

P8 - Spojité Markovovy řetězce

2. Markovovy řetězce se spojitým časem

2.1 Obecné vlastnosti náhodných procesů se spojitým časem

Předpokládáme-li, že se přechody mezi jednotlivými stavy mohou uskutečnit v libovolně blízkých časových okamžicích, můžeme vystihnout případy změn ve spojitém čase. Mluvíme potom o Markovově resp. markovském procesu se spojitým časem.

Náhodné proměnné $X(t)$ nabývají stejně jako u (diskrétních) Markovových řetězců hodnoty, které jsou přiřazeny určitým stavům. V daném okamžiku se může vyskytnout jeden ze stavů $i_1, i_2, i_3, \dots, i_M$. Okamžiky $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, \dots$ se liší o veličinu Δt , která se blíží k nule¹.

Dochází-li ke změnám v okamžicích, které se liší o Δt , potom pro tento interval **musíme** sledovat i pravděpodobnosti přechodu. Necht' existují limity měnicích se pravděpodobností, které znamenají pravděpodobnosti přechodu v době $t + \Delta t$, podmíněné situací, která nastala v době t ve tvaru

$$(2.1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t) - p_{ij}(t, t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geq 0$$

V řadě situací vystačíme předpokladem, že tyto pravděpodobnosti přechodu $a_{ij}(t)$ jsou konstantní, tedy nezávislé na t tedy a_{ij} . Pravděpodobnost setrvání v daném j -tém stavu $p_{jj}(t, t + \Delta t)$ v limitně neomezeně malé době by se ovšem blížila k jedné. Proto zavádíme (v limitě) její doplněk do 1, tedy

$$(2.2) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(t, t + \Delta t) - (1 - p_{jj}(t, t))}{\Delta t} = a_{jj}(t) \geq 0$$

Limita (2.1) představuje intenzitu pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j), limita (2.2) představuje intenzitu výstupu ze stavu j (kamkoliv jinam).

Matici pravděpodobností přechodu, zachycující podmíněné pravděpodobnosti výskytu určitých stavů v době $t + \Delta t$ podmíněné výskytem určitých stavů v době t lze psát ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & \dots & a_{1M}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1 - a_{22}(t)\Delta t & \dots & a_{2M}(t)\Delta t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}(t)\Delta t & a_{M2}(t)\Delta t & \dots & 1 - a_{MM}(t)\Delta t \end{pmatrix}$$

¹ Zápis $\Delta t \rightarrow 0$ ve svém důsledku znamená, že náhodný proces jsme schopni pozorovat v kterémkoliv časovém okamžiku z intervalu $\langle 0, T \rangle$.

Protože řádkové součty v matici P jsou jednotkové, musí platit

$$(2.3) \quad -a_{jj}(t) = \sum_{i=1, i \neq j}^M a_{ij}(t)$$

a tedy součty prvků v řádcích matice $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ jsou nulové.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1M}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2M}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}(t) & a_{M2}(t) & \dots & a_{MM}(t) \end{pmatrix}$$

V důsledku toho lze řádky matice $A(t)$ násobit libovolným nenulovým číslem,

Matici $A(t)$ nazýváme maticí intenzit pravděpodobností přechodu a s maticí $P(t, t + \Delta t)$ souvisí tímto vztahem:

$$(2.5) \quad P(t, t + \Delta t) = I_M + A(t) \cdot \Delta t$$

Pro absolutní pravděpodobnosti lze psát

$$(2.4) \quad p(t + \Delta t) = p(t) \cdot P(t, t + \Delta t) .$$

Vyjádříme-li absolutní pravděpodobnosti pomocí matice intenzit přechodu $A(t)$, můžeme zapsat

$$p(t + \Delta t) = p(t) \cdot [I_M + A(t) \cdot \Delta t] . \text{ neboli po úpravě}$$

$$(2.6) \quad \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = p(t) \cdot A(t)$$

Přejdeme-li k limitnímu vyjádření pro neomezeně se zmenšující Δt , dostaneme

$$(2.7) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = p'(t) \text{ a odtud z}$$

$$(2.8) \quad p'(t) = p(t) \cdot A(t) .$$

Jestliže průběh náhodného procesu nezávisí na době, která uplynula od počátku procesu, mluvíme opět o *homogenních Markovových procesech*, v opačném případě o *nehomogenních Markovových procesech*.

Matici intenzit přechodu značíme v případě homogenního procesu s konečným počtem stavů $A = \{a_{ij}\}$, kde nyní již intenzity a_{ij} nezávisí na čase.

Pak můžeme vztah (2.8) vyjádřit ve tvaru

$$(2.9) \quad p'(t) = p(t) \cdot A .$$

Z formálně matematického hlediska představuje vztah (2.8) soustavu diferenciálních rovnic pro veličiny $p_i(t)$, kterou lze zapsat následovně

$$(2.9A) \quad \frac{p'(t)}{p(t)} = A, \text{ resp. } \frac{d(\log(p(t)))}{dt} = A.$$

Jako řešení této soustavy dostáváme:

$\lg(p(t)) = At + c$ resp. $p(t) = k \cdot e^{At}$, kde za k můžeme jako počáteční podmínku volit vektor $p(0)$, takže máme zápis

(2.10) $p(t) = p(0) \cdot e^{At}$, ve kterém je exponenciální maticová funkce A definována jako mocninný rozvoj

$$(2.11) \quad e^{At} = I_M + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots.^2$$

Ukazuje se, že veličiny $p(t)$ budou – až na výchozí vektor $p(0)$ - dány určitým typem mocninné řady.

Existuje-li limitní (=stacionární) rozdělení pravděpodobností, pak platí

$$(2.4) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(t + \Delta t) = p(t), \text{ takže z toho plyne } p'(t) = 0 \text{ a tedy}$$

Pro rozdělení limitních pravděpodobností lze psát dle (2.9)

$$(2.10) \quad p \cdot A = 0.$$

Protože platí – až na konstantu - $A = P - I_M$, je limitní rozdělení stejné jako v případě, že pracujeme s procesy (řetězci) s nespojitým časem.

² Vyplývá to z Taylorova rozvoje exponenciální funkce pro maticový argument

2.2 Vytvořující funkce pro spojité Markovovy procesy

Analogií vytvořující funkce $F(s)$ bude pro spojité Markovův proces funkce

$$(2.12) \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Tento tvar vytvořující funkce odpovídá Laplaceově transformaci. Podobně jako u vytvořující funkce u diskrétních Markovových řetězců (z-transformace) existuje i zde jednoznačná korespondence mezi původní funkcí $f(t)$ a její transformací $F(s)$. U jednoduchých situací obvykle vystačíme při použití této transformace s tím, že uijeme „slovníku“ transformací. Nejčastěji užívané funkce obsahuje následující tabulka:

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
e^{-at}	$1/s + a$
T	$\frac{1}{s^2}$

Použijeme-li k analýze systému vztah (2.10), tvoříme Laplaceovu transformaci pro původní funkci, již je vektor $p(t)$. Označme Laplaceovu transformaci tohoto vektoru $p(t)$ symbolem $F(s)$, pak máme

$$(2.13) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p(t) dt.$$

Uijeme-li vztah (2.10), pak pro vektor $p(t)$ platí

$$(2.14) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p(0) \cdot e^{At} dt = p(0) \cdot \int_0^{\infty} e^{-st(I-A)} dt.$$

Protože pro maticové funkce lze v řadě případů využít podobné vztahy jako pro funkce skalárních proměnných, můžeme provést analogický výpočet integrálu³:

$$\int_0^{\infty} e^{-tK} dt = \left[\begin{array}{c} e^{-tK} \\ -K \end{array} \right]_0^{\infty} = \left[\begin{array}{c} e^{-\infty K} - e^{-0K} \\ -K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 - 1 \\ -K \end{array} \right] = K^{-1}.$$

Můžeme tedy pro funkci $F(s)$ psát

$$(2.15) \quad F(s) = p(0) \cdot [sI_M - A]^{-1}.$$

Matrice $[sI_M - A]^{-1}$ je analogií matice $[I_M - zP]^{-1}$, která byla použita při analýze stacionárního rozdělení stavů diskrétního Markovova řetězce.

³ K je v tomto případě matice rozměrů $M \times M$.

Příklad 2.1

Stanovte vektor absolutních pravděpodobností $p(t)$, má-li matice intenzit přechodu

tvář $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

řešení: sestrojíme inverzní matici k matici $sI_M - A$:

$$sI_M - A = \begin{pmatrix} s+5 & -5 \\ -4 & s+4 \end{pmatrix}.$$

(Její determinant je $(s+5)(s+4) - 20 = s^2 + 9s + 20 - 20 = s(s+9)$). Proto

$$(sI_M - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+9)} \begin{pmatrix} s+4 & 5 \\ 4 & s+5 \end{pmatrix}.$$

Dále uplatníme rozklad součinu ve jmenovateli na parciální zlomky se jmenovateli $1/s$ a $1/(s+9)$. Dostaneme

$$\frac{1}{s(s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+9}$$

$A(s+9) + B.s = 1$, tj. $(A+B).s + 9A = 1$, odkud máme

$$A+B=0 \quad 9A=1, \text{ s řešením } A = \frac{1}{9} \quad B = -\frac{1}{9}$$

Dostáváme tedy

$$(sI_M - A)^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{s+9} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Transformované funkci $1/s$ odpovídá původní funkce rovná 1 a funkci $1/(s+9)$ odpovídá původní funkce e^{-9t} .

Vektor $p(t)$ lze tedy psát jako

$$p(t) = p(0) \cdot \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + e^{-9t} \cdot \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right].$$

Odtud je patrné, že se analyzovaný systém ustálí ve stacionární situaci (dané vektorem $a = (4/9 \quad 5/9)$), přičemž rychlost směřování k tomuto ustálenému stavu je úměrná výrazu e^{-9t} ⁴

⁴ Význam druhého členu postupně odezní, protože zřejmě $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-9t} \cdot B = 0$ pro matici B s konečně velkými prvky.