3 & & = & -2. \end{array} \tag{6.35}$$

Jeho řešením dostáváme

$$A_3 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_1 = -3, \quad B_1 = 5.$$

Je tedy

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2}$$

hledaný rozklad.

6.4.3 Integrace racionální lomené funkce

integrace parciálních zlomků

I.) *Výpočet integrálů z parciálních zlomků tvaru*

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}, \quad a,\ A \in \mathbb{R}.$$

Rozlišujeme dva případy.

a) $k = 1$. Řešme

$$E_1 = \int \frac{1}{x-a}\, dx.$$

Čitatel integrandu je derivací jmenovatele. Je tedy

$$E_1 = \int \frac{1}{x-a}\, dx = \ln|x-a| + c$$

v každém intervalu I, který neobsahuje číslo a.

b) $k > 1$. Řešme

$$E_k = \int \frac{1}{(x-a)^k}\, dx.$$

Čitatel integrandu je derivací výrazu v závorce ve jmenovateli. Zaveďme substituci $x - a = t$, to jest $x = t + a$. Zřejmě $dx = dt$. Dosazením do daného integrálu dostáváme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \left[\int \frac{dt}{t^k}\right]_{t=x-a} = \left[\frac{t^{-k+1}}{-k+1}\right]_{t=x-a} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$$

v každém intervalu I, který neobsahuje číslo a.

II.) *Výpočet integrálů z parciálních zlomků tvaru*

$$P_k = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \tag{6.36}$$

kde $k \in \mathbb{N}, \quad M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0.$

Před integrací převedeme daný parciální zlomek na součet dvou zlomků

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = A\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{B}{(x^2+px+q)^k}, \tag{6.37}$$

kde A, B jsou vhodné konstanty. Zjistíme je např. metodou neurčitých koeficientů z rovnice $A(2x+p) + B = Mx + N$. Z ní dostáváme $A = \frac{M}{2}$, $B = N - p\frac{M}{2}$.

Všimněte si, že první zlomek má v čitateli derivaci výrazu v závorce jmenovatele a druhý zlomek má v čitateli konstantu.

Řešení integrálu z parciálního zlomku (6.36) je tedy převedeno na řešení následujících dvou integrálů.

$$^{1}P_k = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx \tag{6.38}$$

$$^{2}P_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx. \tag{6.39}$$

Jejich řešení popíšeme v následujících bodech c), d).

c) **Výpočet integrálu**

$$^{1}P_k = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx. \tag{6.40}$$

Budeme jej řešit substitucí $x^2+px+q=t$. Dostáváme $(2x+p)\,dx=dt$. Odtud

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \left[\int \frac{dt}{t^k}\right]_{t=x^2+px+q}.$$

Pro $k=1$ odtud dostáváme

$$^{1}P_1 = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t=x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q).$$

Pro $k>1$ dostáváme

$$^{1}P_k = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \left[\int \frac{dt}{t^k}\right]_{t=x^2+px+q} =$$
$$-\frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{t^{k-1}}\right]_{t=x^2+px+q} = -\frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\right].$$

d) **Výpočet integrálu**

$$^{2}P_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx. \tag{6.41}$$

Označme $r=\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$. Potom lze psát

$$^{2}P_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+r^2)^k}\,dx. \tag{6.42}$$

Tento integrál řešíme substitucí $x+\frac{p}{2}=rt$. Potom $dx=r\,dt$. Je tedy

$$\int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+r^2)^k}\,dx = \left[\int \frac{r\,dt}{r^{2k}(t^2+1)^k}\right]_{t=\frac{2x+p}{2r}} =$$
$$= \frac{1}{r^{2k-1}}\left[\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}\right]_{t=\frac{2x+p}{2r}}.$$

Označme nyní

$$K_k = \int \frac{dt}{(1+t^2)^k},$$

kde k je přirozené číslo. Potom

$$\int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+r^2)^k}\,dx = \frac{1}{r^{2k-1}}\left[K_k\right]_{t=\frac{2x+p}{2r}}.$$

Výpočet integrálu

$$K_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Všimněmě si, že index n v označení integrálu K_n je roven exponentu výrazu $(1+t^2)$ ve jmenovateli.

K výpočtu použijeme metodu per partes. Zvolíme

$$u' = 1, \quad v = \frac{1}{(1+t^2)^n}. \quad \text{Odtud } u = t,\ v' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}
K_n &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt - 2n\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dospěli jsme tedy ke vztahu mezi K_n, K_{n+1}

$$K_n = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1},$$

který lze přepsat takto

$$K_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)K_n\right). \tag{6.43}$$

Integrál K_1 známe. Platí

$$K_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t. \tag{6.44}$$

Vztahem (6.43) lze vypočíst K_{n+1}, známe-li K_n pro libovolné n. Poněvadž známe K_1, můžeme vypočíst podle (6.43) pro $n=1$ integrál K_2. Dostáváme

$$K_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t.$$

Pro $k=3$ vypočítáme K_3 podle z (6.43) pro $n=2$ pomocí již spočítané hodnoty integrálu K_2. Dostáváme

$$K_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right), \quad \text{atd.}$$

Integrál K_k pro určité k vyjádříme pomocí K_{k-1} podle vzorce (6.43) pro $n = k - 1$. To znamená, že pro jeho výpočet postupně musíme vypočítat integrály $K_1, K_2, \cdots, K_{k-1}$. Můžeme tedy užitím vztahů (6.43) a (6.44) vypočítat K_k pro libovolné k. Říkáme, že K_k je určeno *rekurentní formulí.*

Uveďme si ji ještě jednou.

Integrál

$$K_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

počítáme podle rekurentní formule

$$K_1 = \operatorname{arctg} t, \quad K_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)K_n\right), \ n = 2, 3, \ldots \tag{6.45}$$

Výpočet několika integrálů z racionálních lomených funkcí.

příklady

Příklad 6.18. Vypočítejte

$$E = \int \frac{2}{x-1}\, dx.$$

Řešení. Integrál přepíšeme na tvar, v němž je čitatel derivací jmenovatele. Tedy

$$E = 2\int \frac{1}{x-1}\, dx = 2\ln|x-1| + c,$$

pro x v každém intervalu, který neobsahuje 1.

Příklad 6.19. Vypočítejte

$$E = \int \frac{3\, dx}{(x+2)^3}.$$

Řešení. Integrál přepíšeme na integrál ze zlomku, v němž čitatel je derivací výrazu v závorce jmenovatele. Dostáváme

$$E = 3\int \frac{dx}{(x+2)^3}.$$

Zavedením substituce $x + 2 = t$ dostáváme

$$E = 3\left[\int \frac{dt}{t^3}\right]_{t=x+2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c$$

v každém intervalu, který neobsahuje (-2).

Příklad 6.20. Vypočítejte

$$E = \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\, dx.$$

Řešení. Jmenovatel má komplexně sdružené kořeny. Jde o integrál z parciálního zlomku. Integrál přepíšeme na součet dvou integrálů

$$E = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

V prvním z těchto integrálů je čitatel derivací jmenovatele, takže

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2).$$

Druhý z těchto integrálů přepíšeme na tvar

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Zavedením substituce $x+1=t$ dostáváme

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left[\int \frac{dt}{t^2+1} \right]_{t=x+1} = \operatorname{arctg}(x+1).$$

Celkem tedy dostáváme

$$E = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad 6.21. Vypočítejte

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}\, dx.$$

Řešení. Jde o integrál z parciálního zlomku. Integrand převedeme na součet dvou parciálních zlomků, z nichž jeden má v čitateli derivaci výrazu v závorce jmenovatele.

$$\frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2} \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2} - 3 \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}. \tag{6.46}$$

Hledaný integrál je tedy roven součtu integrálů z těchto dvou zlomků. V čitateli prvního zlomku je derivace výrazu v závorce jmenovatele. Řešíme jej tedy substitucí $t = x^2+4x+5$. Dostáváme

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)\, dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{t^2} \right]_{t=x^2+4x+5} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4x+5}. \tag{6.47}$$

Integrál z druhého zlomku v (6.46) počítáme následovně

$$3\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = 3\int \frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2}.$$

Zavedením substituce $x+2=t$ dostáváme odtud

$$3\int \frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2} = 3\left[\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}\right]_{t=x+2} = 3[K_2]_{t=x+2}.$$

Integrál K_2 počítáme rekurentní formulí (6.45). Dostaneme

$$K_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

takže

$$[K_2]_{t=x+2} = \frac{x+2}{2(1+(x+2)^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2).$$

Užitím těchto mezivýsledků dostáváme po úpravě

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3x+7}{x^2+4x+5} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + c$$

pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Příklad 6.22. Vypočtěte

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}dx.$$

Řešení. Jde o integrál z ryze lomené racionální funkce. Napřed ji rozložíme na součet parciálních zlomků. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{6.48}$$

Abychom určili konstanty A, B, C, D, E, F násobme (6.48) výrazem $x^2(x^2+1)^2$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&2x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2 + \\
&+(Ex+F)x^2(x^2+1) = A(x^4+2x^2+1) + B(x^5+2x^3+x) + \\
&+(Cx^3+Dx^2) + E(x^5+x^3) + F(x^4+x^2)
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na obou stranách dostáváme systém rovnic

$$\begin{aligned}
&0 = B+E, \qquad 0 = A+F, \qquad 0 = 2B+C+E \\
&0 = 2A+D+F, \qquad 2 = B, \qquad 1 = A.
\end{aligned}$$

Jehož řešením dostaneme

$$A=1, \quad B=2, \quad C=-2, \quad D=-1, \quad E=-2, \quad F=-1.$$

Dostáváme tedy

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \quad (6.49)$$

Zavedeme nyní označení

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2},\ I_2 = 2\int \frac{dx}{x},\ I_3 = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx,\ I_4 = \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx.$$

Vypočítejme nyní jednotlivé integrály na pravé straně (6.49). Dostáváme

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \qquad I_2 = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln|x|.$$

Integrál

$$I_3 = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

zapíšeme jako součet dvou integrálů ${}^1I_3$, K_2, kde

$${}^1I_3 = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad K_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

První z nich, integrál ${}^1I_3$, řešíme substitucí $x^2+1=t$. Dostáváme

$${}^1I_3 = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{1+x^2},$$

druhý z nich, integrál

$$K_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

se řeší rekurentní formulí (6.45). Dostáváme

$$K_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Celkem tedy dostáváme

$$I_3 = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Integrál I_4 vypočítáme snadno rozepsáním na součet dvou integrálů. Dostáváme

$$I_4 = \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Jestliže dosadíme dosažené výsledky do (6.49), dostáváme

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x} + 2\ln|x| + \frac{1}{1+x^2} - \\ - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x.$$

Úpravou pak dostáváme

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-3x^2+2x-2}{2x(1+x^2)} + \ln\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

Lehce nahlédneme, že výpočet platí pro každý interval, který neobsahuje $x = 0$.

6.4.4 Integrace některých významných tříd funkcí

Upozornění

Funkce, která je vytvořena z elementárních funkcí aritmetickými operacemi, nebo skládáním, nemusí mít primitivní funkci, kterou lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Jako příklad uveďme např. $\int \frac{\sin x}{x}dx$. Namnoze je nutno přikročit k jejich numerickému výpočtu.

V literatuře se uvádí řada tříd funkcí, pro každou z nich se uvádí postup, který zaručuje možnost nalezení integrálu funkce této třídy. Naším cílem není podat výklad běžně popisovaných tříd jak se v učebnicích uvádějí. Kdo má o ně zájem ať si vezme na pomoc podrobnější učebnice. Zde si ukážeme několik příkladů tříd funkcí, které se naznačeným postupem převádějí na integrace racionální lomené funkce.

Zaveďme si pojem racionální lomené funkce ve dvou proměnných. Tento pojem použijeme k vymezení třídy funkcí, na které se bude uvedený postup integrace vztahovat.

Racionální lomenou funkci v proměnných u, v budeme rozumět funkci, označme ji

$$\mathcal{R}(u, v),$$

s touto vlastností: díváme-li se na v jako na konstantu, potom tato funkce je racionální lomenou funkcí proměnné u a díváme-li se na proměnnou u jako na konstantu, potom tato funkce je racionální lomenou funkcí v proměnné v. Podobně se zavádějí racionální lomené funkce n proměnných, $n \in \mathbb{N}$.

V této kapitole bude $\mathcal{R}$ vždy značit racionální lomenou funkci. Nebude to vždy zdůrazněno.

Jako příklad racionální lomené funkce si uveďme tyto funkce. (Napřed si zopakujte pojem racionální lomené funkce jedné proměnné diskutovaný v textu „Matematika A“.)

Příklad 6.23. a) Funkce

$$f(u,v)=\frac{u+v^3}{1+u}$$

je racionální lomenou funkcí v proměnných u, v.

Položíme-li do této funkce $u=x, v=\sqrt{2x+1}$, je složená funkce

$$F(x,\sqrt{2x+1})=\frac{x+\sqrt{(2x+1)^3}}{1+x}$$

racionální lomenou funkcí v x, a v $\sqrt{2x+1}$ avšak není racionální lomenou funkcí v proměnné x.

b) Funkce

$$g(u,v)=\frac{1+u^2}{uv}$$

je racionální lomenou funkcí v proměnných u, v.

Dosadíme-li do této funkce $u=\sin x, v=\cos x$, dostaneme složenou funkci

$$G(\sin x,\cos x)=\frac{1+\sin^2 x}{\sin x\cos x}.$$

Funkce G je racionální lomenou funkcí v proměnných $\sin x, \cos x$. Není však racionální lomenou funkcí v proměnné x.

c) Funkce

$$h(u,v)=\frac{u+1}{\sqrt{v}+u\,v}$$

není racionální lomenou funkci v proměnných u, v.

Integrál z funkce $\mathcal{R}(x,\sqrt[s]{ax+b})$

Nechť

$$\mathcal{R}(x,\sqrt[s]{ax+b})\quad \text{kde}\quad a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0, s\in\mathbb{N}, s>1 \tag{6.50}$$

je racionální lomená funkce ve dvou proměnných $x, \sqrt[s]{a\,x+b}$. Uveďme si tři příklady z této třídy funkcí

$$a)\ \frac{x+\sqrt{x}}{1+x^2}\qquad b)\ \frac{\sqrt{2\,x+3}}{x+\sqrt[3]{2\,x+3}},\qquad c)\ \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Funkce

$$d)\ \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

do třídy těchto funkcí nepatří (zdůvodněte !)

Postup výpočtu. Integrály funkcí této třídy řešíme substitucí

$$\sqrt[s]{ax+b} = t. \tag{6.51}$$

Ukažme nyní způsob řešení integrálů funkcí této skupiny zcela formálně. Splnění předpokladů pro oprávněnost uvedeného postupu je nutno ověřit u každého jednotlivého příkladu zvlášť. Pokud tak neučiníte, je zapotřebí se přesvědčit o správnosti provedeného výpočtu derivováním dosaženého výsledku s diskuzí o intervalu, v němž výpočet platí.

Z (6.51) dostaneme povýšením na s–tou $ax+b=t^s$. Odtud

$$x = \frac{1}{a}(t^s - b), \quad \text{takže} \quad dx = \frac{1}{a} s\, t^{s-1}\, dt. \tag{6.52}$$

Tedy

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt[s]{a\,x+b})\, dx = \left[\int \mathcal{R}(\frac{1}{a}(t^s - b), t) \frac{1}{a}\, s\, t^{s-1}\, dt \right]_{t=\sqrt[s]{ax+b}}.$$

Tím jsme převedli výpočet zadaného integrálu proměnné x na integrál z racionální lomené funkce proměnné t.

Příklad 6.24. Vypočítejte

$$A = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\, dx.$$

Řešení. Jedná se o integrál z racionální lomené funkce v proměnných x, $\sqrt{2x+1}$. Integrand je funkce spojitá jak na intervalu $J_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, tak na intervalu $J_2 = (0, \infty)$. Podle nahoře uvedeného návodu zavedeme substituci

$$\sqrt{2x+1} = t.$$

Intervalu J_1 odpovídá touto transformací interval $I_1 = (0,1)$ a intervalu J_2 odpovídá interval $I_2 = (1, \infty)$. Ze vztahu $\sqrt{2x+1} = t$ vypočítejme x. Dostáváme

$$x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = t\, dt.$$

Označme $\varphi(t) = \frac{t^2-1}{2}$ pro $t \in I_1$, resp. pro $t \in I_2$. Lehce nahlédneme, že funkce $\varphi(t)$ splňuje předpoklady věty o substituci:je spojitá a má spojitou nenulovou derivaci na I_1, resp. na I_2. Zřejmě $\varphi(I_1) = J_1$, $\varphi(I_2) = J_2$. Integrál $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\, dx$ na intervalu J_1, resp. na intervalu J_2 se převádí uvedenou substitucí na výpočet integrálu

$$2 \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt$$

na intervalu I_1, resp. na intervalu I_2.

Jde o integrál z neryze lomené racionální funkce. Jejím rozkladem na součet polynomu a parciálních zlomků a jejich následnou integrací dostáváme

$$2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt = 2t + ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c.$$

Zpětnou substitucí $t = \sqrt{2x+1}$ dostaneme pak

$$A = 2\sqrt{2x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + c \tag{6.53}$$

pro $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ a pro $x \in (0, \infty)$.

Proveďte zkoušku správnosti výpočtu derivováním výsledku (6.53)

Následující třídy funkcí jsou uvedeny pouze informativně. Jsou uvedeny pouze transformace, které zaručují převod integrálu z funkce dané třídy na integrál z racionální lomené funkce.

Integrál z funkce $\mathcal{R}\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

Ukažme si postup integrace funkce tvaru

$$\mathcal{R}\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad \text{kde } ad-bc \neq 0, a^2+c^2 \neq 0.$$

Integrál se substitucí

$$\sqrt[s]{\frac{a\,x+b}{cx+d}} = t$$

převede na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t. Je totiž

$$x = -\frac{d\,t^s - b}{c\,t^s - a}; \qquad dx = \frac{ad-bc}{(ct^s-a)^2}\,s\,t^{s-1}\,dt.$$

Integrál z funkce $\mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

Na řešení integrálů tohoto typu je známá řada metod. K řešení je možno použít tzv. *Eulerových substitucí* a to:

1) Je-li $a > 0$ položíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$.

2) Je-li $a < 0$ má odmocnina $\sqrt{ax^2+bx+c}$ význam jenom tehdy, má-li polynom $ax^2 + bx + c$ dva různé reálné kořeny. Označme je x_1, x_2. Nechť $x_1 < x_2$. V tomto případě položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-x_1)\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}.$$

Tím je integrál převeden na integrál typu

$$\mathcal{R}\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

Integrál typu $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$.

Integrály typu $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$, kde m, n jsou celá čísla, přičemž alespoň jedno z nich je liché. Je-li m (n) sudé, zavedeme substituci $\cos x = t$ ($\sin x = t$). Jsou-li obě čísla m, n lichá, je možno použít jak substituce $\sin x = t$, tak i substituce $\cos x = t$. Řídíme se jen tím, aby výpočet integrálu byl co nejjednodušší.

Příklad 6.25. Vypočtěte

$$\text{a) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx, \qquad \text{b) } \int \sin^5 x\, dx, \qquad \text{c) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\, dx.$$

Řešení.

a)
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \quad \sin^2 x = 1 - t^2 \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| =$$
$$= -\int \frac{1 - t^2}{t^2}\, dt = \frac{1}{t} + t + c = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c,$$
$x \in I,$ kde I neobsahuje čísla $(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

b)
$$\int \sin^5 x\, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \quad \sin^4 x = (1 - t^2)^2 \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| = -\int (1 - t^2)^2 dt =$$
$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4)\, dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + c =$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

c)
$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^5}\, dt =$$
$$= -\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2t^2} + c = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + c,$$
pro $x \in I$, kde I neobsahuje čísla $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6.5 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

V této kapitole se zavádí pojem primitivní funkce k dané funkci a vyšetřuje se otázka existence primitivní funkce k dané funkci. Ukazuje se, že na každém intervalu existuje široká třída funkcí, k nímž existují funkce primitivní. Jsou to funkce spojité na daném intervalu. V příkladě na straně 176 je uvedena funkce nespojitá na intervalu $(-1, 1)$, která má na něm funkci primitivní. Takovéto funkce se v aplikacích vyskytují jen zřídka. Nalezení primitivní funkce k dané funkci může být velice obtížné. *K funkci, vytvořené racionálními operacemi z elementárních funkcí nemusí existovat funkce primitivní, kterou by bylo možno vyjádřit elementárními funkcemi.*

V kapitole je uveden seznam důležitých funkcí a k nim odpovídajících funkcí primitivních. Dále se ukazují metody na nalezení primitivní funkce k funkci, která je lineární kombinací funkcí, k nímž jsou primitivní funkce známé. Dále jsou uvedeny dvě důležité metody na hledání primitivní funkce k dané funkci.

Je to *metoda per partes a metoda substituční*. Neexistuje obecný postup pro výpočet neurčitého integrálu. Existují pouze popisy metod pro hledání primitivních funkcí k funkcím z jistých specifikovaných tříd funkcí. V textu je pojednáno podrobně o nejdůležitější z nich – o třídě racionálních lomených funkcí. Na konci kapitoly je uvedeno i několik dalších tříd se stručným popisem postupu řešení. Na tuto část textu je nutno se dívat jen orientačně.

Úlohy

1. Co je to neurčitý integrál na intervalu? Co víte o jeho existenci?

2. Vysvětlete metodu per partes na hledání neurčitého integrálu.

3. Vysvětlete metody substituční na hledání neurčitého integrálu.

4. Popište metodu integrace racionální lomené funkce.

5. Co je to racionální lomená funkce v proměnných u, v?

6. Co je to racionální lomená funkce v proměnných $\sin x$, $\cos x$?

7. Co je to racionální lomená funkce v proměnných x, $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$?

8. Popište postup řešení integrálu $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.

9. Vypočítejte následující neurčité integrály:

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx$ $\quad [x^3 - x^2 + x + c,\ x \in (-\infty, \infty)]$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ $\quad [\sqrt{x} + c,\ x \in (0, \infty)]$

c) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ $\quad [\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x|,\ x \in (0, \infty)]$

d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$ $\quad [\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c,\ x \in (0, \infty)]$

e) $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x}\, dx$ $\quad [-\left(\frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right),\ x \in (-\infty, \infty)]$

f) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$ $\quad [\frac{1}{2}(x - \sin x),\ x \in (-\infty, \infty)]$

10. Vypočítejte následující neurčité integrály:

a) $\int x e^x\, dx$ $\quad [e^x(x - 1) + c,\ x \in (-\infty, \infty)]$

b) $\int \ln x\, dx$ $\quad [x \ln x - x + c,\ x \in (0, \infty)]$

c) $\int x \sin x\, dx$ $\quad [-x \cos x + \sin x + c,\ x \in (-\infty, \infty)]$

d) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ $\quad [\frac{1}{2} \ln^2 x + c,\ x \in (0, \infty)]$

e) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ $\quad$ [Per partes: $u' = 1, v = \sqrt{1 - x^2}$; $\frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + c,\ x \in (-1, 1)$]

f) $\int \arcsin x\, dx$ $\quad [x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c,\ x \in (-1, 1)]$

11. Nalezněte rekurentní formule pro výpočet integrálů:

a) $I_n = \int x^n e^x\, dx$, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad$ [Per partes: $u' = e^x, v = x^n$; $I_n = x^n e^x - n I_{n-1},\ I_0 = e^x,\ x \in (-\infty, \infty)$]

b) $I_n = \int \sin^n x \, dx$, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
[Per partes: $u' = \sin x$, $v = \sin^{n-1} x$; pro $n \geq 2$ je $I_n = -\frac{1}{n}(\cos x \sin^{n-1} x - (n-1) I_{n-2})$, $I_0 = x$, $I_1 = -\cos x$,]

12. Vypočítejte integrály:

a) $\int \sin(5 - 6x) \, dx$ $[\frac{1}{6} \cos(5 - 6x) + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

b) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$ (Substituce $\ln x = t$)
$[\ln |\ln x| + c, \; x \in (0, 1) \cup (1, \infty)]$

c) $\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$ (Substituce $x^2 + 1 = t$)
$[\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

d) $\int x^2 \sqrt[5]{1 + x^3} \, dx$ (Substituce $x^3 + 1 = t$)
$[\frac{5}{18} \sqrt[5]{(1 + x^3)^6} + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

13. Vypočítejte integrály:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$ $[-\frac{1}{x-2} + c, \; x \in (-\infty, -2)$ a pro $x \in (2, \infty)]$

b) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+5} \, dx$ $[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

c) $\int \frac{dx}{(x^2+3)^2}$ $[\frac{1}{6} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{x^2+3} \right] + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

d) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$ $[-\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

14. Vypočítejte integrály:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$ $[x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + c, \; x \in (0, \infty)]$

b) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ $[\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c, \; x \in (-\infty, \infty)]$

- Zavedení Riemanova integrálu
- Vlastnosti Riemanova integrálu
- Existence Riemanova integrálu
- Výpočet Riemanova integrálu
- Nevlastní integrály
- Numerický výpočet určitého integrálu
- Shrnutí, úlohy

7. Určitý integrál

Cíl kapitoly

Cílem je

- seznámit se se zavedením Riemanova integrálu
- seznámit se se základními vlastnostmi Riemanova integrálu
- seznámit se s některými třídami integrovatelných funkcí
- seznámit se s integrálem jako funkcí horní meze
- seznámit se s metodami na vyčíslení určitého integrálu
- seznámit se se zavedením nevlastních integrálů vzhledem k funkci a vzhledem k intervalu
- seznámit se s pojmem numerického výpočtu určitého integrálu.

Časová zátěž

- 10 hodin

Úvod k zavedení pojmu určitého integrálu

S pojmem určitého integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jste se již setkali v dřívějším studiu. Dříve, než si tento pojem zobecníme, tak si jej zopakujme tak, jak jste jej měli zavedený.

Definice 7.1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť $F(x)$ je jakákoliv primitivní funkce k $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Definujeme určitý integrál z funkce $f(x)$ od a do b, označíme jej $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, vztahem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7.1}$$

Číslo a nazýváme dolní a číslo b horní mezí integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka 1. Je-li $G(x)$ jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$, potom $G(x) = F(x) + c$, kde c je vhodná konstanta. Potom

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Tedy (7.1) nezávisí na volbě primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Dále definujeme $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ vztahem $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ a, je-li $a = b$, položíme $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Příklad 7.1. Nechť $f(x) = x^2$, $x \in \langle 2, 3\rangle$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in \langle 2, 3\rangle$. Funkce $f(x)$, $F(x)$ mají vlastnosti uvedené v definici 7.1. Je tedy

$$\int\limits_2^3 x^2\,dx = F(3) - F(2) = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Podívejme se nyní podrobněji na vztah (7.1). Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ jsou takové body z intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b.$$

Potom

$$F(b) - F(a) = \Big(F(x_{n+1}) - F(x_n)\Big) + \Big(F(x_n) - F(x_{n-1})\Big) + \\ + \cdots + \Big(F(x_3) - F(x_2)\Big) + \Big(F(x_2) - F(x_1)\Big). \quad (7.2)$$

Podle věty o střední hodnotě diferenciálního počtu je

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \text{ kde } \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

je vhodné číslo. Existují tedy čísla $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$,…, $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$ tak, že

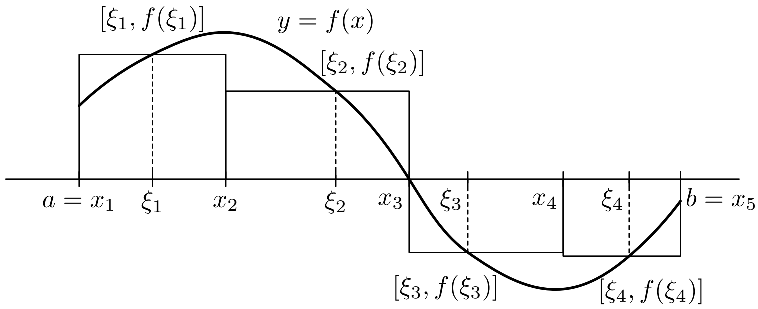
$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \quad (7.3)$$

Na obr. 7.1 je znázorněna funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$. Jsou na něm vyznačeny body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (pro $n = 4$). Byly zvoleny tak, že mezi nimi jsou všechny nulové body funkce $f(x)$. Je-li $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ interval, na němž je funkce $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), představuje $(x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)$ obsah (obsah násobený „-1“) obdélníka o stranách $x_{k+1} - x_k$, $|f(\xi_k)|$. Čím je číslo $x_{k+1} - x_k$ menší, tím je tento obsah bližší k intuitivně chápanému obsahu rovinného obrazce vytvořeném osou x, přímkami $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ a grafem funkce $y = |f(x)|$. Uvažujme nyní útvar vytvořený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$. Tento útvar rozdělme na části nad osou x a na části pod osou x. Pravá strana v (7.3) představuje aproximaci rozdílu $P_1 - P_2$, kde P_1 je součet intuitivně chápaných obsahů částí útvarů nad osou x a P_2 je součet obsahů částí útvaru pod osou x. Odtud lze odvodit, že $\int_a^b f(x)\,dx$ je roven $P_1 - P_2$.

V definici 7.1 se mimo jiné předpokládalo, že funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. V dalším zavedeme $\int_a^b f(x)\,dx$ i pro případy, kdy funkce $f(x)$ není spojitá na $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 7.1: K významu určitého integrálu.

7.1 Zavedení Riemanova integrálu

dělení intervalu, norma dělení

Dělení intervalu, norma dělení

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ jsou takové body z intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Těmito body je určeno n intervalů

$$\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \ldots, \langle x_i, x_{i+1}\rangle, \ldots, \langle x_n, x_{n+1}\rangle.$$

Budeme říkat, že tvoří *dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů. Označíme je např. D, resp. D_n, chceme-li zdůraznit počet částečných intervalů. Body x_i nazveme *dělicími body*. Číslo

$$\|D\| = \max_i |x_{i+1} - x_i|$$

nazveme *normou dělení* D.

Nechť $D, \tilde{D}$ jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že dělení $\tilde{D}$ je *zjemněním dělení* D, jestliže každý dělicí bod dělení D je i dělicím bodem dělení $\tilde{D}$.

Příklad 7.2. Uvažujme interval $\langle 1, 2\rangle$. Zvolme $n = 4$ a dělicí body $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}2$; $x_3 = 1{,}3$; $x_4 = 1{,}35$; $x_5 = 2$. Těmito body je určeno dělení D_4 intervalu $\langle 1, 2\rangle$ na 4 částečné intervaly

$$\langle 1; 1{,}2\rangle,\ \langle 1{,}2; 1{,}3\rangle,\ \langle 1{,}3; 1{,}35\rangle,\ \langle 1{,}35; 2\rangle.$$

Normou tohoto dělení je $\|D_4\| = 0{,}65$.

Dělení D_6 určené body

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}2,\ x_3 = 1{,}25,\ x_4 = 1{,}3,\ x_5 = 1{,}35,\ x_6 = 1{,}7,\ x_7 = 2,$$

dělí interval $\langle 1, 2\rangle$ na 6 částečných intervalů

$$\langle 1; 1{,}2\rangle,\ \langle 1{,}2; 1{,}25\rangle,\ \langle 1{,}25; 1{,}3\rangle,\ \langle 1{,}3; 1{,}35\rangle,\ \langle 1{,}35; 1{,}7\rangle,\ \langle 1{,}7; 2\rangle.$$

Poněvadž každý dělicí bod dělení D_4 je i dělicím bodem dělení D_6, je dělení D_6 zjemněním dělení D_4.

Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu J *omezená*, jestliže je na něm definovaná a jestliže existují taková čísla $m, M \in \mathbb{R}$, že

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pro všechna } x \in J.$$

Příklad 7.3. Funkce $y = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ omezená, neboť $0 \leq x^2 \leq 1$ pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, není na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ omezená, neboť $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Neexistuje číslo $M \in \mathbb{R}$, pro něž by platilo $f(x) \leq M$, $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Riemanův integrál – zavedení pojmu

definice Riemanova integrálu

Nechť $f(x)$ je *omezená* funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť D_n je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělicími body x_k, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$. Označme

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x).$$

Potom

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

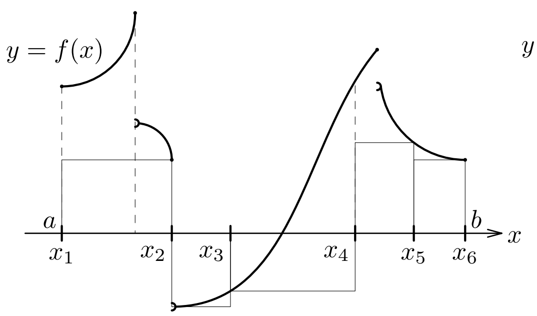
nazveme *dolním Riemanovým součtem* funkce f pro dělení D_n a

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

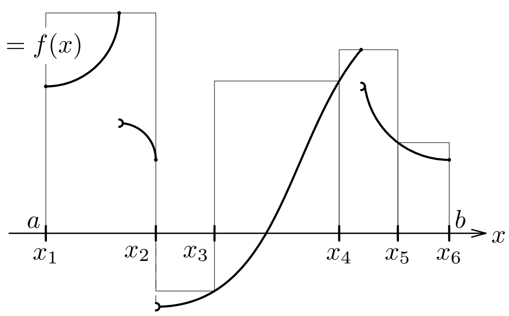
nazveme *horním Riemanovým součtem* funkce f pro dělení D_n.

V dalším textu této kapitoly budou mít čísla m_i, M_i výše uvedený význam, pokud nebude uvedeno jinak.

Poznámka. Číslo $m_i(x_{i+1} - x_i)$ představuje plošný obsah obdélníka o stranách $|m_i|$, $x_{i+1} - x_i$, je-li $m_i \geq 0$, a představuje obsah tohoto obdélníka násobeného -1, je-li $m_i < 0$. Podobný význam mají čísla $M_i(x_{i+1} - x_i)$. Na obr. 7.2 je interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen na $n = 5$ částečných intervalů. Je na něm vyznačen význam čísla $s(f, D_5)$. Na obr. 7.3 je vyznačen význam čísla $S(f, D_5)$ pro totéž dělení D_5.



Obrázek 7.2: Význam $s(f, D_5)$.



Obrázek 7.3: Význam $S(f, D_5)$.

Poznámka. Z definice čísel $s(f, D)$, $S(f, D)$ je patrno, že pokud označíme $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, potom

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)$$

pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li tedy f omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom množina všech dolních (horních) Riemanových součtů příslušných ke všem dělením D intervalu $\langle a, b\rangle$ je shora (zdola) omezena číslem $M(b-a)$ $(m(b-a))$, takže existuje její suprémum (infimum). Označme

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \sup_D s(f, D)$$

a nazveme je *dolním Riemanovým integrálem funkce* $f(x)$ od a do b. Označme

$$\int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \inf_D S(f, D)$$

a nazveme je *horním Riemanovým integrálem funkce* $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice 7.2. (Definice Riemanova integrálu)

Nechť funkce $f(x)$ je omezena na intervalu $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b\rangle$ Riemanův integrál a značíme jej

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

jestliže

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx.$$

Klademe pak

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx.$$

Poznámka 1. V označení $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se symbol $\int$ nazývá *integračním znakem*, číslo a se nazývá *dolní mez* a číslo b se nazývá *horní mez Riemanova integrálu.* Místo Riemanův integrál budeme často říkat jen integrál. Funkci $f(x)$ nazýváme *integrandem.* Jestliže existuje (neexistuje) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, budeme říkat, že funkce $f(x)$ je (není) na intervalu $\langle a,b\rangle$ *integrabilní* resp. integrovatelná.

Poznámka 2. Uvědomte si, že označení $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ má dvojí význam: označení integrálu, který buďto existuje nebo neexistuje, a označení jeho hodnoty, to jest čísla.

vysvětlení zavedení Riemanova integrálu na příkladě

Příklad 7.4. Uvažujme funkci $f(x) = e^x$, $x \in \langle 23\rangle$. Označme $h = \frac{3-2}{10} = 0{,}1$. Položme

$$x_k = 2 + (k-1)h, \qquad k = 1, 2, \dots, 11.$$

Body $\{x_k\}_{k=1}^{11}$ tvoří dělení D_{10} intervalu $\langle 2,3\rangle$. Určeme $s(f, D_{10})$ a $S(f, D_{10})$.

Řešení. Poněvadž $f(x)$ je na intervalu $\langle 2,3\rangle$ rostoucí, platí

$$m_k = \inf_{x\in\langle x_k,x_{k+1}\rangle} f(x) = e^{x_k} = e^{2+(k-1)h} = e^2\cdot e^{(k-1)h}$$
$$M_k = \sup_{x\in\langle x_k,x_{k+1}\rangle} f(x) = e^{x_{k+1}} = e^{2+kh} = e^2\cdot e^{kh}$$

Je tedy

$$s(f, D_{10}) = \sum_{k=1}^{10} e^2 e^{(k-1)h}\cdot 0{,}1 = 0{,}1e^{2-h}\sum_{k=1}^{10} e^{kh}$$
$$S(f, D_{10}) = \sum_{k=1}^{10} e^2 e^{kh}\cdot 0{,}1 = 0{,}1e^{2}\sum_{k=1}^{10} e^{kh}$$

Poněvadž $\{e^{kh}\}_{k=1}^{10}$ je geometrická posloupnost s kvocientem e^h, dostáváme

$$s(f, D_{10}) = 0{,}1e^{2-h}\cdot e^h\frac{1-e^{10h}}{1-e^h} = 0{,}1e^2\frac{1-e}{1-e^{0,1}} \doteq 12{,}0722$$
$$S(f, D_{10}) = 0{,}1e^{2}\cdot e^h\frac{1-e^{10h}}{1-e^h} = 0{,}1e^{2,1}\frac{1-e}{1-e^{0,1}} \doteq 13{,}3419$$

(Výpočtem $\int\limits_2^3 e^x\,dx$ bychom obdrželi $12{,}69648\dots$.)

Přikročme nyní k porovnání dolního (horního) Riemanova integrálního součtu příslušnému k dělení D a k jeho zjemnění $\tilde{D}$.

Nechť $f(x)$ je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť D je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ s dělicími body $a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n < x_{n+1} = b$.

Označme $\tilde{D}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, které vznikne z dělení D přidáním dalšího dělicího bodu $c \in (x_i, x_{i+1})$. Tedy nechť

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < c < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

jsou dělicí body dělení $\tilde{D}$. Porovnejme hodnoty $s(f, \tilde{D})$, $s(f, D)$, $S(f, \tilde{D})$ $S(f, D)$. Dostáváme

$$s(f, D) = m_1(x_2 - x_1) + \cdots + m_i(x_{i+1} - x_i) + \cdots + m_n(x_{n+1} - x_n),$$

kde $m_i = \inf\limits_{x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$. Číslo $s(f, \tilde{D})$ vznikne z čísla $s(f, D)$ tak, že výraz $m_i(x_{i+1} - x_i)$ nahradíme součtem

$$m_{i1}(c - x_i) + m_{i2}(x_{n+1} - c),$$

kde

$$m_{i1} = \inf_{x \in \langle x_i, c\rangle} f(x), \qquad m_{i2} = \inf_{x \in \langle c, x_{i+1}\rangle} f(x).$$

Poněvadž

$$m_{i1} \geq m_i, \qquad m_{i2} \geq m_i$$

je

$$s(f, D) \leq s(f, \tilde{D}).$$

Podobně

$$S(f, \tilde{D}) \leq S(f, D).$$

Je tedy

$$s(f, D) \leq s(f, \tilde{D}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq S(f, \tilde{D}) \leq S(f, D).$$

Výše uvedené dělení $\tilde{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ je zjemněním dělení D. Přidáním dalších dělicích bodů k dělicím bodům dělení D dostaneme jeho zjemnění. Platí proto toto tvrzení:

Nechť $f(x)$ je omezená funkce na $\langle a, b\rangle$. Nechť D je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\tilde{D}$ je jeho zjemnění. Potom platí

$$s(f, D) \leq s(f, \tilde{D}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq S(f, \tilde{D}) \leq S(f, D). \tag{7.4}$$

Uveďme si nyní nutné a postačující podmínky pro existenci integrálu z omezené funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Věta 7.1. *Nechť funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nutnou a postačující podmínkou pro existenci $\int_a^b f(x)\, dx$ je, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení D_ε intervalu $\langle a, b\rangle$, že*

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{7.5}$$

Důkaz:

a) Nechť existuje $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Poněvadž

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sup_D s(f,D),$$

existuje takové dělení D_ε^1, že

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - s(f, D_\varepsilon^1) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.6}$$

Podobně, poněvadž

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \inf_D S(f,D),$$

existuje takové dělení D_ε^2, že

$$S(f, D_\varepsilon^2) - \int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.7}$$

Nechť D_ε je zjemnění obou dělení D_ε^1, D_ε^2. Pro toto dělení dostáváme z (7.6), (7.7) s ohledem na (7.4)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - s(f, D_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(f, D_\varepsilon) - \int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sečtením těchto vztahů dostáváme (7.5).

b) Nechť platí (7.5). Z nerovností

$$\int\limits_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \le S(f, D_\varepsilon), \qquad \int\limits_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \ge s(f, D_\varepsilon),$$

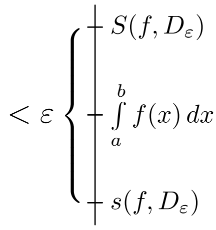
dostáváme odečtením

$$0 \le \int\limits_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int\limits_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \le S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Poněvadž ε je libovolné, platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Graficky znázorněno:



□

Uvedeme si nyní *ekvivalentní způsob zavedení Riemanova integrálu.* Napřed uveďme několik pojmů, které k tomu použijeme.

Nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.
Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *nulovou posloupností dělení* intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zaveďme si nyní „Reimanův integrální součet“ a možnost jeho použití k alternativnímu způsobu zavedení určitého integrálu.

Riemanův integrální součet

Riemanův integrální součet.

Nechť $f(x)$ je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, D_n dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů s dělicími body

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Označme dále $Z(D_n)$ množinu všech takových uspořádaných skupin n-čísel ${}^n\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, že $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Potom číslo

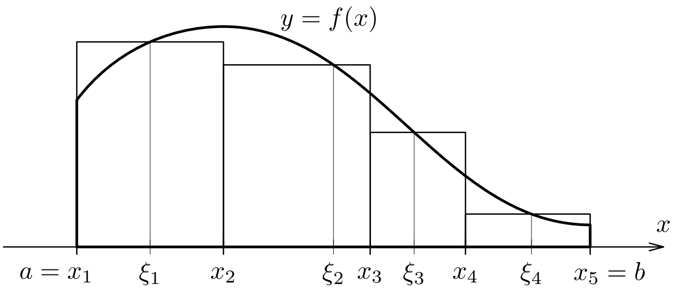
$$\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \qquad \text{kde } {}^n\boldsymbol{\xi} \in Z(D_n),$$

nazýváme *Riemanovým integrálním součtem* funkce f příslušným k dělení D_n a skupině čísel ${}^n\boldsymbol{\xi} \in Z(D_n)$.

Na obr. 7.4 je znázorněn Riemanův integrální součet pro zvolené dělení D_4 a zvolená čísla ${}^4\boldsymbol{\xi} \in Z(D_4)$. Na obr. 7.4 je funkce $f(x) > 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Číslo $\sigma(f, D_4, {}^4\boldsymbol{\xi})$ aproximuje *intuitivně chápaný plošný obsah* rovinného obrazce vytvořeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$.

Lehce nahlédneme, že pro každé dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$s(f, D_n) \le \sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) \le S(f, D_n)$$



Obrázek 7.4: Riemanův integrální součet.

pro každou volbu skupiny čísel ${}^n\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in Z(D_n)$, to jest takových čísel, že $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$. (Udělejte si náčrtek a tvrzení zdůvodněte!)

Lze dokázat následující větu.

Věta 7.2. *Nechť funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b\rangle$ Riemanův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ roven A když a jenom když pro každou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ a každou volbu ${}^n\boldsymbol{\xi} \in Z(D_n)$ je*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) = A.$$

Důkaz: Bez důkazu. □

Z věty vyplývá, že jestliže existuje $\int_a^b f(x)\,dx$, lze jej aproximovat Riemanovým součtem. Představa Riemanova integrálního součtu nám pomůže v různých aplikacích použít určitý integrál.

Platí tedy následující věta.

Věta 7.3.

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a ${}^n\boldsymbol{\xi} \in Z(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Věta je bezprostředním důsledkem věty 7.2. □

Poznámka. Věta je využitelná v různých aplikacích.

definice $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ pro $b = a$ a pro $b < a$

Definice 7.3. **(Rozšíření pojmu Riemanova integrálu.)**

Zatím jsme zavedli Riemanův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ z omezené funkce pro případ $a < b$. Tuto definici rozšíříme. Nechť $a < b$. Položme

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

pokud existuje integrál na pravé straně.

7.2 Vlastnosti Riemanova integrálu

Uveďme si několik užitečných vět. Věty 7.4—7.9 lehce pochopíte nakreslením funkce $f(x)$ na příslušných intervalech a uvědomíte-li si geometrický význam určitého integrálu.

Věta 7.4.

Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle \alpha, \beta\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$. Potom je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Důkaz: Bez důkazu. □

Věta 7.5.

Nechť existují integrály $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$. Potom existuje $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Bez důkazu. □

Věta 7.6.

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\{c_i\}_{i=1}^{m}$ jsou takové body z $\langle a, b\rangle$, že $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$. Potom existují integrály $\int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, a platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Důkaz: Věta je bezprostředním důsledkem vět 7.4 a 7.5. □

Věta 7.7. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$

Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha f + \beta g$ je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{7.8}$$

Důkaz: Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ke každému dělení intervalu D_n utvořme Riemanovy integrální součty

$$\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}),\ \sigma(g, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}), \qquad \text{kde } {}^n\boldsymbol{\xi} \in Z(D_n).$$

Zřejmě

$$\sigma(\alpha f + \beta g, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) = \alpha\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) + \beta\sigma(g, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) \tag{7.9}$$

je integrální součet funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Poněvadž

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha\sigma(f, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}) + \beta\sigma(g, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi})) = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

existuje též

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\alpha f + \beta g, D_n, {}^n\boldsymbol{\xi}),$$

takže platí (7.8). □

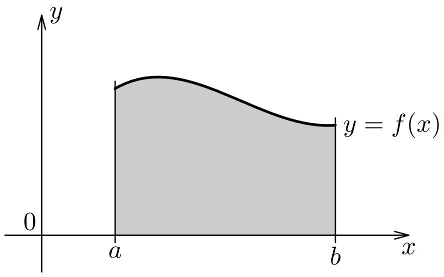
Věta 7.8.

Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Geometrickým významem $\int_a^b f(x)\,dx$ je plošný obsah útvaru vytvořeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Viz obr. 7.5 (útvar je vyznačen šedě).

Důkaz: Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ je $s(f, D) \geq 0$, takže dostáváme $\sup_D s(f, D) \geq 0$, a proto $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. □



Obrázek 7.5: Význam $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b\rangle$.

Věta 7.9.

Nechť f a g jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz: Podle předpokladů věty je

$$g(x) - f(x) \geq 0 \qquad \text{pro } x \in \langle a, b\rangle$$

a podle věty 7.7 je funkce $g(x) - f(x)$ integrace schopna a platí

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Odtud

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \square$$

Uveďme si nyní větu o střední hodnotě integrálního počtu.

Věta 7.10. (Věta o střední hodnotě integr. počtu)

Nechť f je integrabilní v $\langle a, b\rangle$. Nechť

$$m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Potom existuje $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu.$$

Jestliže navíc je funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$, existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

což lze zapsat jako

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Důkaz: Uvedené tvrzení vyplývá bezprostředně ze vztahu

$$m \le f(x) \le M, \qquad x \in \langle a, b\rangle$$

a aplikací věty 7.9. $\square$

Poznámka. Číslo $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, kde $a < b$, $f(t)$ je integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$, se nazývá střední hodnota funkce $f(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže např. $f(t)$ vyjadřuje počet obyvatel žijících na jistém území v období $t_1 \div t_2$, potom

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

je průměrný počet obyvatel žijících na uvažovaném území v období $t_1 \div t_2$.

Věta 7.11.

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je i funkce $|f|$ integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz: Bez důkazu. $\square$

Věta 7.12. *Nechť g je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $g(x) = 0$ pro $x \in (a, b\rangle$ $(x \in \langle a, b))$. Potom $g(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a platí*

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

Důkaz: Důkaz provedeme pro případ, že $g(x) = 0$ pro $x \in (a, b\rangle$. Druhý případ je analogický. Jestliže $g(a) = 0$, potom $g(x) = 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, takže $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Nechť tedy $g(a) \neq 0$, např. nechť $g(a) > 0$. Nechť tedy D je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělicími body

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Potom

$$m_1 = 0, \qquad M_1 = g(a).$$

Je tedy

$$s(f, D) = 0, \qquad S(f, D) = g(a)(x_2 - x_1).$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Nechť

$$\|D\| \le \frac{\varepsilon}{g(a)}.$$

Potom

$$0 < S(g, D) \le g(a)\frac{\varepsilon}{g(a)} = \varepsilon, \qquad s(g, D) = 0.$$

Odtud dostáváme

$$S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon.$$

Podle věty 7.1 existuje $\int_a^b g(x)\,dx$. Poněvadž $\sup_D s(g, D) = 0$, je

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

$\square$

Věta 7.13. *Nechť funkce h je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť f je taková funkce na $\langle a, b\rangle$, že $h(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$ $(x \in \langle a, b))$. Potom existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx.$$

Důkaz: Důkaz vyplývá z předešlé věty, položíme-li $g(x) = h(x) - f(x)$. $\square$

Věta 7.14.

Nechť funkce h je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která se od funkce h liší jen v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx.$$

Důkaz: Nechť c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, kde $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_m = b$ jsou takové body z $\langle a, b\rangle$, že pro $x \neq c_i$, $i = 1, \ldots, m$, je $f(x) = h(x)$. Dostáváme

$$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} h(x)\,dx.$$

Užitím věty 7.13 obdržíme

$$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} h(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$ $\square$

7.3 Existence Riemanova integrálu

existence $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$

Věta 7.15. (Věta I o existenci integrálu.) *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom $f(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná.*

Důkaz: K důkazu použijeme následující větu, kterou uvedeme bez důkazu.

Pomocná věta. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Potom k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, závislé na ε, že pro všechna $x', x'' \in \langle a, b\rangle$, pro něž $|x' - x''| < \delta$ je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Tato věta připomíná definici spojitosti funkce $f(x)$ v daném bodě. Podstatný rozdíl je v tom, že δ, určené k číslu ε, se vztahuje na celý interval $\langle a, b\rangle$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x', x'' \in \langle a, b\rangle$, $|x' - x''| < \delta$ je $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Nechť D_ε je takové dělení $\langle a, b\rangle$, že $\|D_\varepsilon\| < \delta$. Nechť dělení D_ε je určeno dělicími body $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$, pro něž je

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Poněvadž funkce $f(x)$ je spojitá na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, existuje $c_i' \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$ v němž funkce f nabývá svého minima, označme je m_i, a existuje $c_i'' \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, v němž nabývá svého maxima, označme je M_i. Tedy $m_i = f(c_i')$, $M_i = f(c_i'')$. Poněvadž $\|D_\varepsilon\| < \delta$, je $|c_i' - c_i''| < \delta$ a tedy $f(c_i'') - f(c_i') < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Odtud

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon.$$

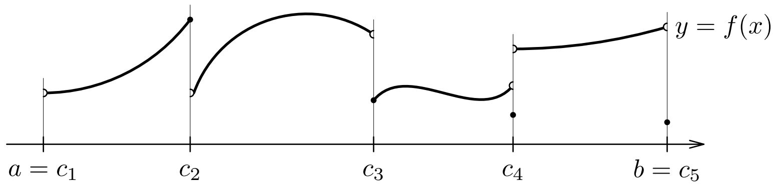
Podle věty 7.1 je tedy funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. $\square$

Zaveďme si nyní pojem funkce po částech spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice 7.4. (Po částech spojitá funkce.)

Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ po částech spojitá, je-li spojitá ve všech jeho bodech s vyjímkou konečného počtu bodů $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \langle a, b\rangle$ a v každém vnitřním bodě z nich má konečnou limitu zprava i zleva; pokud $c_1 = a$, má v něm limitu zprava a pokud $c_n = b$, má v něm limitu zleva.

Na obr. 7.6 je vyznačen graf po částech spojité funkce.



Obrázek 7.6: Funkce po částech spojitá.

existence $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ po částech spojitá

Věta 7.16. (Věta II o existenci integrálu.)

Každá po částech spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ je na něm integrovatelná.

Důkaz: Nechť $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá s případnou výjimkou bodů $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, kde $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$. Předpokládejme, že existuje $\lim\limits_{x \to c_i^+} f(x)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a existuje $\lim\limits_{x \to c_i^-} f(x)$ pro $i = 2, 3 \ldots, n$. Definujme funkci $\tilde{f}_i(x)$ na intervalu $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$ takto. Položme

$$\tilde{f}_i(c_i) = \lim_{x\to c_i^+} f(x), \quad \tilde{f}_i(c_{i+1}) = \lim_{x\to c_{i+1}^-} f(x), \quad \tilde{f}_i(x) = f(x), \text{ pro } x \in (c_i, c_{i+1}).$$

Funkce $\tilde{f}_i(x)$ je spojitá na $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$ a je tedy na $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$ integrabilní. Je na něm tedy i funkce $f(x)$ integrabilní. Podle věty 7.5 je funkce $f(x)$ integrabilní na $\langle a, b\rangle$. □

Lze dokázat existenci integrálu pro širší třídu funkcí. Platí tato věta:

podmínky existence $\int_a^b f(x)\,dx$

Věta 7.17. (Věta III o existenci integrálu.)

Nechť funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a je na něm spojitá s případnou vyjímkou konečného počtu bodů nespojitosti. Potom je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná.

Důkaz: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá ve všech bodech $x \in \langle a, b\rangle$ s případnou vyjímkou bodů $\{c_i\}_{i=1}^n$, kde $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$. Položme $d_i = \frac{1}{2}(c_i + c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Uvažujme funkci $f(x)$ na intervalech $\langle c_i, d_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Mohou nastat tyto případy:

(α) $\lim\limits_{x\to c_i^+} f(x) = f(c_i)$. Potom $f(x)$ je na intervalu $\langle c_i, d_i\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná na $\langle c_i, d_i\rangle$.

(β) $\lim\limits_{x\to c_i^+} f(x)$ existuje, ale je různá od $f(x_i)$. Avšak funkce

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in (c_i, d_i\rangle \\ \lim\limits_{x\to c_i^+} f(x) & \text{pro } x = c_i \end{cases}$$

je na intervalu $\langle c_i, d_i\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná. Podle věty 7.13 je i funkce $f(x)$ na intervalu $\langle c_i, d_i\rangle$ integrovatelná.

(γ) Neexistuje $\lim\limits_{x\to c_i^+} f(x)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a číslo $\tilde{c}_i \in (c_i, c_i + \frac{\varepsilon}{4M})$, kde $M = \sup\limits_{x\in\langle c_i, d_i\rangle} |f(x)|$. Funkce f je spojitá na intervalu $(c_i, d_i\rangle$ a tedy i na intervalu $\langle \tilde{c}_i, d_i\rangle$. Je tedy na něm integrovatelná. Podle věty 7.1 existuje dělení D_ε intervalu $\langle \tilde{c}_i, d_i\rangle$ tak, že

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dělicí body tohoto intervalu označme

$$\tilde{c}_i = x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = d_i.$$

K tomuto dělení přidáme dělicí bod $x_1 = c_i$. Označme D dělení intervalu $\langle c_i, d_i\rangle$ s dělicími body $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$. Označme

$$m_1 = \inf_{x\in\langle x_1, x_2\rangle} f(x), \qquad M_1 = \sup_{x\in\langle x_1, x_2\rangle} f(x).$$

Potom

$$S(f,D) = S(f,D_\varepsilon) + M_1(x_2 - x_1),$$
$$s(f,D) = s(f,D_\varepsilon) + m_1(x_2 - x_1).$$

Odtud dostáváme

$$S(f,D) - s(f,D) = S(f,D_\varepsilon) - s(f,D_\varepsilon) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1).$$

S ohledem na předešlé odhady platí

$$S(f,D) - s(f,D) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(\tilde{c}_i - c_i) = \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Podle věty 7.1 odtud plyne, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle c_i, d_i\rangle$ integrovatelná pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Podobně lze dokázat, že funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle d_i, c_{i+1}\rangle$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Je tedy funkce $f(x)$ integrovatelná na celém intervalu $\langle a, b\rangle$. □

Poznámka. Funkce po částech spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ je omezená na $\langle a, b\rangle$ s případnou výjimkou konečného počtu bodů nespojitostí.

Příklad 7.5. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-1,1), x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je podle příkladu 6.1 v bodě 0 nespojitá. Je na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ omezená, neboť

$$\left| 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \right| \leq 3.$$

Je tedy na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ integrace schopna.

7.4 Výpočet Riemanova integrálu

Věta 7.18.

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Potom funkce

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a v každém bodě $x \in \langle a, b\rangle$, v němž je $f(t)$ spojitá, má funkce $F(x)$ derivaci a platí

$$F'(x) = f(x). \tag{7.10}$$

Důkaz: Poněvadž f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, integrál $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ existuje podle věty 7.4 pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.

(α) Dokažme, že $F(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme $c \in \langle a, b)$ a dokažme, že $F(x)$ je v bodě c spojitá zprava. Nechť $h > 0$ je takové číslo, že $c + h \le b$. Potom

$$\int_{c}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{c+h} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{c+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt.$$

Tedy

$$F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f(t)\,dt.$$

Označíme-li $M = \sup\limits_{x \in \langle c, c+h\rangle} |f(x)|$, dostáváme

$$|F(c+h) - F(c)| \le Mh.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Potom pro $0 \le h < \delta$ je

$$|F(c+h) - F(c)| \le Mh < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Je tedy $F(x)$ spojitá zprava v bodě c. Podobně se ukáže, že $F(x)$ je spojitá zleva v každém bodě $c \in (a, b\rangle$. Je tedy $F(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$.

(β) Dokažme, že je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě $x \in \langle a, b\rangle$, potom platí $F'(x) = f(x)$. (V bodě a se $F'(x)$ chápe jako derivace zprava a v bodě b jako derivace zleva.)
Předpokládejme, že funkce $f(t)$ je v bodě $c \in \langle a, b)$ spojitá zprava. Nechť $h > 0$ je takové číslo, že $c + h < b$. Potom platí

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\left[\int_{c}^{c+h} f(t)\,dt - \int_{c}^{c+h} f(c)\,dt\right].$$

Odtud

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| \le \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt. \tag{7.11}$$

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Poněvadž funkce $f(t)$ je spojitá v bodě c, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $t \in \langle c, c+\delta)$ je $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Je-li $0 < h < \delta$, dostáváme

$$\frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon,$$

takže z (7.11) plyne

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right|<\varepsilon.$$

Je tedy

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c),$$

to jest

$$F'^{+}(c)=f(c).$$

□

Poznámka. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Nechť $x_0\in\langle a,b\rangle$. Položme

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt.$$

Nechť $G(x)$ je funkce spojitá na $\langle a,b\rangle$ a nechť $G'(x)=f(x)$ pro $x\in(a,b)$. Potom existuje konstanta C tak, že $G(x)=F(x)+C$.

Skutečně. Položme

$$H(x)=G(x)-F(x).$$

Podle věty 7.18 a předpokladů této poznámky je

$$H'(x)=f(x)-f(x)=0\qquad\text{pro } x\in(a,b),$$

takže existuje konstanta C tak, že

$$H(x)=C\qquad\text{pro } x\in(a,b).$$

Poněvadž $H(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$, platí

$$\lim_{x\to a^+}H(x)=C,\qquad\lim_{x\to b^-}H(x)=C.$$

Je tedy $H(x)=C$ pro $x\in\langle a,b\rangle$. Je tedy

$$G(x)-F(x)=C,$$

tj.

$$G(x)=F(x)+C.$$

Platí tato věta:

Věta 7.19. *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Nechť dále $\alpha,\beta\in\langle a,b\rangle$. Označme*

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt,\qquad x_0\in\langle a,b\rangle\ \textit{je libovolné.}$$

Potom existuje $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ *a platí*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

Důkaz: Podle věty 7.5 platí

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{\alpha} f(t)\,dt.$$

Je tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

□

Poznámka. Nechť

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b.$$

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v každém intervalu (c_i, c_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, a nechť v každém bodě c_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to c_i^+} f(x)$ a v každém bodě c_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to c_i^-} f(x)$. (To znamená, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ po částech spojitá.) Nechť $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Potom podle věty 7.18 je funkce

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{7.12}$$

spojitá na $\langle a, b\rangle$. Je spojitá i na každém intervalu $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. V každém vnitřním bodě $\tilde{x} \in (c_i, c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, má funkce $F(x)$ podle věty 7.18 derivaci $F'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$. Je tedy funkce $F(x)$ spojitá na intervalu $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ a $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (c_i, c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pro $\alpha, \beta, x_0 \in \langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, platí

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt. \tag{7.13}$$

Tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{\alpha} f(t)\,dt.$$

Podle věty 7.19 je

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha). \tag{7.14}$$

Nechť $G(x)$ je libovolná spojitá funkce na intervalu $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$, která je na intervalu (c_i, c_{i+1}) primitivní k funkci $f(x)$. Potom podle výše uvedené poznámky existuje konstanta C tak, že

$$G(x) = F(x) + C.$$

Je tedy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha). \tag{7.15}$$

Jestliže tedy $\alpha \in \langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $\beta \in \langle c_j, c_{j+1}\rangle$ pro $i \le j$, platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{c_{i+1}} f(t)\,dt + \sum_{k=i+1}^{j-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,dt + \int_{c_j}^{\beta} f(t)\,dt. \tag{7.16}$$

Každý z integrálů na pravé straně (7.16) lze vypočíst podle (7.15). (Není nutno používat tutéž funkcí $G(t)$.)

Platí tedy

Metoda výpočtu $\int_a^b f(x)\,dx$

Věta 7.20. (Výpočet určitého integrálu) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $c_i \in \langle a, b\rangle$ jsou taková čísla, že*

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b.$$

Nechť $f(x)$ je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť je spojitá v každém intervalu $(c_i, c_{i+1}), i = 1, \ldots, n$. Nechť funkce

$$F_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu (c_i, c_{i+1}) a nechť je spojitá na $\langle c_i, c_{i+1}\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (F_i(c_{i+1}) - F_i(c_i)).$$

Jestliže $F(x)$ je funkce spojitá na $\langle a,b\rangle$ a jestliže je primitivní k funkci $f(x)$ na každém intervalu (c_i, c_{i+1}), $i = 1,\dots,n$, potom

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Speciálním případem věty 7.19 je následující věta. (Srovnejte s definicí 7.1.)

Věta 7.21. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$. Potom $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $\alpha,\beta \in \langle a,b\rangle$ existuje a platí*

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha). \tag{7.17}$$

Důkaz: Nechť $x_0 \in \langle 0,1\rangle$. Označme $G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt =$. Podle věty 7.5 je

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{\beta} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{\beta} f(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

Podle věty (7.19) odtud plyne

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha). \tag{7.18}$$

Poněvadž $f(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$, je podle věty 7.18 $G'(x) = f(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Je tedy $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Existuje tedy $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G(x) = F(x) + c$. Z (7.18) dostáváme pak

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

□

Příklad 7.6. Vypočítejme $\int\limits_2^3 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$.

Řešení. Funkce

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \tag{7.19}$$

je spojitá na intervalu $\langle 2,3\rangle$. Funkce

$$F(x) = x^3 - x^2 + x \tag{7.20}$$

je primitivní k funkci (7.19) na intervalu $\langle 2,3\rangle$, takže podle věty 7.19 je

$$\int_2^3 (3x^2-2x+1)\,dx = [x^3-x^2+x]_2^3 = (3^3-3^2+3)-(2^3-2^2+2) = 15.$$

Příklad 7.7. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2x & \text{pro } x \in (1,2\rangle, \\ 4 & \text{pro } x \in (2,4\rangle. \end{cases}$$

Vypočítejte $A = \int\limits_{0{,}5}^{3{,}5} f(x)\,dx$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je po částech spojitá.
Způsob 1. Určeme funkci $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, např. pro $x_0 = 0$, $x \in \langle 0,4\rangle$. Položme

$$F_1(x) = \int_0^x (2t+1)\,dt = [t^2+t]_0^x = x^2+x, \quad x \in \langle 0,1\rangle$$

$$F_2(x) = \int_0^1 (2t+1)\,dt + \int_1^x 2t\,dt = 2 + [t^2]_1^x = 2 + x^2 - 1 = x^2+1, \quad x \in (1,2\rangle$$

$$F_3(x) = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x 4\,dt = 5 + [4t]_2^x = 5 + 4x - 4\cdot 2 = 4x-3, \quad x \in (2,4\rangle$$

Tedy

$$F(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle, \\ x^2+1 & \text{pro } x \in (1,2\rangle, \\ 4x-3 & \text{pro } x \in (2,4\rangle. \end{cases}$$

Je tedy

$$A = \int_{0{,}5}^{3{,}5} f(x)\,dx = [F(x)]_{0{,}5}^{3{,}5} = (4\cdot 3{,}5-3)-(0{,}5^2+0{,}5) = 11-0{,}75 = 10{,}25.$$

Způsob 2. Integrál $A = \int_{0,5}^{3,5} f(t)\,dt$ napišme jako $A = A_1 + A_2 + A_3$, kde

$$A_1 = \int_{0,5}^{1} f(t)\,dt = \int_{0,5}^{1} (2t+1)\,dt = [t^2+t]_{0,5}^{1} = 1{,}25,$$
$$A_2 = \int_{1}^{2} f(t)\,dt = \int_{1}^{2} 2t\,dt = [t^2]_1^2 = 3,$$
$$A_3 = \int_{2}^{3,5} f(t)\,dt = \int_{2}^{3,5} 4\,dt = [4t]_2^{3,5} = 6.$$

Je tedy $A = 1{,}25 + 3 + 6$, takže $A = 10{,}25$.

7.4.1 Metoda per partes a metoda substituční pro výpočet určitého integrálu

Ukažme si nyní věty pro výpočet určitého integrálu odpovídající metodě per partes a metodám substitučním pro výpočet neurčitého integrálu.

metoda per partes

Věta 7.22. (Metoda per partes.)

Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$. Potom platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Důkaz: Derivováním $u(x)v(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ dostáváme

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Je tedy funkce $u(v)v(x)$ primitivní k funkci $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Je tedy podle věty 7.21

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = [u(x)v(x)]_a^b \tag{7.21}$$

Užitím věty 7.7 lze levou stranu v (7.21) přepsat na tvar

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \tag{7.22}$$

Tedy z (7.21), (7.22) dostáváme

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \qquad \square$$

Příklad 7.8. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx.$$

Řešení. a) K výpočtu použijeme metodu per partes

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx &= \begin{vmatrix} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} = \\
&= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot 1\,dx = \\
&= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-0\cdot\cos 0) + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1.
\end{aligned}$$

b) Integrál lze řešit též tak, že určíme napřed $\int x\sin x\,dx$. Použijeme metodu per partes. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\int x\sin x\,dx &= \begin{vmatrix} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} = \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx = \\
&= -x\cos x + \sin x + c.
\end{aligned}$$

Jako primitivní funkci k funkci $x\sin x$ zvolíme

$$F(x) = -x\cos x + \sin x.$$

Podle věty 7.21 pak dostáváme

$$A = [-x\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Příklad 7.9. Určeme

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x\,dx$$

pro $n = 1, 2, \ldots, 20$.

Řešení. K výpočtu použijeme metodu per partes. Dostáváme

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{e}\int\limits_0^1 x^n e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{e}\left([x^n e^x]_0^1 - \int\limits_0^1 nx^{n-1}e^x\,dx \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$I_n = 1 - nI_{n-1}.$$

I_n lze vypočíst, známe-li I_{n-1}. Vypočítejme tedy I_1.

$$I_1 = \frac{1}{e}\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \frac{1}{e}\left([xe^x]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx \right) = \frac{1}{e}.$$

Integrál I_n se tedy určí rekurentní formulí

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \qquad I_1 = \frac{1}{e}. \tag{7.23}$$

Uveďme si hodnoty I_n pro $n = 1, 2, \ldots, 20$, obdržené numerickou realizací rekurentní formule (7.23) na počítači při výpočtech přibližně s 10 ciframi. Obdržíme např. $I_1 = 0{,}367879$, $I_2 = 0{,}264241, \ldots, I_{20} = -200{,}0$. Poněvadž integrand $x^n e^x > 0$ pro všechna n, je $I_n > 0$. Je tedy I_{20} evidentně chybný.

Na tomto příkladě chci ukázat, že ne každý výpočtový postup dá při numerickém výpočtu dobrý výsledek, i když z matematického hlediska je postup správný.

Věta 7.23. (I. věta o substituci.)

výpočet $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Nechť funkce $x = \varphi(t)$ má na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$. Potom platí

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \tag{7.24}$$

Důkaz: Podle předpokladů je funkce $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ spojitá na $\langle\alpha, \beta\rangle$ a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$. Tedy oba integrály v (7.24) existují.

Nechť funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $\varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$. Poněvadž $[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, je funkce $F(\varphi(t))$ primitivní k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Je tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \tag{7.25}$$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \tag{7.26}$$

Ze vztahů (7.25), (7.26) vyplývá rovnice (7.24). □

Příklad 7.10. Vypočítejte

$$A = \int\limits_{2}^{4} t^2\sqrt{t^3+2}\,dt.$$

Zaveďme substituci

$$x = \varphi(t), \quad \text{kde} \quad \varphi(t) = t^3 + 2.$$

Odtud $\varphi'(t) = 3t^2$. Je tedy

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{2}^{4} t^2\sqrt{t^3+2}\,dt = \frac{1}{3}\int\limits_{2}^{4} \sqrt{t^3+2}\cdot 3t^2\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\int\limits_{\varphi(2)}^{\varphi(4)} \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{10}^{66} \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{10}^{66}, \end{aligned}$$

takže

$$A = \frac{2}{9}(\sqrt{66^3} - \sqrt{10^3}), \text{ to jest } A = \frac{44}{3}\sqrt{66} - \frac{20}{9}\sqrt{10}.$$

výpočet $\int_a^b f(x)\,dx$ (substituce)

Věta 7.24. (II. věta o substituci.)

Nechť funkce $x = \varphi(t)$ má na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a nechť existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$ na intervalu o koncových bodech $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Potom platí

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Důkaz: Důkaz je analogický jako důkaz minulé věty. V této větě je další předpoklad – existence inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$, takže ze vztahů $a = \varphi(\alpha)$,

$b = \varphi(b)$ lze určit α, β. $\square$

Příklad 7.11. Vypočítejte

$$A = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

Řešení. Zaveďme substituci

$$x = \varphi(t), \quad \text{kde} \quad \varphi(t) = 2 \sin t.$$

Pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je $x = \varphi(t) \in \langle 0, 2 \rangle$.

Funkce $x = \varphi(t)$ má na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t) = 2 \cos t$. K funkci $x = \varphi(t)$ existuje funkce inverzní $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{2}$. Podle věty 7.24 platí

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t\, dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right] = \pi. \end{aligned}$$

Je tedy

$$A = \pi.$$

Poznámka. Příklady 7.10 a 7.11 lze počítat i použitím věty 7.21

7.5 Nevlastní integrály

Při zavádění určitého integrálu z funkce $f(x)$ jsme předpokládali, že

1. a, b jsou reálná (konečná) čísla,
2. $f(x)$ je omezená na $\langle a, b \rangle$.

Zavedeme si nyní integrály pro případy, že tyto předpoklady nebudou splněny. To vede k zavedení tzv. *nevlastních integrálů*.

Není-li funkce omezena, mluvíme o nevlastním integrálu vzhledem k funkci. Jsou-li jedno nebo obě čísla a, b nevlastní, mluvíme o nevlastním integrálu vzhledem k intervalu.

Nevlastní integrály vzhledem k intervalu

nevlastní integrály vzhledem k intervalu

Definujme integrály

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

takto:

Integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Nechť funkce f je integrabilní v každém intervalu $\langle a, X\rangle$, $X \in \mathbb{R}$. Potom $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ nazýváme nevlastním integrálem vzhledem k intervalu. Tyto integrály dělíme do dvou skupin.

a) Jestliže existuje

$$\lim_{X\to\infty} \int\limits_a^X f(x)\,dx, \tag{7.27}$$

nazýváme $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ konvergentním a hodnotu limity (7.27) hodnotou nevlastního integrálu $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

b) Jestliže neexistuje limita (7.27), nazýváme $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ divergentním. Divergentní integrály pak zařazujeme dále do těchto skupin.

α) Jestliže

$$\lim_{X\to\infty} \int\limits_a^X f(x)\,dx = \infty\ (-\infty),$$

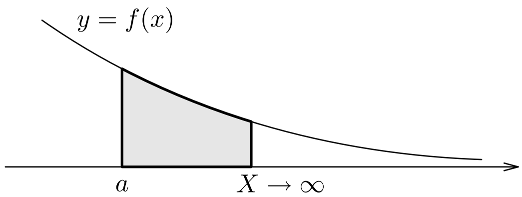
říkáme, že $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$.

β) Jestliže

$$\lim_{X\to\infty} \int\limits_a^X f(x)\,dx$$

neexistuje a není ani ∞ ani $-\infty$, říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ osciluje.

Význam definice $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ je patrný z obrázku 7.7.



Obrázek 7.7: Definice nevlastního integrálu $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Příklad 7.12. Vyšetřete integrál

$$A = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}.$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\lim_{X\to\infty}\int\limits_1^X \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{X\to\infty}[\operatorname{arctg} x]_1^X = \lim_{X\to\infty}(\operatorname{arctg} X - \operatorname{arctg} 1) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Tedy $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ je konvergentní a jeho hodnota je $\frac{\pi}{4}$. Píšeme

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Integrál $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Nechť funkce $f(x)$ je integrabilní v každém intervalu $\langle X, b\rangle$. Potom $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ nazýváme nevlastním integrálem vzhledem k intervalu. Tyto integrály dělíme do dvou skupin.

a) Jestliže existuje

$$\lim_{X\to-\infty}\int\limits_X^b f(x)\,dx, \tag{7.28}$$

nazýváme integrál $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ konvergentním a hodnotu limity (7.28) hodnotou nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

b) Jestliže neexistuje limita (7.28), nazýváme $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ divergentním. Divergentní integrály zařazujeme pak do dvou skupin.

α) Jestliže

$$\lim_{X\to-\infty}\int\limits_X^b f(x)\,dx = \infty\ (-\infty),$$

říkáme, že $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ diverguje k $= \infty$ $(-\infty)$.

β) Jestliže

$$\lim_{X\to-\infty}\int\limits_X^b f(x)\,dx$$

neexistuje a není ∞ ani $-\infty$, říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ osciluje.

Integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Zvolme $c\in\mathbb{R}$. Řekneme, že $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje když a jenom když konvergují oba integrály

$$\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Konvergují-li oba tyto nevlastní integrály, jejich součet pak nazveme hodnotou integrálu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, to jest

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Hodnota $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nezávisí na volbě čísla c.

Ostatní pojmy jsou analogické jako u $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

Příklad 7.13. Vyšetřete integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Zvolme $c=0$. Vyšetřeme tedy integrály

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{x^2+1}, \qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Zřejmě

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{x^2+1} = \lim_{X\to-\infty}\int\limits_{X}^{0}\frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{X\to-\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_X^0 = -\infty.$$

Podobně $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}=\infty$. Tedy $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}$ diverguje.

Nevlastní integrály vzhledem k funkci

nevlastní integrály vzhledem k funkci

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na $\langle a, b)$ a nechť není na něm omezena. Potom $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se nazývá nevlastním integrálem vzhledem k funkci.

Předpokládejme, že $f(x)$ není omezena na $\langle a, b\rangle$, ale je omezena na každém intervalu $\langle a+\varepsilon, b\rangle$, kde $0 < \varepsilon < b - a$. Vyšetřujme

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{7.29}$$

Jestliže tato limita existuje a je vlastní, nazýváme ji hodnotou nevlastního integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a píšeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Jestliže limita (7.29) neexistuje nebo je nevlastní, potom nazýváme integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ divergentním. Říkáme též, že diverguje. Divergentní integrály dělíme pak do dvou skupin.

$\alpha)$ Jestliže

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \infty \ (-\infty),$$

říkáme, že $\int\limits^b f(x)\,dx$ diverguje k $= \infty$ $(-\infty)$.

$\beta)$ Jestliže limita (7.29) neexistuje ani jako nevlastní, říkáme, že integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ osciluje.

Podobně se vyšetřuje integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kde $f(x)$ není na $\langle a, b\rangle$ omezena, ale je omezena v každém intervalu $\langle a, b-\varepsilon\rangle$, kde $0 < \varepsilon < b - a$. Definujeme pak

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Příklad 7.14. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x}$ není omezena na intervalu $(0,1\rangle$. Je však omezena na každém intervalu $\langle\varepsilon,1\rangle$, kde $0<\varepsilon<1$. Počítejme

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0_+}[\ln x]_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0_+}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\infty.$$

Daný integrál diverguje k ∞.

Příklad 7.15. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ není omezena na intervalu $\langle 0,1)$. Je však omezena na intervalu $\langle 0,1-\varepsilon\rangle$ pro každé ε, pro něž $0<\varepsilon<1$. Počítejme

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Dostáváme

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[-2\sqrt{1-x}\,\right]_{0}^{1-\varepsilon}=-2\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)=2.$$

Tedy $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2$. Integrál konverguje.

Poznámka. Jiné nevlastní integrály $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$ převádíme na součet nevlastních integrálů nahoře uvedených typů.

numerický výpočet určitého integrálu

7.6 Numerický výpočet určitého integrálu

Uvedli jsme si třídy funkcí integrace schopných na daném intervalu. Primitivní funkce některých funkcí, i když jsou na první pohled jednoduché, nelze vypočítat užitím elementárních funkcí. Jako příklad uveďme $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Někdy je zapotřebí integrovat funkce, jejichž analytické vyjádření neznáme, známe jen jejich funkční hodnoty v určitých bodech. Integrály z takovýchto funkcí počítáme numericky. V dalším textu si nastíníme některé metody numerického řešení určitého integrálu.

Věta 7.3 nabízí náhradu $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$ Riemanovým integrálním součtem. Jestliže známe jenom hodnoty integrandu $f(x)$ v bodech $\xi_i\in\langle a,b\rangle$, $i=1,2,\dots,n$, zvolíme body x_i, $i=1,2,\dots,n$, tak, že

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b,\quad \xi_i\in\langle x_i,x_{i+1}\rangle,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Potom položíme

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i). \tag{7.30}$$

Tato aproximace $\int_a^b f(x)\,dx$ nevypovídá nic o chybě aproximace. Chybu lze odhadnout jen v případě, že máme další informace o funkci $f(x)$.

Obdélníková metoda výpočtu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Předpokládejme, že známe analytické vyjádření funkce $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ na n částečných intervalů délky $h=\frac{b-a}{n}$, kde $n\in\mathbb{N}$ je zvolené číslo. Položme $x_i=a+(i-1)h$, $i=1,2,\ldots,n+1$. Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$. Označme $M_1=\max|f'(x)|$ pro $x\in\langle a,b\rangle$. Označíme-li $f_i=f(x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(f_1+f_2+\cdots+f_n)+R, \tag{7.31}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(f_2+f_3+\cdots+f_{n+1})+\tilde{R}, \tag{7.32}$$

kde R, $\tilde{R}$ sice neznáme, ale lze ukázat, že

$$|R|\le M_1(b-a)h, \qquad |\tilde{R}|\le M_1(b-a)h.$$

Zanedbáme-li v (7.31), resp. (7.32) hodnotu R, resp. $\tilde{R}$, dostáváme pro výpočet $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(f_1+f_2+\cdots+f_n), \tag{7.33}$$

resp.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(f_2+f_3+\cdots+f_{n+1}). \tag{7.34}$$

Vzorce (7.33), (7.34) nazýváme obdélníkovou metodou výpočtu $\int_a^b f(x)\,dx$. Jejich použitím se dopouštíme chyby R, resp. $\tilde{R}$. V případě, že $f(x)$ je polynom stupně 0, tj. $f(x)=konst.$, potom $M_1=0$, takže $R=\tilde{R}=0$. Tedy *obdélníkové metody jsou přesné pro polynomy stupně* 0.

Lichoběžníková metoda na výpočet $\int_a^b f(x)\,dx$.

Předpokládejme, že známe analytické vyjádření funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů délky $h = \frac{b-a}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je zvolené číslo. Položme

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Nechť funkce $f(x)$ má na $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci $f''(x)$. Označme $M_2 = \max |f''(x)|$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Označíme-li $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_n + f_{n+1}) + R, \tag{7.35}$$

kde R sice neznáme, ale lze dokázat, že

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2. \tag{7.36}$$

Zanedbáme-li v (7.35) hodnotu R, dostáváme

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_n + f_{n+1}). \tag{7.37}$$

Tento vzorec nazýváme lichoběžníkovou metodou výpočtu $\int_a^b f(x)\,dx$. Jejím použitím se dopouštíme chyby R, jejíž odhad je uveden v (7.36). V případě, že $f(x)$ je polynom stupně ≤ 1, t.j. jestliže $f(x) = Ax + B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, je $f''(x) = 0$, takže $M_2 = 0$. Ze vztahu (7.36) pak vyplývá, že $R = 0$. *Je tedy lichoběžníková metoda přesná pro polynomy* 1. *stupně.*

Vzorec (7.37) obdržíme jako průměrnou hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ ze vztahů (7.31), (7.32).

Simpsonova metoda na výpočet $\int_a^b f(x)\,dx$.

Předpokládejme, že známe analytické vyjádření funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na $2n$ (t.j. na sudý počet) částečných intervalů délky $h = \frac{b-a}{2n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je zvolené číslo. Položme

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n+1.$$

Nechť funkce $f(x)$ má na $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci 4. řádu. Označme

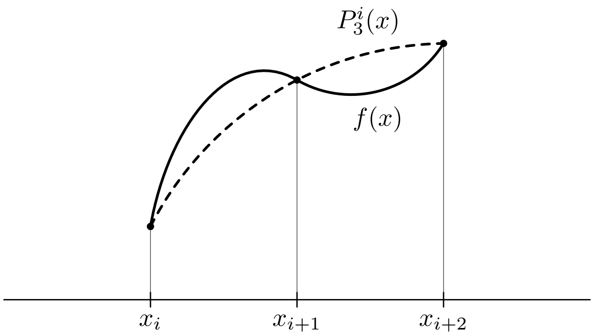
$$M_4 = \max |f^{(4)}(x)|$$

pro $x \in \langle a, b \rangle$. Položme opět $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ aproximujeme funkcí $\tilde{f}(x)$, definovanou takto

$$\tilde{f}(x) = P_3^i(x), \quad x \in \langle x_i, x_{i+2} \rangle, \quad i = 1, 3, \ldots, 2n-1, \tag{7.38}$$

kde $P_3^i(x)$ je polynom stupně ≤ 2, který je určen těmito podmínkami (viz. obr. 7.8)

$$P_3^i(x_i) = f_i, \quad P_3^i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad P_3^i(x_{i+2}) = f_{i+2}. \tag{7.39}$$



Obrázek 7.8: Aproximace $f(x)$ polynomem $P_3^i(x)$.

Výpočet $\int_a^b f(x)\,dx$ aproximujeme výpočtem $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$. Platí pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}(f_1+4f_2+2f_3+4f_4+2f_5+\cdots+2f_{2n-1}+4f_{2n}+f_{2n+1})+R, \tag{7.40}$$

kde R sice přesně neznáme, avšak lze dokázat, že

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4. \tag{7.41}$$

Zanedbáním R dostáváme tzv. *Simpsonův vzorec pro výpočet* $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(f_1+4f_2+2f_3+4f_4+2f_5+\cdots+2f_{2n-1}+4f_{2n}+f_{2n+1}). \tag{7.42}$$

Jestliže $f(x)$ je polynom stupně ≤ 3, je $f^{(4)}(x) = 0$, takže R, určeno vztahem (7.41), je rovno 0. Je tedy *Simpsonova metoda přesná pro polynomy stupně* ≤ 3.

Příklad 7.16. Vypočítejte integrál

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

a) lichoběžníkovou metodou pro $n = 4$,
b) Simpsonovou metodou pro $2n = 4$.

Řešení. Interval $\langle 1, 2\rangle$ rozdělíme na 4 částečné intervaly délky $h = \frac{2-1}{4} =$
$= 0{,}25$. Položme

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1{,}25; \quad x_3 = 1{,}5; \quad x_4 = 1{,}75; \quad x_5 = 2.$$

Označme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Položme

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Dostáváme

x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
f_i	0,8415	0,7592	0,6650	0,5623	0,4546

Je tedy

$$\text{a)} \quad \int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx =$$
$$= \frac{0{,}25}{2}(0{,}8415 + 2\cdot 0{,}7592 + 2\cdot 0{,}6650 + 2\cdot 0{,}5623 + 0{,}4546) = 0{,}6586,$$
$$\text{b)} \quad \int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{12}(0{,}8415 + 4\cdot 0{,}7592 + 2\cdot 0{,}6650 + 4\cdot 0{,}5623 + 0{,}4546) = 0{,}6593.$$

7.7 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

V této kapitole se zavádí definicí 7.2 určitý integrál $\int_a^b f(x)\, dx$, kde $a < b$. Větu 7.2 by bylo možno použít jako alternativu k zavedení určitého integrálu pomocí integrálních součtů. Dále se definicí 7.3 rozšiřuje definice integrálu $\int_a^b f(x)\, dx$ pro případ $a = b$, $a > b$. Ve větách 7.7–7.11 se uvádějí důležité vlastnosti určitého integrálu $\int_a^b f(x)\, dx$.

V podkapitole 7.3 se uvádějí třídy funkcí, které jsou integrace schopné. Věta 7.21 udává způsob výpočtu určitého integrálu pro dostatečně širokou třídu funkcí. Dále jsou uvedeny metody per partes a metoda substituční pro výpočet určitého integrálu.

Určitý integrál je dále zobecněn na integrály nevlastní a to na nevlastní integrály vzhledem k intervalu a na nevlastní integrály vzhledem k funkci.

V kapitole jsou nastíněny některé numerické metody na řešení určitého integrálu.

Úlohy

1. Vysvětlete zavedení určitého integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2. Vyslovte věty o existenci $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. Vysvětlete výpočet $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ pomocí primitivních funkcí.

4. Vysvětlete metodu per partes pro výpočet určitého integrálu.

5. Vyslovte větu o výpočtu určitého integrálu substitucí.

6. Co jsou to nevlastní integrály? Jak je dělíme a jak je počítáme?

7. Co víte o numerickém řešení určitého integrálu?

8. Vypočítejte hodnotu integrálu

a) $\int\limits_0^2 (3x^3 - 2x + 5)\,dx$ [18]

b) $\int\limits_{-3}^2 (3x^3 - x^2 + 1)\,dx$ [$-\frac{665}{12}$]

c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$ [0]

d) $\int\limits_a^b e^x\,dx$ [$e^b - e^a$]

e) $\int\limits_1^2 (x + \frac{1}{x})\,dx$ [$\frac{3}{2} + \ln 2$]

f) $\int\limits_1^2 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2\,dx$ [$\ln 2 + \frac{7}{2}$]

g) $\int\limits_1^2 (\sqrt[3]{x} + 1)^3\,dx$ [$-\frac{31}{20} + \frac{18}{5}\sqrt[3]{4} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{2}$]

h) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{cotg} x)\,dx$ [neexistuje]

9. Vypočítejte hodnotu integrálu

a) $\int\limits_0^{\pi} x \sin x\,dx$ [π]

b) $\int_{0}^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$ $[4\pi]$

c) $\int_{1}^{2} x e^x \, dx$ $[e^2]$

d) $\int_{2}^{4} (x \ln x + 3) \, dx$ $[14 \ln 2 + 3]$

e) $\int_{0}^{1} x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$ $[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2]$

10. Vypočítejte hodnotu integrálu

a) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x}$ $[\ln 3 - \ln 2]$

b) $\int_{2}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1} \, dx$ $[-\frac{1}{2} \ln 7 - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi]$

c) $\int_{2}^{3} \frac{2\,dx}{x-4}$ $[-2 \ln 2]$

d) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x+6}$ $[2 \ln 2 - \ln 3]$

e) $\int_{1}^{2} \frac{x^4+1}{x^3+1} \, dx$ $[\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2]$

f) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} 3x\sqrt{1-x^2} \, dx$ $[-\frac{3}{8}\sqrt{3} + 1]$

g) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ $[-\frac{1}{20} + \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2]$

11. Vypočítejte hodnotu integrálu

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$ $[\frac{3}{16}]$

b) $\int_{0}^{1} x e^{2x^2} \, dx$ $[\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}]$

c) $\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$ $[\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2}]$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x^2 \sin(x^3) \, dx$ $[-\frac{1}{3} \cos(\pi^3) + \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi^3}{64})]$

12. Vypočítejte hodnotu integrálu

a) $\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \, dx$ $[\frac{12}{5}]$

b) $\int_{1}^{2} \frac{3\,dx}{\sqrt{2-x}}$ $[6]$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ $[\frac{\pi}{4}]$

d) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2}$ $[\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}]$

e) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ [$\ln 2$]

13. Vypočítejte hodnotu integrálu, pokud existuje

a) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2\,dx}{(x-1)^2}$ [2]

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x+2}$ [diverguje k $+\infty$]

c) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ [$\frac{1}{2}$]

d) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$ [-1]

e) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x-1}$ [diverguje]

f) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+x}\,dx$ [diverguje k $+\infty$]

g) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ [$\frac{8}{3}$]

14. Vypočítejte numericky integrály zadané v 10f) a v 11c) obdélníkovou a Simpsonovou formulí a porovnejte obdrženou hodnotu s přesným výsledkem.

- Limita a spojitost funkcí více proměnných
- Parciální derivace
- Totální diferenciál a Taylorova věta
- Extrémy funkcí více proměnných
- Shrnutí, úlohy

8. Funkce n–proměnných

Cíl kapitoly

- Seznámit se s pojmy vnitřní bod, hromadný bod, hraniční bod a izolovaný bod množiny, zavést pojem oblasti a uzavřené oblasti.
- Seznámit se s pojmem limity a spojitosti funkce více proměnných.
- Seznámit se s pojmem parciálních derivací funkcí více prommměných.

Časová zátěž

- 20 hodin

Zavedení několika základních pojmů

Uvažujme prostor $\mathbb{E}_n$. V postoru $\mathbb{E}_n$ lze zavést metriku ρ rozmanitým způsobem. Omezíme se zde na dvě metriky, označme je ρ_2, ρ_3. Jestliže $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{E}_n$, $B = [b_1, \ldots, b_n] \in \mathbb{E}_n$, potom

$$\rho_2(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}, \tag{8.1}$$

$$\rho_3(A, B) = \max_{i=1,\ldots,n} |a_i - b_i|. \tag{8.2}$$

Většinou budeme pracovat s metrikou definovanou vztahem (8.1) Tam, kde není třeba dělat rozdílu mezi ρ_2, ρ_3 budeme vzdálenost označovat ρ.

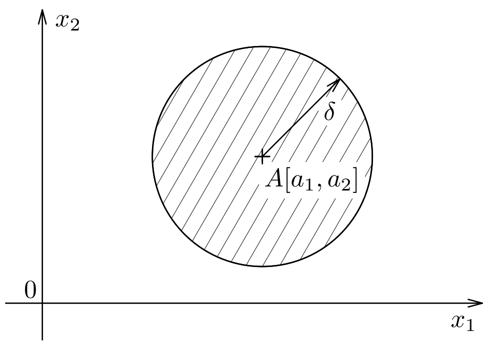
Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

Zaveďme si pojem okolí bodu $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{E}_n$.

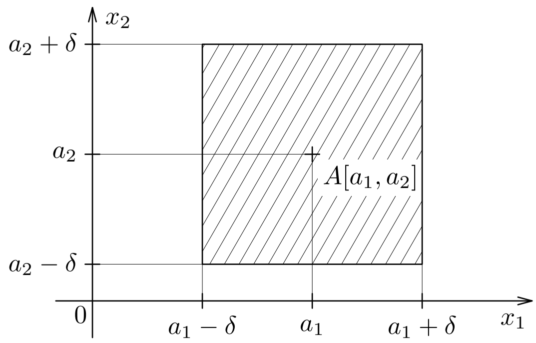
Okolí bodu

> Nechť $A \in \mathbb{E}_n$, $\delta > 0$, ρ je metrika v $\mathbb{E}_n$. Potom množinu
>
> $$U_\delta = \{X \in \mathbb{E}_n : \ \rho(A, X) < \delta\}$$
>
> nazveme δ–okolím bodu A.

Na obrázku 8.1 je znázorněno δ–okolí bodu $A \in \mathbb{E}_2$ pomocí metriky ρ_2 a na obr. 8.2 je znázorněno δ–okolí bodu A pomocí metriky ρ_3.



Obrázek 8.1: Okolí $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{E}_2 : \ \rho_2(A, X) < \delta\}$.



Obrázek 8.2: Okolí $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{E}_2 :\ \rho_3(A, X) < \delta\}$.

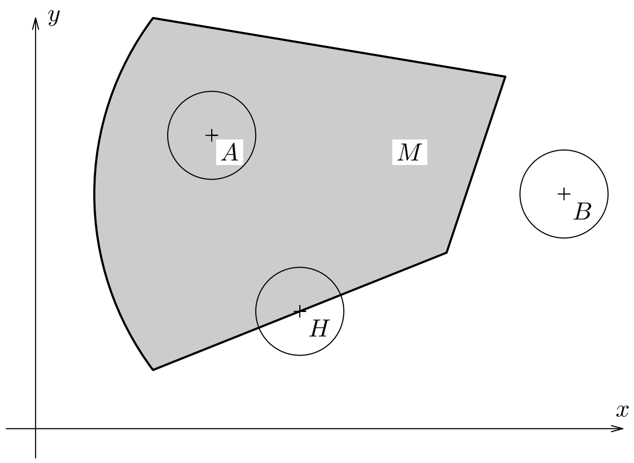
Připomeňme, že jsme zavedli množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Definovali jsme okolí $U_\delta(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$ vztahem $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - a| < \delta\}$. Zde $|x - a|$ je vzdálenost bodů a, x, tedy $\rho(a, x) = |x - a|$. Tato metrika ρ je totožná s metrikou ρ_2, resp. ρ_3 pro $n = 1$. Dále jsme definovali $U_\delta(\infty)$ a $U_\delta(-\infty)$ takto. Nechť $\delta \in \mathbb{R}$. Potom $U_\delta(\infty) = (\delta, \infty)$ a $U_\delta(-\infty) = (-\infty, \delta)$.

Vnitřní bod, hromadný bod a hraniční bod množiny $M \subseteq \mathbb{E}_n$

vnitřní bod

vnější bod

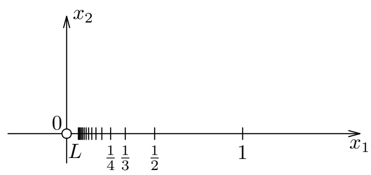
Nechť $M \subseteq \mathbb{E}_n$. Bod $A \in \mathbb{E}_n$ nazveme vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(A) \subset M$.
Bod $B \in \mathbb{E}_n$ nazveme vnějším bodem množiny M, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(B) \cap M = \emptyset$, to jest, jestliže žádný bod tohoto okolí nepatří do množiny M. Viz obr. 8.3.



Obrázek 8.3: Vnitřní, vnější a hraniční bod množiny.

hromadný bod

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}_n$. Bod $L \in \mathbb{E}_n$ nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže v každém jeho okolí leží bod množiny M různý od L (viz obr. 8.4). Bod L může, ale nemusí patřit do množiny M.



Obrázek 8.4: Hromadný bod množiny.

izolovaný bod

Bod $A \in M \subseteq E_n$ nazýváme izolovaným, jestliže existuje takové okolí $U_\delta(A)$, že $U_\delta(A) \cap M = \{A\}$.

hraniční bod

Nechť $M \subseteq E_n$. Bod H se nazývá hraničním bodem množiny M, jestliže v každém jeho okolí leží body, které patří do množiny M a body které nepatří do M. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí* množiny M.

otevřená množina

Množinu $M \subseteq \mathbb{E}_n$ nazýváme *otevřenou*, jestliže všechny její body jsou jejími vnitřními body. Obsahuje-li množina $M \subseteq \mathbb{E}_n$ všechny své hraniční body, nazývá se *uzavřenou*.

oblast

Množinu M nazveme oblastí, jestliže je otevřená a jestliže ke každým dvěma bodům $A, B \in M$ existují body $P_1, P_2, \ldots, P_m$ tak, že $P_1 = A$, $P_m = B$ a každá z úseček $\overline{P_i P_{i+1}}$ leží v M. Příkladem oblasti je množina $\{X \in \mathbb{E}_n : \ \varrho(A, X) < \varepsilon\}$, kde A je daný bod a ε je dané kladné číslo.

Poznámka 1. Každý hraniční bod množiny M je jejím hromadným bodem. Opak vždy neplatí. Na obr. 8.3 je bod A hromadným bodem množiny M, ale není jejím hraničním bodem.

8.1 Limita a spojitost funkcí více proměnných

Před započetím studia této podkapitoly si zopakujte pojmy limita funkce jedné proměnné v bodě, spojitost funkce jedné proměnné v bodě, věty o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí a též větu o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí jedné proměnné.

Připomeňme si pojem reálné funkce n–proměnných.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom zobrazení f množiny D do $\mathbb{E}_1$ nazýváme *reálnou funkcí n-proměnných*. Označíme-li $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, lze tuto funkci zapsat jako

$$z = f(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \text{resp.} \quad z = f(X).$$

Nemůže-li dojít k omylu, budeme často v další části textu místo termínu

„reálné funkce n-proměnných“ používat jednoduše termín „funkce“.

Poznámka. Proměnné funkcí n-proměnných budeme většinou označovat $x_1, x_2, \dots, x_n$. Je-li těchto proměnných jen několik, někdy pro jejich označení použijeme např. označení x, y, z, u, t nebo označení obvyklé příslušné aplikaci.

Poznámka. Je-li f funkce n-proměnných zadaná předpisem bez uvedení definičního oboru, rozumíme jejím definičním oborem množinu všech bodů $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro něž má uvedený předpis význam.

Příklad 8.1. Určete definiční obor funkce

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(1 - x - y). \tag{8.3}$$

Řešení. Poněvadž definiční obor funkce (8.3) není uveden, rozumí se jím množina všech bodů $[x, y]$, pro něž lze výraz na pravé straně (8.3) vypočítat. Zřejmě jsou to ty body $[x, y]$, pro něž platí

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - x - y > 0. \tag{8.4}$$

Odtud dostáváme

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad x + y < 1. \tag{8.5}$$

Rovnicí $x^2 + y^2 = 4$ je definovaná kružnice k se středem v počátku o poloměru 2. Označme $A_1 \subset \mathbb{E}_2$ množinu těch bodů $[x, y]$, které leží uvnitř kružnice k a $A_2 \subset \mathbb{E}_2$ množinu těch bodů, které leží vně kružnice k. Poněvadž bod $[0, 0] \in A_1$ vyhovuje nerovnici

$$x^2 + y^2 < 4, \tag{8.6}$$

všechny body z A_1 vyhovující rovněž nerovnici (8.6) a všechny body $[x, y] \in A_2$ vyhovují nerovnici

$$x^2 + y^2 > 4. \tag{8.7}$$

Nerovnici

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

vyhovují tedy všechny body $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, které leží uvnitř a na kružnici k.

Rovnicí $x + y = 1$ je definovaná přímka, která protíná osu x v bodě $[1, 0]$ a osu y v bodě $[0, 1]$. Tato přímka rozděluje rovinu $(0xy)$ na dvě poloroviny B_1, B_2. Označení volme tak, že počátek $0 = [0, 0] \in B_1$. Poněvadž bod $[0, 0]$ vyhovuje nerovnici

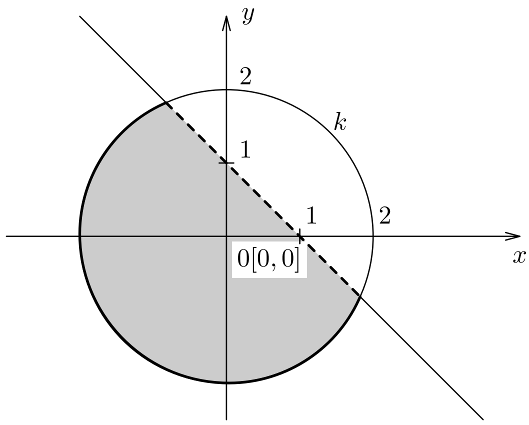
$$x + y < 1, \tag{8.8}$$

vyhovují nerovnici (8.8) všechny body $[x, y] \in B_1$ a pro body $[x, y] \in B_2$ platí $x + y > 1$.

Je tedy definičním oborem funkce (8.3) množina všech bodů $[x, y] \in B_1$, které leží uvnitř a na obvodu kružnice k. Viz obr. 8.5.

Poznámka. Uvažujme funkci jedné proměnné

$$z = 3x_1 + 1. \tag{8.9}$$



Obrázek 8.5: Definiční obor funkce (8.3)

Tuto funkci lze přepsat na tvar, obsahující více proměnných, např. na funkci

$$z = 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1. \tag{8.10}$$

Potom (8.10) a tedy i (8.9) lze chápat jako funkci tří proměnných x_1, x_2, x_3. Budeme říkat, že funkce (8.9) vznikla z (8.10) vypuštěním nevýznamných proměnných x_2, x_3, resp. že funkce (8.10) vznikla z (8.9) přidáním nevýznamných proměnných x_2, x_3.

Definice 8.1.

Nechť

$$z = f(x_1, \dots, x_n), \text{ pro } [x_1, \dots, x_n] \in D \subseteq \mathbb{E}_n,$$
$$z = g(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m), \text{ pro } [x_1, \dots, x_m] \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{E}_m, \quad m > n,$$

a nechť

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) \text{ pro } [x_1, \dots, x_m] \in \tilde{D}.$$

Potom říkáme že funkce f vznikla vypuštěním nevýznamných proměnných funkce g, resp., že funkce g vznikla přidáním nevýznamných proměnných k proměnným funkce f.

Limita funkce

limita funkce

Zaveďme si nyní pojem limity reálné funkce n proměnných.

Definice 8.2. (Limita funkce)

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$. Řekneme, že funkce

$$z = f(x_1, \dots, x_n),$$

má v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0] \in \mathbb{E}_n$ limitu A a píšeme

$$\lim_{X \to X^0} f(X) = A, \qquad A \in \mathbb{R}^*,$$

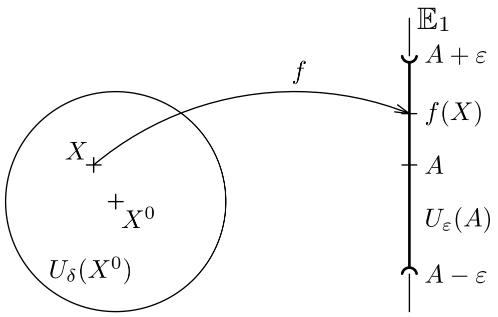
jestliže ke každému $U_\varepsilon(A)$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že

1. funkce $f(X)$ je definovaná pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$, $X \neq X^0$,
2. pro tato X platí

$$f(X) \in U_\varepsilon(A).$$

Z obr. 8.6 je patrný význam definice

$$\lim_{X \to X^0} f(X) = A, \quad \text{kde } A \in \mathbb{E}_1.$$



Obrázek 8.6: $\lim\limits_{X \to X^0} f(X) = A,\ A \in \mathbb{R}.$

Poznámka. V bodě X^0 funkce f může, ale nemusí být definovaná. Je-li v něm definovaná, nemusí být $f(X^0)$ rovno A.

Z obr. 8.7 je patrný význam definice

$$\lim_{X \to X^0} f(X) = \infty$$

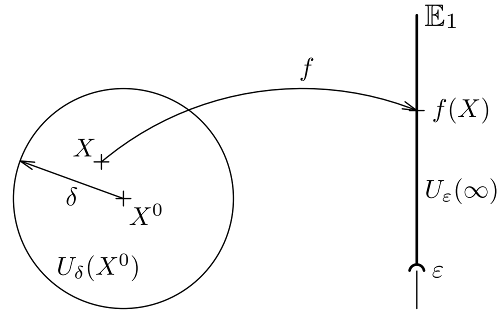
a z obr. 8.8 je patrný význam definice

$$\lim_{X \to X^0} f(X) = -\infty.$$

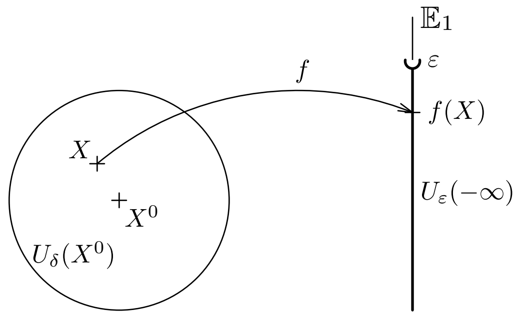
Příklad 8.2. Ukažme, že

$$\lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty.$$

Řešení. δ-okolí definujeme pomocí Euklidovy vzdálenosti. Zvolíme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Potom pro $[x, y] \in U_\delta([0, 0])$, $[x, y] \neq [0, 0]$, je funkce $z =$



Obrázek 8.7: Nevlastní limita $\lim\limits_{X\to X^0} f(X) = \infty$



Obrázek 8.8: Nevlastní limita $\lim\limits_{X\to X^0} f(X) = -\infty$

$\frac{1}{x^2+y^2}$ definovaná a platí pro ně

$$x^2 + y^2 < \delta^2,$$

to jest $x^2 + y^2 < \frac{1}{\varepsilon}$. Přechodem k reciprokým hodnotám dostáváme

$$\frac{1}{x^2 + y^2} > \varepsilon.$$

Tedy $\frac{1}{x^2+y^2} \in U_\varepsilon(\infty)$, takže

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty.$$

Příklad 8.3. Nechť $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Definičním oborem této funkce je $D = \mathbb{E}_2$. Dokažme, že

$$\lim_{[x,y]\to[3,4]} \sqrt{x^2 + y^2} = 5.$$

Řešení. Skutečně, zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Nechť $[x,y] \in U_\delta([3,4])$, $[x,y] \neq [3,4]$. Zaveďme pomocné proměnné h, k vztahy:

$$x = 3 + h, \quad y = 4 + k.$$

Je tedy $(x-3)^2 + (y-4)^2 = h^2 + k^2$, $\rho([3,4],[x,y]) = \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$. Potom

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 + 6h + 8k + h^2 + k^2 \leq 25 + 2|3h + 4k| + h^2 + k^2.$$

Užitím Cauchyovy nerovnice dostaneme

$$|3h + 4k| \leq \sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{h^2 + k^2}.$$

Je tedy

$$x^2 + y^2 \leq 5^2 + 2\sqrt{25}\sqrt{h^2 + k^2} + h^2 + k^2 \leq \left(5 + \sqrt{h^2 + k^2}\right)^2.$$

Úpravou dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 5 + \delta = 5 + \varepsilon.$$

Odtud

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - 5\right| < \varepsilon.$$

Je tedy

$$\lim_{[x,y]\to[3,4]} \sqrt{x^2 + y^2} = 5.$$

Zaveďme si nyní pojem spojitosti funkce $f(x)$ n–proměnných, $n \in \mathbb{N}$, v bodě X^0.

spojitost funkce v bodě

Definice 8.3. (Spojitost v bodě)

Řekneme, že funkce $z = f(X)$ n–proměnných je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$, jestliže

- je v bodě X^0 definovaná,
- má v bodě X^0 limitu a platí

$$\lim_{X\to X^0} f(X) = f(X^0).$$

Příklad 8.4. Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá v bodě $[3, 4]$. Skutečně. V příkladě 8.3 jsme ukázali, že

$$\lim_{[x,y]\to[3,4]} \sqrt{x^2 + y^2} = 5 = f(3, 4).$$

Limita a spojitost funkce vzhledem k množině

rozšíření pojmů limita, spojitost

Uvědomme si, že úvahy o funkcích n–proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$, zahrnují v sobě i úvahy o funkcích jedné proměnné (pro $n = 1$). Některé úvahy, které jsme uvedli pro funkce jedné proměnné, zobecníme pro funkce více proměnných.

Otevřený interval (a, b) lze chápat jako oblast v prostoru $\mathbb{E}_1$. Koncové body intervalu jsou jeho hraničními body. Hledejme nyní analogii limity zprava (zleva) v levém (v pravém) koncovém bodě intervalu funkce definované na uvažovaném intervalu.

V prostoru $\mathbb{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsme nedefinovali limitu funkce v hraničních bodech jejího definičního oboru. Definici 8.2 limity ve vnitřních bodech definičního oboru nemůžeme aplikovat např. na limitu funkce

$$z = f(x, y), \quad \text{kde} \quad f(x, y) = \frac{1}{xy},$$

v bodech na ose x, resp na ose y. Definičním oborem této funkce je totiž množina všech bodů $[x, y]$, kde $x \neq 0 \ \vee \ y \neq 0$. Body $[x_0, 0]$ a body $[0, y_0]$ jsou hraničními body definičního oboru funkce $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. Funkce $f(x, y)$ není definovaná v žádném okolí těchto bodů. Zobecníme tedy definici limity funkce definované na množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$ pro všechny hromadné body množiny D.

Definice 8.4. (Limita funkce vzhledem k množině)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{E}_n$ je definiční obor funkce

$$z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Nechť $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ je hromadným bodem množiny D. Řekneme, že funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, má v bodě X^0 limitu vzhledem k D rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže k libovolnému okolí $U_\varepsilon(X^0)$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny body $X \in (U_\delta(X^0) - \{X^0\}) \cap D$ je

$$f(X) \in U_\varepsilon(A).$$

Píšeme pak

$$\lim_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = A. \tag{8.11}$$

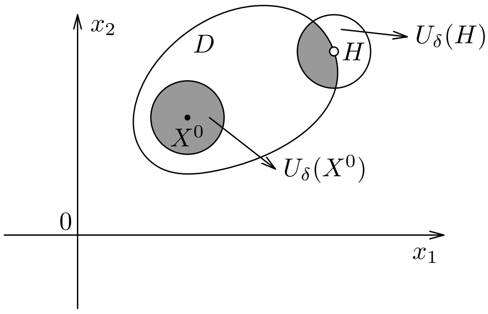
Význam této definice je objasněn na obr. 8.9 pro $n = 2$. Funkce $z = f(X)$ je definovaná na oblasti D. Jestliže X^0 je vnitřním bodem oblasti D, potom zřejmě

$$\lim_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = \lim_{X \to X^0} f(X).$$

Jestliže H je hraničním bodem oblasti D, potom $\lim_{X \to X^0} f(X)$ neexistuje ve smyslu definice 8.2, neboť v každém δ–okolí bodu H leží body $X \neq H$, v nichž funkce $f(X)$ není definovaná. Avšak $\lim\limits_{X \underset{D}{\to} H} f(X)$ může existovat, poněvadž funkce $f(X)$ je definovaná na množině

$$U_\delta(H) \cap D - \{H\}$$

vyznačené šedě na obr. 8.9.



Obrázek 8.9:

Poznámka 1. Dokažte si platnost tohoto tvrzení: Nechť X^0 je hromadným bodem množiny D. Potom platí

$\lim\limits_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = A \iff$ Pro každou množinu $M \subseteq D$ s hromadným bodem X^0 platí $\lim\limits_{X \underset{M}{\to} X^0} f(X) = A$.

Vzhledem k této vlastnosti můžeme vyslovit definici limity funkce $f(X)$ vzhledem k množině, která je ekvivalentem definice 8.4.

Věta 8.1. (Ekvivalentní vyjádření limity funkce)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{E}_n$ je definiční obor funkce

$$z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Nechť $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ je hromadným bodem množiny D. Potom platí

$$T_1 \iff T_2,$$

kde T_1, T_2 mají tento význam:

T_1: $\lim\limits_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = A, \quad A \in \mathbb{R}^*$

T_2: Jestliže $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$, $X^k \neq X^0$, je posloupnost bodů z D, která konverguje k bodu X^0, potom posloupnost $\{f(X^k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k A.

Důkaz:

α) Nechť platí T_1. Dokažme, že pak platí T_2. Poněvadž $\lim\limits_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = A$, k libovolnému okolí $U_\varepsilon(A)$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $X \in U_\delta(X^0) \cap D$, $X \neq X^0$, je $f(X) \in U_\varepsilon(A)$. Jestliže $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$, $X^k \neq X^0$, je libovolná posloupnost bodů z D, která konverguje k X^0, potom k uvedenému číslu δ existuje k_0 tak, že pro $k > k_0$ je

$$\rho(X^k, X^0) < \delta.$$

Tedy body X^k pro $k > k_0$ leží v $U_\delta(X^0) \cap D - \{X^0\}$. Platí tedy pro ně $f(X^k) \in U_\varepsilon(A)$, takže $\{f(X^k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k A.

β) Nechť platí T_2. Dokažme, že pak platí T_1. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že platí T_2 a neplatí T_1, to jest, že funkce $f(X)$ nemá v bodě X^0 limitu rovnu A. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta = \frac{1}{k}$ lze určit $X^k \in D$, $X^k \neq X^0$, tak, že $\rho(X^k, X^0) < \delta = \frac{1}{k}$, avšak

$$f(X^k) \notin U_\varepsilon(A). \tag{8.12}$$

Takto konstruovaná posloupnost bodů $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu X^0 a tedy podle T_2 posloupnost $\{f(X^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k A. To je však ve sporu s (8.12). □

Věta 8.2. (Limita součtu, součinu a podílu funkcí)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{E}_n$ je definiční obor funkcí $f(X)$, $g(X)$. Nechť X^0 je hromadný bod D. Nechť existují limity vzhledem k D

$$\lim_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) = A, \qquad \lim_{X \underset{D}{\to} X^0} g(X) = B, \qquad A, B \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí

$$\lim_{x \underset{D}{\to} X^0} (c_1 f(X) + c_2 g(X)) = c_1 A + c_2 B, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{X \underset{D}{\to} X^0} f(X) g(X) = A \cdot B$$

a je-li $B \neq 0$, je též

$$\lim_{x \underset{D}{\to} X^0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{A}{B},$$

pokud má pravá strana v těchto vzorcích význam.

Příklad 8.5. Určete

$$\lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{1}{|xy|}.$$

Zřejmě definičním oborem funkce $\frac{1}{|xy|}$ je $D = \mathbb{E}_2 - \{[x, y] : xy = 0\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Potom

$$U_\delta([0,0]) = \{[x, y] : -\delta < x < \delta \wedge -\delta < y < \delta\}.$$

Pro $[x, y] \in (U_\delta([0,0]) \cap D) - \{[0,0]\}$ platí $|x, y| = |x||y| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy pro tyto body $[x, y]$ platí $\frac{1}{|xy|} > \varepsilon$. Je tedy $\frac{1}{|xy|} \in U_\varepsilon(\infty)$ pro $[x, y] \in (U_\delta([0,0]) \cap D) - \{[0,0]\}$, takže

$$\lim_{[x,y] \underset{D}{\to} [0,0]} \frac{1}{|xy|} = \infty.$$

Příklad 8.6. Ukažme, že funkce

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \qquad [x, y] \neq [0, 0],$$

nemá v bodě $[0, 0]$ limitu.

Skutečně. Označme $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ Definiční obor D této funkce je $\mathbb{E}_2 - \{[0, 0]\}$. Bod $[0, 0]$ je hromadným bodem množiny D. Nechť $\alpha \neq 0$. Zvolme posloupnost bodů X^k, $k = 1, 2, \ldots$, kde $X^k = [\frac{1}{k}, \frac{\alpha}{k}]$. Zřejmě $\lim\limits_{k\to\infty} X^k = [0, 0]$. Dostáváme

$$f(X^k) = \frac{2\frac{1}{k} \cdot \frac{\alpha}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Tedy $\lim\limits_{k\to\infty} f(X^k) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. Tato limita závisí na zvoleném čísle α, takže neexistuje $\lim\limits_{[x,y]\underset{D}{\to}[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Zaveďme si nyní pojem spojitosti funkce $z = f(X)$, $X \in D \subseteq \mathbb{E}_n$, v bodě $X^0 \in D$ vzhledem k množině D.

spojitost funkce vzhledem k množině

Definice 8.5. **(Spojitost funkce v bodě vzhledem k množině)**

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{E}_n$ je definiční obor funkce

$$z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Nechť $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$ je hromadným bodem množiny D. Řekneme, že funkce $f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, je v bodě X^0 spojitá vzhledem k množině D, jestliže

- je v bodě X^0 definovaná a jestliže
- existuje $\lim\limits_{X\underset{D}{\to}X^0} f(X)$ a platí $\lim\limits_{X\underset{D}{\to}X^0} f(X) = f(X^0)$.

Z věty 8.1 a z definice 8.5 spojitosti funkce $f(X)$ v hromadném bodě X^0 definičního oboru D funkce $f(X)$ vyplývá následující věta 8.3, která umožňuje definovat spojitost funkce v bodě jiným, ekvivalentním způsobem.

Věta 8.3.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{V}_n$ je definiční obor funkce

$$z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Nechť $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ je hromadným bodem množiny D. Potom funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ je spojitá v bodě X^0 vzhledem k D když a jenom když platí: Jestliže $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z D konvergující k bodu X^0, potom posloupnost $\{f(X^k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k $f(X^0)$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D_1 \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť funkce

$$z = f(x_1, \dots, x_n),$$

je definována na D_1. Zaveďme nevýznamné proměnné $x_{n+1}, \dots, x_m$, $-\infty < x_i < \infty$, $i = n+1, \dots, m$. Označme

$$D = \{[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m] : \ [x_1, \dots, x_n] \in D_1\},$$

Položme

$$z = g(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_n)$$

pro všechny body $X = [x_1, \dots, x_n, \dots, x_m] \in D$. Potom funkce g m-proměnných je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0, \dots, x_m^0] \in D$ když a jenom když je funkce f n-proměnných spojitá v bodě $[x_1^0, \dots, x_n^0] \in D_1$.

Můžeme tedy funkci $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n] \in D_1$ považovat za funkci m-proměnných, kde $m > n$. Místo označení g lze dále i po přidání nevýznamných proměnných označovat jako funkci f.

Elementární funkce jedné proměnné lze tedy chápat jako funkce n-proměnných v odpovídajících bodech.

Uveďme si nyní souvislost mezi spojitostí funkcí $f(X)$, $g(X)$ n-proměnných v daném bodě X^0 a funkce, která z nich vznikne jejich součtem, součinem a podílem. Zopakujte si napřed větu 3.1.

spojitost součtu, součinu a podílu dvou funkcí

Věta 8.4.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $D \subseteq \mathbb{E}_n$ je definiční obor funkcí

$$z = f(x_1, \dots, x_n), \ z = g(x_1, \dots, x_n)$$

spojitých vzhledem k D v hromadném bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0] \in D$. Potom i funkce $c_1 f(X) + c_2 g(X)$ pro libovolné $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $f(X) \cdot g(X)$ jsou spojité v bodě X^0 vzhledem k D. Je-li navíc $g(X^0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f(X)}{g(X)}$ spojitá v bodě X^0 vzhledem k D.

Důkaz: Důkaz přenecháme čtenáři. □

Příklad 8.7. Funkce

$$z = \frac{\ln x}{x^2 + y^2}$$

je spojitá vzhledem k D v každém bodě $[x, y] \in D$, kde

$$D = \{[x, y] : 0 < x \ \wedge \ y \in (-\infty, \infty)\}.$$

Skutečně. Funkci $\ln x$ lze považovat za funkci dvou proměnných x, y. Je definovaná v D. Funkce x^2+y^2 je definovaná v každém bodě $[x, y] \in \mathbb{E}_2$. V každém bodě $[x, y]$, $[x, y] \neq [0, 0]$, je $x^2 + y^2 \neq 0$. Podle věty 8.4 je funkce $z = \frac{\ln x}{x^2+y^2}$ spojitá v každém bodě $[x, y] \in D$, $[x, y] \neq [0, 0]$, vzhledem k D.

Složená funkce a její spojitost

spojitost složené funkce

Dříve, než přistoupíme ke studiu této části textu, zopakujte si pojem složené funkce jedné proměnné, větu o spojitosti a větu o derivování složené funkce jedné proměnné.

Definice 8.6. (Složená funkce n-proměnných) Nechť

složená funkce

$$z = f(y_1, \ldots, y_m)$$

je funkce definovaná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{E}_m$. Nechť funkce

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

jsou definované na množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť pro každý bod $X = [x_1, \ldots, x_n] \in D$ je $[\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)] \in \Omega$. Potom funkce

$$F(X) = f(\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)), \qquad X \in D$$

se nazývá *složenou funkcí*. Funkce $z = f(y_1, \ldots, y_m)$ se nazývá její *vnější složkou* a funkce $\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)$ se nazývají jejími *vnitřními složkami.*

Uveďme si následující větu o spojitosti složených funkcí.

Věta 8.5. (Věta o spojitosti složené funkce)

Nechť funkce

$$y_i = \varphi_i(X), \ i = 1, 2, \ldots, m, \quad X = [x_1, \ldots, x_n] \in D \subseteq \mathbb{E}_n,$$

jsou spojité v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0] \in D$ *vzhledem* D. *Označme*

$$Y^0 = [y_1^0, \ldots, y_m^0], \quad \text{kde} \quad y_i^0 = \varphi_i(X^0), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Nechť na $\Omega \subseteq \mathbb{E}_n$ je dána funkce

$$z = f(Y), \quad Y \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_m.$$

Nechť pro všechna $X \in D$ je $[\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X)] \in \Omega$. Jestliže funkce $f(Y)$ je spojitá v bodě Y^0 vzhledem k Ω, je i složená funkce

$$F(X) = f(\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X))$$

spojitá v bodě X^0 vzhledem D.

Důkaz: Nechť $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$ je taková posloupnost bodů z D, že $X^k \xrightarrow{\rho} X^0 \in D$. Poněvadž $\varphi_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$, jsou spojité v bodě X^0, dostáváme podle věty 8.3, že

$$\varphi_i(X^k) \xrightarrow{\rho} y_i^0 = \varphi_i(X^0), \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{8.13}$$

Podle předpokladů věty leží body

$$Y^k = [\varphi_1(X^k), \dots, \varphi_m(X^k)]$$

v Ω a z (8.13) vyplývá, že

$$Y^k \xrightarrow{\rho} Y^0.$$

Poněvadž $f(Y)$ je spojitá v bodě Y^0 vzhledem k Ω, platí

$$f(Y^k) \xrightarrow{\rho} f(Y^0),$$

to jest

$$F(X^k) = f(\varphi_1(X^k), \dots, \varphi_m(X^k)) \xrightarrow{\rho} f(\varphi_1(X^0), \dots, \varphi_m(X^0)) = F(X^0).$$

Je tedy složená funkce $F(X)$ spojitá v bodě X^0 vzhledem k D. □

Příklad 8.8. Funkce $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Skutečně. Položme

$$y = \varphi(x_1, x_2), \qquad \text{kde } \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Funkce φ je definovaná na množině $D = \mathbb{E}_2$ a je spojitá v bodě $[0, 0]$. Označme $y^0 = \varphi(0, 0)$. Platí $\varphi(0, 0) = 0$. Položme $z = f(y)$, kde $f(y) = \sqrt{y}$. Funkce $f(y)$ je na intervalu $\Omega = \langle 0, \infty)$ spojitá vzhledem k Ω. Pro každý bod $[x_1, x_2] \in D$ je $\varphi(x_1, x_2) \in \Omega$. Funkce $f(y)$ je spojitá v bodě y^0 vzhledem k Ω. Podle věty 8.5 je tedy funkce $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ spojitá v bodě $[0, 0]$.

8.2 Parciální derivace

Zavedení parciálních derivací 1. řádu funkce dvou proměnných

parciální derivace funkce dvou proměnných

Uvažujme funkci

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_2. \tag{8.14}$$

Dosaďme do (8.14) za y pevnou hodnotu $y = y_0$. Předpokládejme, že dostaneme funkci jedné proměnné x, totiž funkci

$$g(x) = f(x, y_0), \quad x \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \tag{8.15}$$

kde I je takový interval, že $[x, y_0] \in \Omega$ pro $x \in I$.

Jako příklad uveďme funkci

$$z = x^3y^2, \quad [x, y] \in \mathbb{E}_2. \tag{8.16}$$

Zvolme $y = 5$ a dosaďme tuto hodnotu do (8.16). Dostáváme

$$z = x^3 \cdot 5^2, \quad \text{to jest } z = 25x^3, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{8.17}$$

to jest funkci jedné proměnné.

Uvažujme funkci $g(x)$ určenou vztahem (8.15). Předpokládejme, že tato funkce má v bodě $x_0 \in I$ derivaci $g'(x_0)$, potom

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \quad \text{tj.} \quad g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{8.18}$$

Tuto derivaci nazýváme parciální (částečnou) derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže bod x_0 je levým (pravým) koncovým bodem intervalu I, nahradíme limitu v (8.18) limitou zprava (zleva) v bodě $h = 0$. Bod $[x_0, y_0]$ může být libovolný z Ω. Místo x_0, y_0 pišme x, y. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ budeme značit jako

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \text{nebo} \quad f'_x(x, y) \quad \text{nebo} \quad f_x(x, y).$$

Poněvadž v (8.14) jsme označili funkci $f(x, y)$ jako z, můžeme též psát

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad z_x.$$

Chceme-li vyznačit, že se jedná o parciální derivaci v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme použít např. tyto zápisy

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[x_0, y_0]}, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad z_x(x_0, y_0). \tag{8.19}$$

V označení parciální derivace je použit symbol ∂. *Tento symbol ∂ není písmenem žádné abecedy.* Srovnejte si označení derivace (5.22) funkce jedné proměnné s označením $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro parciální derivaci.

Parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ podle proměnné x lze tedy definovat jako
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \tag{8.20}$$
pokud tato limita existuje.

Analogicky zavádíme parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$. Dosaďme do (8.14) za x pevnou hodnotu $x = x_0$. Předpokládejme, že dostaneme funkci jedné proměnné y, totiž funkci
$$h(y) = f(x_0, y), \quad y \in J, \tag{8.21}$$
kde J je takový interval, že $[x_0, y] \in \Omega$, $y \in J$.

Uvažujme funkci $h(y)$ určenou vztahem (8.21). Může se stát, že tato funkce má v bodě $y_0 \in J$ derivaci, to jest, že existuje
$$\lim_{k\to 0} \frac{h(y_0+k) - h(y_0)}{k}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}. \tag{8.22}$$
Tuto derivaci nazýváme parciální (částečnou) derivací funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže bod y_0 je levým (pravým) koncovým bodem intervalu J, nahradíme limitu v (8.22) limitou zprava (zleva) v bodě $h = 0$. Bod $[x_0, y_0]$ může být libovolný bod z Ω. Místo x_0, y_0 pišme x, y. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ podle y budeme značit jako
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad \text{nebo} \quad f'_y(x,y) \quad \text{nebo} \quad f_y(x,y).$$
Zápisy
$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad z_y$$
lze rovněž použít pro parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle y. Je tedy
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k},$$
pokud tato limita existuje.

Jestliže $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$ existuje pro $[x, y] \in \Omega_1 \subseteq \Omega$, je ke každému bodu $[x, y] \in \Omega_1$ přiřazeno číslo $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y.})$ Je tedy $\frac{\partial f}{\partial x}$ $(\frac{\partial f}{\partial y})$ funkce proměnných x, y na Ω_1. Symbolem $(\frac{\partial z}{\partial x})_{[x_0,y_0]}$ $((\frac{\partial z}{\partial y})_{[x_0,y_0]})$ budeme značit též $\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$ $(\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y})$.

Příklad 8.9. Nechť
$$z = 2x^3y^4 - 3xy^5 + 2x - 3y + 1. \tag{8.23}$$
Abychom vypočítali $\frac{\partial z}{\partial x}$, považujeme v (8.23) y za konstantu a derivujeme (8.23) podle x. Dostáváme
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 3x^2y^4 - 3y^5 + 2, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^4 - 3y^5 + 2. \tag{8.24}$$

Abychom vypočítali $\frac{\partial z}{\partial y}$, považujeme v (8.23) x za konstantu a derivujeme (8.23) podle y. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y^3 - 15xy^4 - 3. \tag{8.25}$$

Funkce (8.24), (8.25) jsou definované v každém bodě $[x, y] \in \Omega$. Např.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[2,3]} = [6x^2y^4 - 3y^5 + 2]_{[2,3]} = 6 \cdot 2^2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^5 + 2,$$

to jest

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[2,3]} = 1944 - 729 + 2 = 1217.$$

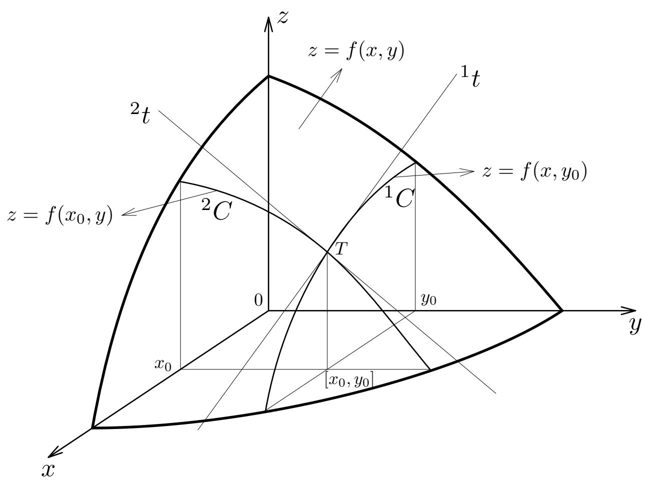
Podobně např.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[0,2]} = [8x^3y^3 - 15xy^4 - 3]_{[0,2]} = -3.$$

Podívejme se nyní na geometrický význam parciálních derivací

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[x_0,y_0]}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[x_0,y_0]}.$$

Sledujme obr. 8.10.



Obrázek 8.10: Geometrický význam parciálních derivací.

Označili jsme

$$g(x) = f(x, y_0)$$

a položili jsme $(\frac{\partial f}{\partial x})_{[x_0,y_0]} = g'(x_0)$. Rovnicí

$$z = g(x), \quad \text{tj.} \quad z = f(x, y_0)$$

je definována křivka, označená na obrázku 8.10 jako ${}^1C$. Rovnicí

$$z = h(y), \quad \text{tj.} \quad z = f(x_0, y)$$

je definována křivka, označená na obrázku 8.10 jako ${}^2C$. Je tedy

$$g'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[x_0,y_0]} \qquad \left(h'(y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[x_0,y_0]}\right)$$

směrnice tečny ${}^1t$ $({}^2t)$ ke křivce ${}^1C$ $({}^2C)$ v jejím bodě T.

parciální derivace funkce $f(X)$

Zavedení parciálních derivací funkcí n–proměnných

Uvažujme nyní funkci n-proměnných

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad X = [x_1, \ldots, x_n] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n. \tag{8.26}$$

Zvolme $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dosaďme za každou proměnnou x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$, v (8.26) pevnou hodnotu x_j^0. Dostali jsme tak funkci jedné proměnné x_i, označme ji ${}^i g(x_i)$. Dostáváme

$${}^i g(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0). \tag{8.27}$$

Jestli tato funkce má v čísle x_i^0 derivaci ${}^i g'(x_i^0)$, nazveme ji parciální derivací funkce (8.26) podle x_i v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0] \in \Omega$. Značíme ji jedním ze symbolů

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}, \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{X_0}, \ \frac{\partial z(X_0)}{\partial x_i}, \ \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{X_0}, \ \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_0), \ z'_{x_i}(X^0), \ z_{x_i}(X^0). \tag{8.28}$$

Bod $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ může být libovolný bod z Ω. Místo parciálních derivací v bodě X^0 je můžeme uvažovat v bodě $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

nazýváme *parciálními derivacemi prvního řádu*.

Příklad 8.10. Uvažujme funkci

$$z = \frac{x_1 \sin \frac{x_2}{x_3}}{x_2^2 + x_3^2 + 1}. \tag{8.29}$$

Tato funkce je definovaná v každém bodě $X = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3$, $X \neq [x_1, x_2, 0]$. Určeme $\frac{\partial z}{\partial x_2}$. Derivujme (8.29) podle proměnné x_2. Proměnné x_1, x_3 uvažujeme jako konstanty. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{x_1 \frac{1}{x_3} \cos \frac{x_2}{x_3} \cdot (x_2^2 + x_3^2 + 1) - x_1 \sin \frac{x_2}{x_3} \cdot 2x_2}{(x_2^2 + x_3^2 + 1)^2}.$$

Úpravu přenechávám čtenáři.

Zavedení parciálních derivací vyšších řádů.

parciální derivace vyšších řádů

Předpokládejme, že funkce

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad X = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n] \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n \tag{8.30}$$

je definovaná na $\Omega \subseteq \mathbb{E}_n$ a má parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8.31}$$

v každém bodě $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \Omega_1 \subseteq \Omega$. Můžeme se na ně tedy dívat jako na funkce n-proměnných na Ω_1. Jestliže parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ má parciální derivaci podle x_j v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, označíme ji $\frac{\partial^2 z(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$. Uveďme si několik dalších užívaných označení

$$\left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{X_0}, \ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \ z''_{x_i x_j}(X_0), \ z_{x_i x_j}(X_0), \ f''_{x_i x_j}(X_0), \ f_{x_i x_j}(X_0). \tag{8.32}$$

Nazýváme ji druhou parciální derivací funkce f podle x_i, x_j (v tomto pořadí) v bodě X^0. Jestliže $i = j$, píšeme většinou $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$ místo $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_i}$, resp. $z''_{x_i^2}$ místo $z''_{x_i x_i}$. Jestliže $i \neq j$, nazýváme parciální derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ smíšenou.

Příklad 8.11. Nechť

$$z = 3x_1^2 x_2^4 x_3^3.$$

Vypočítejte všechny její parciální derivace 2. řádu. Napřed vypočítáme parciální derivace 1. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 6x_1 x_2^4 x_3^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 12x_1^2 x_2^3 x_3^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = 9x_1^2 x_2^4 x_3^2.$$

Přikročme k výpočtu všech parciálních derivací 2. řádu. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 6x_2^4 x_3^3, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 24x_1 x_2^3 x_3^3, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = 18x_1 x_2^4 x_3^2,\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 24x_1 x_2^3 x_3^3, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 36x_1^2 x_2^2 x_3^3, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 36x_1^2 x_2^3 x_3^2,\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} = 18x_1 x_2^4 x_3^2, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} = 36x_1^2 x_2^3 x_3^2, && \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = 18x_1^2 x_2^4 x_3.
\end{aligned}$$

Poznámka. Všimněme si, že v tomto příkladě je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Jinými slovy, v tomto případě nezáleží na pořadí derivivání.

Podobně se definují parciální derivace vyšších řádů. Je-li dána např. funkce

$$z = f(X), \quad X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad X \in \Omega \subseteq \mathbb{E}_n, \tag{8.33}$$

potom např. parciální derivace 3. řádu $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$ obdržíme takto. Vypočítáme $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. to znamená, že $x_1, x_3 \ldots, x_n$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme (8.33) podle x_2. Předpokládáme, že tato derivace existuje na jisté podmmnožině $\Omega_1 \subseteq \Omega$. V dalším kroku derivujeme funkci $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ opět podle proměnné x_2, tj. počítejme $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2})$. To znamená, že $x_1, x_3 \ldots, x_n$ ve funkci $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme ji podle x_2. Předpokládáme, že tato derivace existuje na jisté podmmnožině $\Omega_2 \subseteq \Omega$. Dostaneme tak na Ω_2 funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$. V dalším kroku derivujeme funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, definovanou na Ω_2, podle proměnné x_1. To znamená, že $x_2, x_3 \ldots, x_n$ považujeme za pevné hodnoty a derivujeme funkci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, definovanou na Ω_2, podle x_1. Jestliže tato parciální derivace existuje na $\Omega_3 \subseteq \Omega_2$, máme v každém bodě množiny Ω_3 definovanou parciální derivaci $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$.

Je otázkou, co lze říci o vzájemném vztahu mazi parciálními derivacemi $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}$. Tyto parciální derivace se liší pořadím proměnných, podle nichž jsme prováděli derivování. Platí tato věta.

smíšené parciální derivace

Věta 8.6.

Nechť funkce n-proměnných

$$z = f(X), \quad X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad X \in \Omega$$

má v jistém okolí $U_\delta(X^0)$, $X^0 \in \Omega$, spojité všechny parciální derivace řádu k, potom nezáleží na pořadí proměnných, podle nichž derivujeme.

Tedy např. má-li funkce $f(x_1, x_2)$ v okolí bodu $X^0 = [x_1^0, x_2^0]$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu, potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Poznámka. Věta 8.6 je vyslovena za poněkud silnějších předpokladů, než je nutno.

Příklad 8.12. Nechť

$$z = x^3 y^2 t^4.$$

Potom platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 t^4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y t^4, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial t} = 24x^2 y t^3.$$

Podobně

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4x^3 y^2 t^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 8x^3 y t^3, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial y \partial x} = 24x^2 y t^3.$$

Vidíme, že $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial t} = \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial y \partial x}$. K tomuto závěru bychom přišli přímo užitím věty 8.6, neboť všechny parciální derivace funkce $z = x^3 y^2 t^4$ jsou spojité ve $\mathbb{E}_3$.

Parciální derivace složené funkce

Před započetím studia této problematiky si zopakujte výpočet derivace složené funkce jedné proměnné.

derivace složené funkce

Věta 8.7. (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $\varphi_i(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mají všechny parciální derivace v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$. Nechť funkce $z = f(Y)$, $Y = [y_1, \ldots, y_m]$, má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $Y^0 = [y_1^0, \ldots, y_m^0]$, kde $y_i^0 = \varphi_i(X^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom složená funkce

$$z = F(X) = f([\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)])$$

má v bodě X^0 všechny parciální derivace 1. řádu a platí

$$\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(Y^0)}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_j(X_0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz: Bez důkazu. □

Příklad 8.13. Nechť

$$z = \sqrt{1 + (x+y)^2}, \quad [x, y] \in \mathbb{E}_2. \tag{8.34}$$

Vypočítejte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Řešení. Funkce (8.34) je složená funkce. Funkce $z = f(u)$, kde $f(u) = \sqrt{u}$, je její vnější složkou a $u = \varphi(x, y)$, kde $\varphi(x, y) = 1 + (x+y)^2$, je její vnitřní složkou. Podle věty 8.7 dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (x+y)^2}} 2(x+y).$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x+y}{\sqrt{1 + (x+y)^2}}. \tag{8.35}$$

Parciální derivací funkce $\frac{\partial z}{\partial x}$ podle y dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1 \cdot \sqrt{1 + (x+y)^2} - (x+y) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}} 2(x+y)}{\left(\sqrt{1 + (x+y)^2}\right)^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Big(1+(x+y)^2\Big)\sqrt{1+(x+y)^2}}.$$

Tečná rovina k ploše $z = f(X)$

Začneme se zavedením pojmu tečny ke křivce.

tečna ke křivce

Tečna ke křivce. Nechť

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.36}$$

jsou spojité funkce na intervalu I. Rovnicemi (8.36) je vyjádřena křivka, označme ji c, v tak zvaném parametrickém vyjádření. Nechť $t_0 \in I$. Položme

$$x_i^0 = \varphi_i(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme

$$T = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0].$$

Nechť M je bod na křivce c odpovídající parametru $t_0 + h \in I$, kde $h \in \mathbb{E}_1$. Tedy

$$M = [\varphi_1(t_0+h), \varphi_2(t_0+h), \ldots, \varphi_n(t_0+h)].$$

Směrovým vektorem přímky určené body T, M je vektor

$$\boldsymbol{s} = (s_1(h), s_2(h), \ldots, s_n(h)),$$

kde

$$s_i(h) = \frac{\varphi_i(t_0+h) - \varphi_i(t_0)}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jestliže existují

$$s_i^0 = \lim_{h \to 0} s_i(h), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

to jest, jestliže funkce

$$\varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mají v bodě t_0 derivace

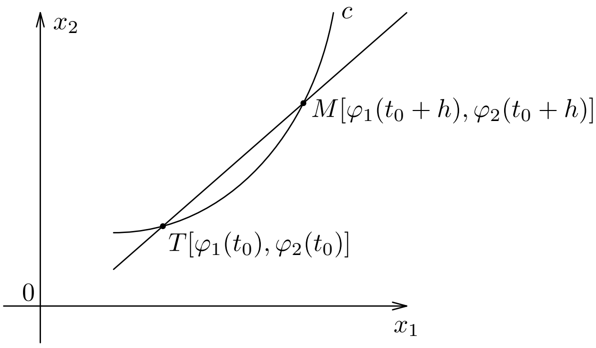
$$s_i^0 = \varphi_i'(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

potom přímku

$$x_i = x_i^0 + s_i^0 \cdot t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

nazýváme tečnou ke křivce c v bodě T. Na obr. 8.11 je znázorněno zavedení tečny ke křivce pro $n = 2$.

Dospěli jsme k tomuto závěru.



Obrázek 8.11: Zavedení tečny ke křivce.

Nechť

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{E}_1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

jsou spojité funkce na intervalu I. Nechť $t_0 \in I$ a nechť funkce $\varphi_i(t)$ mají v bodě t_0 derivace $\varphi_i'(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Potom přímka

$$x_i = \varphi_i(t_0) + \lambda\varphi_i'(t_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

je tečnou ke křivce

$$x_i = \varphi_i(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

v bodě $T[\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)]$.

Příklad 8.14. Ke křivce

$$x_1 = 2\cos t, \; x_2 = 2\sin t, \; x_3 = 3t, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{8.37}$$

napište rovnici tečny v jejím bodě T daném parametrem $t = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. Dosazením $t = \frac{\pi}{4}$ do (8.37) dostáváme bod

$$T = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}].$$

Poněvadž

$$(2\cos t)' = -2\sin t, \quad (2\sin t)' = 2\cos t, \quad (3t)' = 3,$$

je směrový vektor $\boldsymbol{s}$ tečny v bodě T roven

$$\boldsymbol{s} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3).$$

Tedy tečna k zadané křivce v jějím bodě T má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \\ x_2 &= \sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda, \\ x_3 &= 3\frac{\pi}{4} + 3\lambda, \end{aligned}$$

kde $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

tečná rovina k ploše

Tečná rovina k ploše. Nechť

$$z = F(X), \quad X = [x_1, \ldots, x_n] \in D \subseteq \mathbb{E}_n$$

má v D spojité všechny parciální derivace 1. řádu. Nechť $T_0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0] \in D$ a $T = [x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0]$, kde $z^0 = F(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ je bod na ploše $z = F(X)$. Nechť funkce

$$x_i = \varphi(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mají derivace 1. řádu v bodě $t_0 \in I$ a nechť

$$x_i^0 = \varphi_i(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme c křivku v $\mathbb{E}_{n+1}$ danou v parametrickém vyjádření rovnicemi

$$x_1 = \varphi_1(t),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t),\ z = F(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \tag{8.38}$$

ležící na ploše $z = F(x_1, \ldots, x_n)$. Směrový vektor tečny křivky c v jejím bodě T je

$$\boldsymbol{s} = \left(\varphi_1'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0), \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} \varphi_1'(t_0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} \varphi_n'(t_0) \right).$$

Vektor $\boldsymbol{s}$ je kolmý na vektor

$$\boldsymbol{n} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0}, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0}, -1 \right).$$

(Skalární součin těchto vektorů je roven nule.) Označme τ rovinu

$$\tau \equiv z - F(T_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} (x_1 - x_1^0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} (x_n - x_n^0).$$

Tečna ke křivce (8.38) v bodě T leží v rovině τ. Tato rovina závisí pouze na rovnici plochy $z = F(X)$ a na bodě T. Nazýváme ji tečnou rovinou plochy $z = F(X)$ v bodě T.

Nechť funkce $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $T_0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$. Označme $z^0 = F(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $T = [x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0]$ bod na ploše $z = F(x_1, \ldots, x_n)$. Potom rovina

$$z - z^0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{T_0} (x_1 - x_1^0) + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{T_0} (x_n - x_n^0)$$

je tečnou rovinou k ploše $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě T.

Příklad 8.15. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $T = [4, 3, ?]$ na dané ploše.

Řešení. Napřed určíme z. Dostáváme

$$z_0 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Určíme parciální derivace 1. řádu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $T_0 = [4, 3]$. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{[4,3]} = \frac{4}{5}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{[4,3]} = \frac{3}{5}.$$

Tedy hledanou tečnou rovinou je rovina

$$\tau \equiv z - 5 = \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3).$$

8.3 Totální diferenciál a Taylorova věta

Totální diferenciál funkce dvou proměnných

Totální diferenciál se v literatuře zavádí obecněji, než jej zavedu v definici 8.7. Vede mne k tomu toto: Tento způsob zavedení je jednodušší a takto zavedený totální diferenciál je zaveden pro dostatečně širokou třídu funkcí. Před započetím studia této podkapitoly si přečtěte podkapitolu kapitoly 5, „Diferenciál a Taylorova věta“, o diferenciálu funkce jedné proměnné.

totální diferenciál

Definice 8.7. (Totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$)

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$. Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Potom funkci df v proměnných h, k, danou vztahem

$$df(a, b, h, k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k, \tag{8.39}$$

nazýváme *totálním diferenciálem* funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Pro takto zavedený totální diferenciál platí tato věta.

Věta 8.8. *Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace 1. řádu. Potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro h, k, pro něž $[a + h, b + k] \in {}^3U_\delta([a, b])$ [1] platí*

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k + \eta(h, k), \tag{8.40}$$

$$\lim_{[h,k] \to [0,0]} \tfrac{\eta(h,k)}{|h| + |k|} = 0. \tag{8.41}$$

[1] ${}^3U_\delta([a, b])$ je okolí bodu $[a, b]$ určené metrikou ϱ_3.

Dříve, než přikročíme k důkazu této věty, zamysleme se trochu nad jejím obsahem. Především

$$\Delta z(a,b,h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) \tag{8.42}$$

je přírustek funkce při přechodu z bodu $[a,b]$ do bodu $[a+h,b+k]$. Vztah (8.40) lze tedy zapsat takto

$$\Delta z(a,b,h,k) = df(a,b,h,k) + \eta(h,k). \tag{8.43}$$

Jestliže nahradíme Δz diferenciálem df, dopustíme se chyby $\eta(h,k)$.

S ohledem na (8.41) je tedy přibližně

$$\Delta z(a,b,h,k) \approx df(a,b,h,k).$$

Tedy přírustek Δz funkce $z = f(x,y)$ při přechodu z bodu $[a,b]$ do bodu $[a+h,b+k]$ je přibližně roven diferenciálu

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k.$$

Důkaz: Poněvadž dle předpokladu jsou funkce $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ spojité v bodě $[a,b]$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x,y] \in {}^3U_\delta([a,b])$ existují $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Nechť h, k jsou taková čísla, že $[a+h,b+k] \in {}^3U_\delta([a,b])$. Potom platí

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = (f(a+h,b+k)-f(a,b+k))+(f(a,b+k)-f(a,b)). \tag{8.44}$$

Zaveďme pomocné funkce

$$g(x) = f(x,b+k), \qquad h(y) = f(a,y), \tag{8.45}$$

kde $x \in (a-\delta,a+\delta)$, $y \in (b-\delta,b+\delta)$. Funkce $g(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu o koncových bodech a, $a+h$ a má v každém vnitřním bodě derivaci. Podle věty 5.5 o střední hodnotě diferenciálního počtu existuje c_1 mezi body a, $a+h$ tak, že platí

$$g(a+h) - g(a) = g'(c_1)h. \tag{8.46}$$

S ohledem na (8.45)dostáváme

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[c_1,b+k]} h. \tag{8.47}$$

Podobně dostáváme, že existuje c_2 mezi body b, $b+k$ tak, že

$$f(a,b+k) - f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,c_2]} k. \tag{8.48}$$

Vztah (8.44) lze s ohledem na (8.47), (8.48) zapsat takto

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[c_1,b+k]}h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,c_2]}k. \tag{8.49}$$

Poněvadž podle předpokladu jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě $[a,b]$, existují takové funkce $\nu_1(h,k)$, $\nu_2(h,k)$, že

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[c_1,b+k]}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]}+\nu_1(h,k), \tag{8.50}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,c_2]}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]}+\nu_2(h,k), \tag{8.51}$$

a

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]}\nu_1(h,k)=0, \qquad \lim_{[h,k]\to[0,0]}\nu_2(h,k)=0. \tag{8.52}$$

Z (8.49) s ohledem na (8.50), (8.51) dostáváme

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]}h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]}k+h\cdot\nu_1(h,k)+k\cdot\nu_2(h,k). \tag{8.53}$$

Označme

$$\eta(h,k)=h\nu_1(h,k)+k\nu_2(h,k). \tag{8.54}$$

Poněvadž

$$\left|\frac{h}{|h|+|k|}\right|\le 1, \qquad \left|\frac{k}{|h|+|k|}\right|\le 1,$$

dostáváme z (8.54) s ohledem na vztah (8.52)

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]}\eta(h,k)=0.$$

Platí tedy (8.40). □

Poznámka. V diferenciálu (8.39) se často místo h, k píše dx, dy. Diferenciál df funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ se pak zapisuje takto

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]}dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]}dy.$$

Příklad 8.16. Napište diferenciál funkce $z=x^3y^4$ v bodě $[2,3]$.

Řešení. Funkce $z=x^3y^4$ má spojité parciální derivace v každém bodě $[x,y]$, tedy i v bodě $[2,3]$. Podle (8.39) dostáváme

$$dz=(3x^2y^4)_{[2,3]}dx+(4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

tj.

$$dz=972\,dx+864\,dy.$$

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice 8.8.

Nechť funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu. Potom

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_X dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_X dx_n \tag{8.55}$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n] \in \Omega$. Je tedy df v bodě X funkcí proměnných $dx_1, \ldots, dx_n$.

Věta 8.9. *Nechť funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $\eta(dx_1, \ldots, dx_n)$ tak, že pro $dx_1, \ldots, dx_n$, pro něž $[x_1^0 + dx_1, \ldots, x_n^0 + dx_n] \in U_\delta(X^0)$ platí*

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + dx_1, \ldots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} + \eta(dx_1, \ldots, dx_n), \end{aligned}$$

při čemž limita $\frac{\eta(dx_1,\ldots,dx_n)}{|dx_1|+\cdots+|dx_n|}$ v bodě $[0, \ldots, 0]$ má hodnotu 0.

Důkaz: Důkaz je analogický jako důkaz speciálního případu $n = 2$ uvedeném ve větě 8.8. □

Z této věty vyplývá, že

$$f(x_1^0+dx_1, \ldots, x_n^0+dx_n)-f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} dx_1+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírustek na tečné rovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \ldots, x_n^0 + dx_n]$.

Taylorova věta

Taylorova věta

Dříve, než začnete studovat následující text, přečtěte si pojednání o Taylorově větě pro funkci jedné proměnné v podkapitole „Diferenciál a Taylorova věta kapitoly“ 5.

Začněme s funkcí dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí bodu $[a, b]$, označme je $U_\delta([a, b])$, spojité všechny parciální derivace až do řádu $k+1$

včetně, kde $k \in \mathbb{N}$. Označme $T_k(x,y)$ následující polynom v proměnných x, y

$$T_k(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]}(y-b)\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{[a,b]}(x-a)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{[a,b]}(x-a)(y-b) + \right. \tag{8.56}$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{[a,b]}(y-b)^2\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(a,b).$$

Zápisem $\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$, $1 \leq j \leq k$, rozumíme symbolické provedení povýšení dvojčlenu a vynásobení $f(a,b)$. Např. pro $j = 2$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
&\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b) = \\
&= \left((x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(a,b) = \\
&= (x-a)^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{[a,b]}(x-a)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{[a,b]}(x-a)(y-b) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{[a,b]}(y-b)^2.
\end{aligned}$$

Pro $j = 3$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
&\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b) = \\
&= \left((x-a)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\
&\qquad \left. +3(x-a)(y-b)^2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (y-b)^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right) f(a,b) = \\
&= (x-a)^3\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^2 \partial y} + \\
&\qquad +3(x-a)(y-b)^2\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x \partial y^3} + (y-b)^3\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y^3} = \\
&= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{[a,b]}(x-a)^3 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{[a,b]}(x-a)^2(y-b) + \\
&\qquad +3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{[a,b]}(x-a)(y-b)^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{[a,b]}(y-b)^3.
\end{aligned}$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_k(x,y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a,b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x,y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$, $T_k(x, y)$ řádů $\leq k$ se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_k(x, y)$ nazýváme *Taylorovým polynomem řádu k* (stupně $\leq k$) příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Lze očekávat, že pro body $[x, y]$ blízké bodu $[a, b]$ lze funkci $f(x, y)$ aproximovat Taylorovým polynomem $T_k(x, y)$. Pro $k = 1$ jde vlastně o aproximaci funkce $f(x, y)$ pomocí totálního diferenciálu.

Pojednejme o chybě této aproximace. Položme

$$f(x, y) = T_k(x, y) + R_{k+1},$$

kde R_{k+1} je chyba aproximace. Platí tato věta:

Věta 8.10. *Nechť funkce $f(x, y)$ má v jistém δ-okolí $U_\delta([a, b])$ spojité parciální derivace až do řádu $k + 1$ včetně, kde $k \in \mathbb{N}$. Potom pro každý bod $[x, y] \in U_\delta([a, b])$ platí*

$$f(x, y) = T_k(x, y) + R_{k+1},$$

kde $T_k(x, y)$ je Taylorův polynom určený vztahem (8.56) a R_{k+1} je chyba aproximace, kterou lze vyjádřit např. vzorcem

$$R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^{k+1} f(\xi, \eta),$$

kde $[\xi, \eta]$ je bod na úsečce o koncových bodech $[a, b]$, $[x, y]$.

Přejděme nyní k aproximaci funkce n-proměnných, $n \in \mathbb{N}$, Taylorovým polynomem.

Nechť funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ je funkce mající všechny parciální derivace až do řádu $k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, spojité v jistém okolí $U_\delta(X^0)$, $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$. Označme $T_k(X)$ polynom

$$T_k(X) = f(X^0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^j f(X^0). \tag{8.57}$$

Polynom $T_k(X)$ a funkce $f(X)$ mají v bodě X^0 stejné funkční hodnoty a všechny odpovídající parciální derivace polynomu $T_k(X)$ a funkce $f(X)$ až do řádu k včetně se v bodě X^0 sobě rovnají. Lze tedy považovat funkci $T_k(X)$ za aproximaci funkce $f(X)$ pro $X \in U_\delta(X^0)$. Pro tuto aproximaci platí tato věta.

Věta 8.11. **(Aproximace funkce $f(X)$ Taylorovým polynomem)**

Nechť funkce $f(X)$ má v jistém δ-okolí $U_\delta(X^0)$ bodu X^0 spojité všechny parciální derivace až do řádu $k+1$ včetně, $k \in \mathbb{N}$. Potom pro každý bod $X \in U_\delta(X^0)$ platí

$$f(X) = T_k(X) + R_{k+1},$$

kde $T_k(X)$ je Taylorův polynom daný vztahem (8.57) a R_{k+1} je chyba, kterou lze vyjádřit např. vzorcem

$$\frac{1}{(k+1)!}\left((x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k+1} f(\xi),$$

kde ξ leží na úsečce o koncových bodech X^0, X.

8.4 Extrémy funkcí více proměnných

Lokální extrémy

lokální extrémy

Lokální extrémy funkcí n-proměnných zavádíme analogicky jeko u funkcí jedné proměnné.

Definice 8.9.

Nechť $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, je funkce n-proměnných definovaná na oblasti Ω. Nechť $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0] \in \Omega$. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ a že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí

$$f(X) \leq f(X^0) \qquad (f(X) \geq f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f má v bodě X^0 *lokální maximum* (*lokální minimum*). Lokální maxima a lokální minima nazýváme společným názvem *lokální extrémy*.

Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(X^0) \subset \Omega$ a že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$, $X \neq X^0$ platí

$$f(X) < f(X^0) \qquad (f(X) > f(X^0)).$$

Potom říkáme, že funkce f má v bodě X^0 *vlastní lokální maximum* (*vlastní lokální minimum*). Vlastní lokální maxima a vlastní lokální minima nazýváme společným názvem *vlastní lokální extrémy*.

Z této definice je patrno, že jestliže funkce $f(X)$ má v bodě X^0 lokální maximum (minimum), potom mají i všechny funkce

$$F_i(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

v bodě x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, lokální maximum (minimum).

Má-li tedy funkce $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, v bodě x_i^0 derivaci, je rovna 0. Podle definice parciální derivace funkce f je však derivace funkce $F_i(t)$ v bodě x_i^0 rovna parciální derivaci funkce $f(X)$ podle x_i v bodě X^0, takže

$$F_i'(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^0) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, definovaná na oblasti Ω, může nabývat lokální extrém pouze v těch bodech, v nichž má všechny parciální derivace 1. řádu rovny 0, nebo v těch bodech, v nichž nemá některou parciální derivaci. Bod $X^0 \in \Omega$, v němž má funkce f všechny parciální derivace 1. řádu rovny nule, se nazývá stacionárním bodem *funkce f.*

Příklad 8.17. Určete stacionární body funkce

$$z = x^3 + y^3 - 3xy. \tag{8.58}$$

Řešení. Vypočítejme parciální derivace 1. řádu. Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty body $[x, y]$, pro něž platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Z těchto podmínek dostáváme systém rovnic

$$3x^2 - 3y = 0, \tag{8.59}$$
$$3y^2 - 3x = 0. \tag{8.60}$$

Je to systém nelineárních rovnic o dvou neznámých. Z (8.59) vypočítáme y. Dostáváme

$$y = x^2. \tag{8.61}$$

Dosazením (8.61) do (8.60) dostáváme

$$x^4 - x = 0.$$

Tuto rovnici lze přepsat na tvar

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0. \tag{8.62}$$

Z (8.62) dostáváme $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Další dva kořeny dostáváme řešením rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Tyto kořeny jsou komplexně sdružené. Poněvadž uvažujeme jenom reálné body, nebudeme je uvažovat. Dosadíme-li $x = 0$ do (8.61), dostáváme $y = 0$. Dosadíme-li $x = 1$ do (8.61), dostváme $y = 1$. Má tedy funkce (8.58) dva stacionární body

$$A[0,0], \qquad B[1,1].$$

Funkce $y = x^3 + y^3 - 3xy$ má parciální derivace ve všech bodech. Na základě dosavadních úvah vyplývá, že vyšetřovaná funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech A, B.

Uvažujme nyní opět funkci $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$ n-proměnných, definovanou na oblasti Ω. Budeme vyšetřovat, zda funkce $f(X)$ má ve stacionárních bodech extrém.

Začneme s případem $n = 2$, tedy s funkcemi $z = f(x,y)$ dvou proměnných na oblasti Ω. Nechť bod $[a,b] \in \Omega$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y)$. Podle Taylorovy věty pro $k = 1$ dostáváme

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} k\right] + R_2, \tag{8.63}$$

kde

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{[\xi,\eta]} h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{[\xi,\eta]} hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{[\xi,\eta]} k^2\right]. \tag{8.64}$$

Bod $[\xi,\eta]$ je na úsečce o koncových bodech $[a,b]$, $[a+h, b+k]$.

Poněvadž $[a,b]$ je stacionárním bodem funkce f, je $(\frac{\partial f}{\partial x})_{[a,b]} = 0$, $(\frac{\partial f}{\partial y})_{[a,b]} = 0$. Proto (8.63) lze zapsat jako

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = R_2. \tag{8.65}$$

Je-li tedy $R_2 > 0$ ($R_2 < 0$) pro všechna dostatečně malá h, k,má funkce f v bodě $[a,b]$ lokální minimum (maximum).

Rozborem R_2 se dokáže tato věta.

Věta 8.12.
Nechť funkce $f(x,y)$ má v jistém okolí $U_\delta([a,b])$ bodu $[a,b]$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu. Nechť

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[a,b]} = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[a,b]} = 0.$$

Pro body $[x,y] \in U_\delta([a,b])$ položme

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Je-li $\Delta(a,b) > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. Je-li $\Delta(a,b) < 0$, nemá funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ lokální extrém. V případě, že $\Delta(a,b) > 0$ a $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{[a,b]} > 0$ (< 0) má funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ vlastní lokální minimum (maximum).

Příklad 8.18. Zjistili jsme, že funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má dva stacionární body $A[0,0]$, $B[1,1]$. Rozhodněte, zda tato funkce má v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy$ má spojité parciální derivace 2. řádu ve všech bodech. Výpočtem dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Tedy

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Poněvadž $\Delta(0,0) = -9 < 0$, nemá vyšetřovaná funkce ve stacionárlním bodě $[0,0]$ lokální extrém. Poněvadž $\Delta(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$, má vyšetřovaná funkce ve stacionárním bodě $[1,1]$ lokální extrém. Poněvadž

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{[1,1]} = (6x)_{[1,1]} = 6 > 0,$$

má vyšetřovaná funkce v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

Pro funkce n-proměnných platí analogická věta.

Věta 8.13.

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je definovaná na oblasti Ω. Nechť $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ je jejím stacionárním bodem, tj. nechť

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{X^0} = 0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{X^0} = 0.$$

Nechť v jistém okolí $U_\delta(X^0)$ má funkce $f(X)$ spojité všechny parciální derivace 2. řádu. Označme

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li

$$D_1(X^0) > 0,\ D_2(X^0) > 0, \ldots,\ D_n(X^0) > 0$$

$$(D_1(X^0) < 0,\ D_2(X^0) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(X^0) > 0),$$

má funkce f v bodě X^0 lokální minimum (maximum).

Příklad 8.19. Určete lokální extrémy funkce

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz.$$

Řešení. Položme parciální derivace

$$\begin{aligned} u'_x &= 2x + y - z, \\ u'_y &= 2y + x, \\ u'_z &= 2z - x \end{aligned}$$

rovny nule. Řešením vzniklého systému rovnic určíme jediný stacionární bod $[0, 0, 0]$. Pomocí matice

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

určíme

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Protože $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, má vyšetřovaná funkce v bodě $[0, 0, 0]$ ostré lokální minimum.

Globální etxrémy

Nechť funkce $f(X)$ je definovaná na uzavřené oblasti Ω (tj. na sjednocení oblasti s její hranicí).

Řekneme, že funkce $f(X)$ n–proměnných má globální (absolutní) maximum v bodě $X^0 \in \Omega$, jestliže pro všechny body $X \in \Omega$ platí $f(X) \leq f(X^0)$. Podobně řekneme, že funkce $f(X)$ n–proměnných má globální (absolutní) minimum v bodě $X^0 \in \Omega$, jestliže pro všechny $X \in \Omega$ platí $f(X) \geq f(X^0)$.

Globální maxima a globální minima se nazývají společným názvem *globální extrémy*.

Platí tato věta.

Věta 8.14. *Nechť funkce n–proměných $f(X)$ je spojitá na uzavřené oblasti Ω. Potom má na Ω globální maximum a globální minimum. Je-li X^0 bod, v němž funkce f nabývá na Ω globální maximum (minimum), potom X^0 je buď hraničním bodem Ω, anebo funkce f má v něm lokální maximum (minimum).*

Jako příklad nalezení globálního minima funkce $f(X)$ n–proměnných uveďme následující příklad.

Řešení systému lineárních rovnic metodou nejmenších čtverců

zavedení několika potřebných pojmů

Dříve, než přikročíme k výkladu vlastního tématu, uveďme si několik pojmů. V dalším vektorem z $\mathbb{V}_n$ budeme rozumět sloupcový vektor.

Čtvrecovou matici $\boldsymbol{B}$ řádu n nazýváme symetrickou, jestliže $b_{ij} = b_{ji}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Symetrickou matici $\boldsymbol{B}$ řádu n nazveme pozitivně definitní (semidefinitní), jestliže pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ je

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} > 0 \quad (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \geq 0).$$

Symetrickou matici $\boldsymbol{B}$ řádu n nazveme negativně definitní (semidefinitní), jestliže pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ je

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} < 0 \quad (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq 0).$$

Věta 8.15. (Pomocná) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), kde $m > n$. Nechť hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je $h(\boldsymbol{A}) = n$. Potom matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní. Matice $\boldsymbol{B}$ je regulární.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že submatice $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ matice $\boldsymbol{A}$ vytvořená ze všech sloupců matice $\boldsymbol{A}$ a z jejích prvních n řádků je regulární. Nechť $\boldsymbol{x}$ je nenulový vektor typu $(n, 1)$. Dokažme, že potom vektor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ je nenulový. Skutečně, kdyby vektor $\boldsymbol{y}$ byl nulový, byl by nulový i vektor $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ vytvořený z prvních n složek vektoru $\boldsymbol{y}$. Avšak systém $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ má jediné řešení a to vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Tedy, je-li $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, je $\boldsymbol{Ax} \neq \boldsymbol{0}$. Nechť $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Označme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$. Potom $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{Ax})^T(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}$. Poněvadž $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 > 0$, je $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} > 0$. Je tedy matice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní. Matice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je symetrická, neboť $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Dokažme, že $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je regulární. Kdyby nebyla regulární, existoval by takový nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$, že $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. Potom by $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = 0$. To je spor, neboť $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní. □

Začněme nyní s výkladem nahoře uvedeného tématu. Vyjdeme z příkladu.

Uvažujme systém lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde   motivační příklad

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}1 \\ 6{,}9 \\ 9{,}1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice soustavy $\boldsymbol{A}$ je 2 a hodnost matice rozšířené $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je 3. Tedy systém rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení. Označme $\boldsymbol{r}$ vektor určený vztahem

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b},$$

to jest

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}1 \\ 6{,}9 \\ 9{,}1 \end{pmatrix}.$$

Zvolme tři vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, ${}^0\boldsymbol{x}$ takto:

$${}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2{,}01 \\ 1{,}00 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li ${}^1\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}{}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}{}^2\boldsymbol{x}$, ${}^0\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}{}^0\boldsymbol{x}$, dostáváme

$${}^1\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}1 \\ -2{,}9 \\ -4{,}1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}08 \\ 0{,}13 \\ -0{,}06 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\begin{aligned} ||{}^1\boldsymbol{r}||^2 &= 1^2 + 2{,}1^2 + 2{,}9^2 + 4{,}1^2 = 30{,}63, \\ ||{}^2\boldsymbol{r}||^2 &= 0^2 + 0{,}1^2 + 0{,}1^2 + 0{,}1^2 = 0{,}03, \\ ||{}^0\boldsymbol{r}||^2 &= 0{,}01^2 + 0{,}08^2 + 0{,}13^2 + 0{,}06^2 = 0{,}027. \end{aligned}$$

Protože $||{}^0\boldsymbol{r}||^2 \leq ||{}^2\boldsymbol{r}||^2 \leq ||{}^1\boldsymbol{r}||^2$, řekneme, že vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ z vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, ${}^0\boldsymbol{x}$ „nejlépe“ vyhovuje systému rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Lze ukázat, že žádnému vektoru $\boldsymbol{x}$ neodpovídá vektor $\boldsymbol{r}$, pro nějž by $||\boldsymbol{r}||^2 \leq ||{}^0\boldsymbol{r}||^2$. Proto vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ nazveme zobecněným řešením uvažovaného systému rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

popis metody nejmenších čtvreců

Nyní přikročme k zavedení pojmu „zobecněné“ řešení systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}. \tag{8.66}$$

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), $\boldsymbol{b}$ je vektor typu $(m, 1)$ a $\boldsymbol{x}$ je neznámý vektor. Předpokládejme, že hodnost $h(\boldsymbol{A})$ matice soustavy je n a hodnost $h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je $> n$. Potom systém rovnic nemá řešení v klasickém slova smyslu. Pro některé aplikace se jeví účelným zobecnit pojem řešení systému (8.66). Zaveďme vektor $\boldsymbol{r}$ vztahem

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}. \tag{8.67}$$

Nazveme jej vektorem reziduí. Každé uspořádané n–tici reálných čísel x_1, $\ldots$, x_n přiřaďme číslo z vztahem

$$z = ||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||^2, \quad \text{neboli} \quad z = ||\boldsymbol{r}||^2. \tag{8.68}$$

Je tedy $z = ||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||^2$ funkcí n–proměnných $x_1, \ldots, x_n$. Bod $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$, v němž funkce (8.68) nabývá svého minima, nazveme zobecněným řešením systému (8.66), resp. řešením metodou nejmenších čtverců.

Poznámka. Pojem „metoda nejmenších čtverců“ vyplývá z tvaru funkce (8.68), tj.

$$z = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2$$

a hledáním bodu $[x_1, \ldots, x_n]$, pro nejž je tento součet minimální.

Zabývejme se úlohou nalézt bod $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$, v němž funkce (8.68) nybývá svého minima. Funkci (8.68) lze určit jako skalární součin

$$z = (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}), \quad \text{to jest} \quad (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b})^T \cdot (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}). \tag{8.69}$$

Výpočtem tohoto součinu dostáváme postupně

$$z = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{b}^T) \cdot (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}.$$

Lehce nahlédneme, že $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ax}$ jsou matice typu $(1, 1)$, takže $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ax}$ Lze tedy (8.69) zapsat jako

$$z = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}. \tag{8.70}$$

Označíme-li $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$, lze funkci (8.70) přepsat na tvar

$$z = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Dx} - 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}. \tag{8.71}$$

Abychom nalezli bod, v němž tato funkce nabývá svého absolutního minima, hledejme stacionární bod funkce (8.71) jako řešení systému rovnic

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \tag{8.72}$$

Vypočítejme tedy $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ derivací (8.71) podle x_i.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Big((d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{ii}x_i + \dots + d_{in}x_n) + \\ +(d_{1i}x_1 + d_{2i}x_2 + \dots + d_{ii}x_i + \dots + d_{ni}x_n)\Big) - 2c_i$$

Poněvadž $d_{ij} = d_{ji}$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 2(d_{i1}x_1 + \dots + d_{ji}x_j + \dots + d_{in}x_n) - 2c_i. \tag{8.73}$$

Systém rovnic (8.72) lze zapsat jako

$$d_{i1}x_1 + \dots + d_{in}x_n = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{8.74}$$

V maticové notaci lze tento systém zapsat jako

$$\boldsymbol{Dx} = \boldsymbol{c}, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}. \tag{8.75}$$

Poněvadž $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je podle věty 8.15 regulární maticí, má systém rovnic (8.75) právě jedno řešení $\boldsymbol{x}^0$, takže funkce (8.71) má právě jeden stacionární bod $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$.

Dokažme nyní, že funkce (8.71) má v tomto bodě lokální a tedy i absolutní minimum. Vypočítejme $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Derivováním (8.73) podle x_j dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 2d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{8.76}$$

Zvolme libovolně n čísel $h_1, h_2, \dots, h_n$, z nichž alespoň jedno je nenulové. Dokážeme, že

$$z(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) > z(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \tag{8.77}$$

Označme $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$.

Užitím Taylorovy věty dostáváme

$$z(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) = z(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^2 z(x_1^0, \dots, x_n^0). \tag{8.78}$$

Poněvadž $\frac{\partial z(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} = 0$, dostáváme z (8.78) s ohledem na (8.76)

$$z(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) = z(x_1^0, \dots, x_n^0) + \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{Dh}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{D}$ je pozitivně definitní, dostáváme

$$z(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) - z(x_1^0, \dots, x_n^0) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{Dh} > 0.$$

Má tedy funkce (8.72) v bodě $[x_1^0, \dots, x_n^0]$ lokální minimum. Dospěli jsme k tomuto závěru.

Nechť v systému rovnic

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

je $\boldsymbol{A}$ *matice typu* (m, n)*, kde* $m > n$*. Nechť její hodnost je* n*. Nechť* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_m$ *je nenulový vektor. Označme*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}.$$

Vektor $\boldsymbol{r}$ *nazýváme vektorem reziduí. Existuje právě jeden vektor* $\boldsymbol{x}^0$*, pro nějž je* $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2$ *minimální. Tento vektor* $\boldsymbol{x}^0$ *je řešením tzv. systému normálních rovnic*

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}.$$

O vektoru $\boldsymbol{x}^0$ *říkáme, že byl získán ze systému* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *metodou nejmenších čtverců.*

Příklad 8.20. Řešte metodou nejmenších čtverců systém

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6{,}10 \\ 12{,}80 \\ 24{,}12 \\ 39{,}30 \\ 57{,}60 \\ 81{,}20 \\ 107{,}70 \\ 139{,}10 \\ 173{,}70 \\ 219{,}80 \\ 256{,}40 \\ 303{,}30 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Dostáváme

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 60710 & 6084 & 650 \\ 6084 & 650 & 78 \\ 650 & 78 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1{,}2959538 \\ 0{,}1306446 \\ 0{,}0141512 \end{pmatrix}.$$

Řešením systému

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}.$$

obržíme hledané řešení daného systému metodou nejmenších čtverců

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} 2{,}01002 \\ 0{,}90596 \\ 0{,}01415 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte si vektor reziduí

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}.$$

Několik poznámek k hledání globálních extrémů funkcí n-proměnných na dané množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$.

Hledání absolutních extrémů funkce na dané množině je velice důležitou matematickou aplikací. Jde např. o minimalizaci rozvozu zboží, o optimalizaci výroby, atd. Řešení takových úloh bývá obtížné. První problém je už ve vytvoření matematického modelu. K řešení je nutno používat výpočetní techniku.

Je vypracována efektivní metoda na řešení velice často se vyskytujících úloh následujícího typu.

Obecná formulace úlohy lineárního programování

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte minumum funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_+ \cdots + c_nx_n, \tag{8.79}$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou daná čísla, na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$ definované podmínkami

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{8.80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = k+1, \ldots, m, \tag{8.81}$$

kde a_{ij}, b_i jsou daná čísla, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_j \geq 0 \quad \text{pro některá } j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8.82}$$

Funkce (8.79) se nazývá účelovou funkcí. Podmínky (8.80), (8.81), (8.82) jsou takzvané omezující podmínky. Každý bod $X = [x_1^0, \ldots, x_n^0]$, který těmto podmínkám vyhovuje, se nazývá přípustným řešením.

Jako příklad úloh tohoto typu si uveďme tyto dvě úlohy.

Příklad 8.21. [2] Formulujme úlohu, která konkretizuje tzv. „dopravní problém“: Ze tří mlýnů jsou zásobovány moukou čtyři pekárny. Kapacity

[2] převzato z [4]

mlýnů jsou 24, 18 a 8 t. Požadavky pekáren jsou 10, 14, 16 a 10 t. Vzdálenosti od každého mlýna ke každé pekárně jsou dány v km v následující tabulce.

		Pekárny			
		1	2	3	4
Mlýny	1	35	85	80	105
	2	20	35	50	60
	3	40	55	15	40

Je třeba stanovit dopravní program takový, aby celkový objem dopravy byl minimální. Jednotkou objemu dopravy budou tunokilometry.

Nechť x_{ij} je dopravované množství v tunách z i–tého mlýna do j–té pekárny ($i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4$). Protože součet kapacit je roven součtu požadavků (50 t), mohou být podmínky splněny pouze jako rovnice.

Matematický model, odpovídající formulovanému problému, je pak následující.

Hledáme nezáporné hodnoty proměnných x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, vyhovující podmínkám.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & & & & & & & & & & & & & & & & & = 24 \\
 & & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & & & & & & & & & = 18 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & = 8 \\
x_{11} & & & & & & & + & x_{21} & & & & & & & + & x_{31} & & & & & & & = 10 \\
 & & x_{12} & & & & & & & + & x_{22} & & & & & & & + & x_{32} & & & & & = 14 \\
 & & & & x_{13} & & & & & & & + & x_{23} & & & & & & & + & x_{33} & & & = 16 \\
 & & & & & & x_{14} & & & & & & & + & x_{24} & & & & & & & + & x_{34} & = 10
\end{array}
$$

a minimalizující kriteriální funkci

$$
\begin{aligned}
z \quad = \quad & 35x_{11} + 85x_{12} + 80x_{13} + 105x_{14} + 20x_{21} + 35x_{22} + \\
& +50x_{23} + 60x_{24} + 40x_{31} + 55x_{32} + 15x_{33} + 40x_{34}.
\end{aligned}
$$

První tři rovnice omezujících podmínek vyjadřují kapacity mlýnů, poslední čtyři vyjadřují požadavky pekáren.

Koeficienty kriteriální funkce z čteme přitom z výše uvedené tabulky.

Příklad 8.22. [3] Služby zřízenců jsou na daném nádraží osmihodinové s nástupem o půlnoci, ve čtyři hodiny, atd. vždy po čtyřech hodinách. K tomu, aby byl udržen hladký provoz musí být ve službě minimálně tento počet zřízenců (viz tabulka).

Hodiny	Počet zřízenců	Hodiny	Počet zřízenců
0 – 4	3	12 – 16	8
4 – 8	8	16 – 20	14
8 – 12	10	20 – 24	5

Kolik zřízenců má nastoupit do služby v každou nástupní dobu, aby nutné služby byly zajištěny s celkově minimálním počtem osob?

[3] převzato z [4]

K vyřešení tohoto problému označme

x_1 ... počet zřízenců, kteří nastoupí službu v 0 hodin
x_2 ... počet zřízenců, kteří nastoupí službu ve 4 hodiny
x_3 ... počet zřízenců, kteří nastoupí službu v 6 hodin
$\vdots$
x_6 ... počet zřízenců, kteří nastoupí službu ve 20 hodin

Například v hodinách 0 až 4 budou sloužit zřízenci, kteří nastoupili ve 20 hodin, a zřízenci, kteří nastoupili o půlnoci.

Hledáme tedy nezáporné celočíselné hodnoty proměnných x_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$, vyhovující podmínkám

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & \geq & 3 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq & 8 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 10 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq & 8 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & \geq & 14 \\
 & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \geq & 5
\end{array}$$

a minimalizující funkci

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Poznámka. Věta 8.13 se zdá být jednoduchá. Je srozumitelná, avšak při řešení konkrétních úloh můžeme narazit na řadu obtíží. Hledáme-li extrémy funkce $z = f(X)$ na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$, hledáme podle věty 8.13 napřed stacionární body. Určení stacionárních bodů vede na řešení systému n rovnic. To může být v konkrétních případech velice složitá záležitost. Namnoze je zapotřebí použít numerických metod. Navíc absolutní extrém je často v hraničním bodě množiny M, na níž absolutní extrém hledáme.

Je řada metod, jak takovéto úlohy řešit užitím výpočetní techniky. Předpokládejme, že hledáme globální minimum funkce $f(X)$ na množině M. Zvolíme výchozí bod X^0 v M a v něm určíme funkční hodnotu, označme ji z^0. Nějakým algoritmem (je známa řada algoritmů) se přejde k dalšímu bodu X^1, v němž funkce nabývá menší hodnoty než z^0. Tímto způsobem postupujeme, dokud uvedeným algoritmem jsme schopni nalézt bod, v němž je hodnota funkce menší než v minulém kroku.

Při složitější úloze však nemáme jistotu, že jsme skutečně dosáhli absolutního minima. Někdy se však musíme spokojit, nalezneme-li bod, v němž je hodnota funkce „dostatečně malá“.

8.5 Shrnutí, úlohy

Shrnutí kapitoly

V kapitole se pojednává o reálných funkcích n–proměnných. Uvádí se pojem limity funkce n–proměnných ve vnitřních bodech množiny i v jejích hraničních bodech. Zavádí se pojem parciálních derivací. Dále se zavádí pojem totálního diferenciálu funkce n–proměnných a Taylorova věta. Důraz je položen na hledání lokálních a absolutních extrémů na dané množině.

Úlohy

1. Vysvětlete pojem limity funkce n–proměnných (stačí vlastními slovy).

2. Pojednejte o spojitosti funkce n–proměnných v daném bodě.

3. Osvětlete pojem parciálních derivací funkcí n–proměnných, včetně jejich geometrického významu.

4. Jak nalezneme tečnu ke křivce v daném bodě?

5. Jak se určí tečná rovina k dané ploše $z = f(X)$ v jejím bodě?

6. Co je to lokální diferenciál funkce n–proměnných?

7. Vyslovte Taylorovu větu.

8. Pojednejte o hledání extrémů funkcí n–proměnných.

9. Pojednejte o metodě řešení systému m lineárních rovnic o n neznámých metodou nejmenších čtverců.

10. Určete definiční obor funkce

$$z = \frac{x+y}{\sqrt{-x^2+x-1}}.$$

$[D_f = \emptyset]$

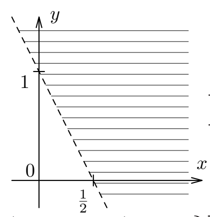
11. Určete definiční obor funkcí

a) $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ $[\mathbb{E}_2 - \{[0,0]\}]$

b) $z = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2-4}}$

[Vnějšek kruhu se středem $S = [1,0]$ o poloměru 2.]

c) $z = \ln(2x + y - 1)$

[Množina bodů $[x,y]$, pro něž je $2x + y - 1 > 0$. 

]

d) $z = \frac{2x-y}{(x+y)(x^2-4y^2)}$ $[\{[x,y]:\ x \neq -y, x \neq \pm 2y\}]$

12. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ $[\infty]$

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,3]} \frac{3x+y}{x^2+y^2}$ $[\frac{9}{13}]$

13. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu (ve výsledcích jsou uvedeny v pořadí $z'_x,\ z'_y,\ z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$)

a) $z = \frac{x}{y}$ $[\frac{1}{y},\ -\frac{x}{y^2},\ 0,\ -\frac{1}{y^2},\ \frac{2x}{y^3}]$

b) $z = 3x^5 - 7x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^2 + x$ $[15x^4 - 14xy^2 + 3y^2 + 1,$ $-14x^2y + 6xy - 4y,\ 60x^3 - 14y^2,\ -28xy + 6y,\ -14x^2 + 6x - 4]$

c) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{-3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}},\ \frac{y\cdot(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}},\ \frac{-x\cdot(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}},]$

d) $z = \ln(x + y^2)$ $[\frac{1}{x+y^2},\ \frac{2y}{x+y^2},\ \frac{-1}{(x+y^2)^2},\ \frac{-2y}{(x+y^2)^2},\ \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}]$

14. Vypočítejte (bez použití kalkulačky) přibližně hodnotu $e^{0,1} \cdot \sin 0{,}2$ užitím totálního diferenciálu. [0,2]

15. Nalezněte lokální extrémy funkcí

a) $z = x^2 + (y-1)^2$ [v bodě $[0,1]$, minimum]

b) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ [v bodě $[1,2]$, minimum]

c) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ [v bodě $[-1,-2,3]$, minimum]

16. Napište tečnou rovinu k ploše $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v jejím bodě $T[1,1,?]$.

17. Napište totální diferenciál funkce $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4z - 6z$ v bodě $[1,2,3]$.

Rejstřík

Rejstřík

Literatura

Literatura

[1] Jan Coufal, Jindřich Klůfa, Miloš Kaňka, Jiří Henzler: *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. ISBN 80-7187-1484

[2] Jiří Kopáček: *Matematika pro fyziky II*. (skriptum), UK Praha

[3] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*. ISBN 80-85849-78-X

[4] Jindřich Klapka, Jiří Dvořák, Pavel Popela: *Metody operačního výzkumu*. VUT v Brně, 1996