P14 – S paralelních kanálů

3.4 Exponenciální model s paralelní obsluhou (S-kanálový)

V realitě se častěji než s obsluhou probíhající pouze v jednom obslužném zařízení se systémy poskytující současně obsluhu v konečném počtu homogenních kanálů. Výhodou těchto systémů je, že může zpravidla přizpůsobit kapacitu obsluhy intenzitě vstupního proudu požadavků.

Demonstrujme situaci na otevřeném systému majícím nanejvýš S homogenních paralelně obsluhujících zařízení, z nichž každé má intenzitu obsluhy μ . jsou-li v provozu dvě zařízení, budou mít dohromady intenzitu obsluhy 2μ atd. Nejvýše je možné zvýšit intenzitu obsluhy na $S\mu$. Fronta se začíná vytvářet až při vstupu (S+1)-požadavku.

Předpokládám, že rozdělení intervalů mezi příchody , jakož i rozdělení dob trvání obsluhy v každém zařízení je opět exponenciální. Dále se vychází z toho, že požadavky vstupující do systému s konstantní intenzitou λ a čekají při obsazení všech obslužných zařízení trpělivě na odbavení. Počet míst ve frontě je neomezený a obsluha probíhá v pořadí, v jakém požadavky do systému přišly.

Marice pravděpodobností přechodu zde bude mít tvar

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda.\Delta t & \lambda.\Delta t & 0 & 0 & 0 & .... \\ \mu.\Delta t & 1-(\lambda+\mu).\Delta t & \lambda.\Delta t & 0 & 0 & .... \\ 0 & 2\mu.\Delta t & 1-(\lambda+2\mu).\Delta t & \lambda.\Delta t & 0 & .... \\ 0 & 0 & 0 & 1-(\lambda+(s-1)\mu).\Delta t & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & S\mu.\Delta t & 1-(\lambda+S\mu).\Delta t & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S\mu\Delta t & .... \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě jednoduchého exponenciálního MHO máme

(3.21) $$p((t+\Delta t) = p((t).P . , \text{kde}$$

(3.22) $$p(t) = [p_0(t) \quad p_1(t) \quad p_2(t)..... \quad p_n(t).........],$$

Ze vztahu (3.22) dostaneme postupně

(3.23A) $p_0(t+\Delta t) = [1-\lambda.\Delta t].p_0(t) + \mu.\Delta t.p_1(t)$

(3.23B) $p_k(t+\Delta t) = \lambda.\Delta t.p_{k-1}(t) + [1-\lambda.\Delta t - k\mu.\Delta t].p_k(t) + (k+1)\mu.\Delta t.p_{k+1}(t)$ pro $1 \le k < S$

(3.23C) $p_k(t+\Delta t) = \lambda.\Delta t.p_{k-1}(t) + [1-\lambda.\Delta t - S\mu.\Delta t].p_k(t) + S.\mu.\Delta t.p_{k+1}(t)$ pro $S \le k$

Po přechodu k limitám pro $\Delta t \to 0$:

(3.24A) $p_0'(t) = -\lambda.p_0(t) + \mu.p_1(t)$

(3.24B) $p_k'(t) = \lambda.p_{k-1}(t) + (\lambda + k\mu).p_k(t) + (k+1)\mu.p_{k+1}(t)$ pro $1 \le k < S$

(3.24C) $p_k'(t) = \lambda.p_{k-1}(t) + (\lambda + S\mu).p_k(t) + S.\mu.p_{k+1}(t)$ pro $S \le k$.

Získali jsem takto soustavu lineárních homogenních diferenciálních rovnic pro pravděpodobnosti $p_0(t)$ $p_1(t)$ $p_2(t)$..... $p_k(t)$....

Předpokládáme-li ustálení systému ve stabilizovaném stavu

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Můžeme soustavu (3.24) přepsat do tvaru

(3.25A) $\lambda.p_0(t) = \mu.p_1(t)$

(3.25B) $(\lambda + k\mu).p_k(t) = \lambda.p_{k-1}(t) + (k+1)\mu.p_{k+1}(t)$ pro $1 \le k < S$

(3.25C) $(\lambda + S\mu).p_k(t) = \lambda.p_{k-1}(t) + S.\mu.p_{k+1}(t)$ pro $S \le k$.

Jak patrno, pravděpodobnosti p_0, p_1, p_2,..... p_k.... můžeme určit postupným dosazováním. Pro zjednodušení použijeme zápis $\rho = \lambda / \mu$ a dostaneme:

(3.26B) $$p_k = \frac{\rho^k}{k!}.p_0 \qquad \text{pro } 1 \le k < S$$

(3.26C) $$p_k = \frac{\rho^k}{S^k}.\frac{S^S}{S!}p_0 \qquad \text{pro } S \le k.$$

Veličinu p_0 dostaneme opět z podmínky $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$:

V konstruovaném součtu budou nyní dva typy výrazů, což odpovídá odlišným zápisům (3.26B), (3.26C). Obecně lze zapsat

(3.27) $$p_0\left[\sum_{j=0}^{S-1}\frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=S}^{\infty}\frac{\rho^j}{S^{j-S}.S!}\right] = 1 .$$

Druhý výraz na levé straně (3.27) lze upravit

(3.27A) $$\sum_{j=S}^{\infty}\frac{\rho^j}{S^{j-S}.S!}.p_0 = \frac{\rho^S}{S!}.\sum_{j=S}^{\infty}\left(\frac{\rho}{S}\right)^{j-S}.p_0 = \frac{\rho^S}{S!}.\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{S}\right)^{i}.p_0 = \frac{\rho^S}{S!}.\frac{1}{1-\frac{\rho}{S}}.p_0 .$$

Proto dále máme

(3.28) $$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{S-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^S}{S!}.\frac{1}{1-\frac{\rho}{S}}\right]^{-1}$$

V tomto systému je podmínka stabilizace ve tvaru

(3.29) $$P(k \geq S) = p_0 . \frac{1}{S!} . \rho^S . \frac{1}{1 - \frac{\rho}{S}}$$

Stanovme nyní některé základní charakteristiky systému frontě apod.

Průměrný počet jednotek v systému

Platí-li pro průměrný počet jednotek čekajících ve frontě

(3.30) $$\tilde{n}_f = \sum_{k=S+1}^{\infty} (k - S).p_k$$

a pro průměrný počet nevyužitých stanic obsluhy

(3.31) $$\tilde{S} = \sum_{k=0}^{S} (S - k).p_k \quad \text{, bude}$$

(3.32) $$\tilde{n}_f - \tilde{S} = \sum_{k=S+1}^{\infty} (k - S).p_k - \sum_{k=0}^{S} (S - k).p_k = \tilde{n} - \tilde{S}$$

průměrný počet jednotek $\tilde{n}$ v systému

(3.33) $$\tilde{n} = \tilde{n}_f + S - \tilde{S} \quad \text{, neboli}$$

průměrný počet jednotek v systému je roven součtu průměrného počtu jednotek ve frontě a průměrného počtu obsazených stanic obsluhy $S - \tilde{S}$

Užijeme-li při stanovení průměrného počtu jednotek ve frontě vztah pro stacionární pravděpodobnosti , dostaneme

(3.34) $$\tilde{n}_f = p_0 . \frac{\rho^{S+1}}{(S+1)!} . \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{S}\right)^2} \quad \text{, kde}$$

Velikost p_0 je dána vztahem (3.28).

Protože předpokládáme konstantní intenzitu příchodů λ , získáme

průměrnou dobu čekání ve frontě ze vztahu

(3.35) $$\tilde{T}_f = \frac{\tilde{n}_f}{\lambda}$$

a průměrnou dobu, kterou stráví požadavek v systému lze určit jako

(3.36) $$\tilde{T} = \tilde{T}_f + \frac{1}{\mu}, \text{ resp. } \tilde{T} = \frac{\tilde{n}}{\lambda} .$$

Při konstantní intenzitě příchodů λ vstoupí během intervalu délky *t* do systému v průměru λt . požadavků. Je-li průměrná doba obsluhy jednoho požadavku v kterémkoliv obslužném zařízení $\frac{1}{\mu}$, nezávislá na stavu systému, pak průměrná doba obsluhy λt požadavků je

(3.37) $$\frac{1}{\mu}.\lambda t = \rho.t$$

Je-li v systému místo S obslužných zařízení obsluhujících během intervalu délky *t* s intenzitou $S.\mu$ v provozu jen jedno obslužné zařízení s intenzitou obsluhy μ , ovšem po dobu $S.\mu$, pak průměrná doba, po kterou je toto zařízení obsazeno, je $\rho.t$, resp. $(1-\rho).t$ je průměrná doba jeho nevyužití.

Z předešlého vyplývá, že v systému je v průměru ρ obsazených obslužných linek, takže pro průměrný počet nevyužitých obslužných linek platí

(3.38) $$\tilde{S} = S - \rho \ .$$