P3 - Klasifikace stavů Markovova řetězce

1. 8 Trvalé (nulové, nenulové a absorpční stavy), přechodné stavy

Definice 6

Stav i Markovova řetězce se nazývá trvalý [recurrent state][1], **jestliže platí** $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$

Tato podmínka znamená, že pokud se někdy proces nachází ve stavu *i*, pak se aspoň někdy v budoucnu proces opět (s určitostí) do stavu *i* opět dostane. Trvalé stavy mohou být jednak takové, že návrat do výchozího stavu může nastat kdykoliv nebo až po konečném nebo nekonečném počtu kroků.

Speciální případem trvalého stavu je tzv. absorpční stav, ze kterého se nelze dostat (po jakémkoliv počtu kroků) **do jiného stavu** (tedy ani do jiného trvalého).

Definice 7

Stav i Markovova řetězce se nazývá absorpční [absorbing state], **jestliže platí** $p_{ii} = 1$

Tato podmínka znamená, že pokud se někdy sledovaný proces dostane do stavu *i*, pak již tento stav nikdy neopustí. Odpovídá to situaci, kdy (jednokroková) **pravděpodobnost přechodu ze stavu do i do stavu i je rovna 1.**

Definice 8

Stav i Markovova řetězce se nazývá přechodný [transient state], **jestliže platí** $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ **Tato podmínka znamená, že pokud se někdy proces dostane do stavu *i*, pak existuje kladná pravděpodobnost, že se proces do** tohoto **stavu *i* již nikdy v budoucnu nevrátí. Tato pravděpodobnost je dána** právě **hodnotou**

(1.31) $$1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

Obecně není možné vypočíst pravděpodobnosti prvního průchodního stavu pro všechna n, takže není vždy zřejmé, zda určitý stav má být klasifikován jako rekurentní nebo přechodný.

Poznámka 1 **Ačkoliv všechny stavy v příkladě se zásobami kamer jsou trvalé, není nijak jednoduché dokázat, že** $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$

Podrobnější členění trvalých stavů je založeno na pojmu střední doba návratu μ_{ii} ve smyslu Definice 5. Zavedeme tedy

Definice 9

Stav i Markovova řetězce se nazývá nulový trvalý [null recurrent state], **jestliže platí** $\mu_{ii} = +\infty$.

a nazývá se nenulový trvalý [positive recurrent state], **platí-li** $\mu_{ii} < +\infty$.

---

[1] Anglické pojmenování není obsahem ekvivalentní českému, ale v češtině vyjadřuje pojem rekurentní jev obecnější charakteristiku než je jev či stav trvalý.

1. 9 Dosažitelnost, souslednost stavů. Rozložitelné a nerozložitelné řetězce

Definice 10

Stav j Markovova řetězce se nazývá dosažitelný [accesible] ze stavu i, jestliže platí $p_{ij}^{(n)}$ pro nějaké $n \geq 0$.

Poznámka 2 . Dosažitelnost není symetrická vlastnost. Z okolnosti, že stav i je dosažitelný ze stavu j, neplyne, že by ze stavu j byl naopak dosažitelný stav i.

Připomeňme, že $p_{ij}^{(n)}$ je právě podmíněná pravděpodobnost toho, že proces vycházeje ze stavu i přejde po n krocích do stavu j. Lze snadno ukázat, že stav j je dosažitelný ze stavu i právě a jen tehdy, jestliže lze dospět do stavu j vycházeje ze stavu i po nějakém kladném celočíselném počtu kroků.

Poznámka 3 V příkladě se zásobami máme $p_{ij}^{(2)} > 0$ pro všechna i,j, takže každý stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Definice 11

Stavy i, j Markovova řetězce se nazývají sousledné [„to communicate“], jestliže stav i je dosažitelný ze stavu j a současně, jestliže stav j je dosažitelný ze stavu i .

Zřejmě tedy postačující podmínkou pro to, aby byly vzájemně dosažitelné všechny stavy Markovova řetězce[2], je , aby existovala kladná hodnota *n* (nezávislá na i a j, pro kterou by $p_{ij}^{(n)} > 0$ pro všechna i , j a současně, aby existovala kladná hodnota *m*, pro kterou platilo $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Jsou-li stavy sousledné, umožňuje to mj. v případě rozložitelného Markovova řetězce dekomponovat množinu trvalých stavů do více podmnožin/skupin, přičemž každá skupina trvalých stavů bude obsahovat vždy jen vzájemně sousledné stavy

V důsledku platnosti *Chapman-Kolmogorovových rovnic* (1.21), tedy toho, že platí $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(s)}$ pro $s + r = n$ a nezápornosti každé $p_{rs}^{(t)}$, můžeme vyvodit, že

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=é}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

Obdobný argument lze uplatnit pro opačný vztah souslednosti obou stavů.

[2] To je ovšem dosti neobvyklá, i když možná situace.

Definice 12 Řekneme, že **Markovův řetězec je nerozložitelný (ireducibilní)** [irreducible], **jestliže relace ekvivalence indukuje pouze jedinou třídu** ekvivalentních **stavů.**

Jinými slovy, řetězec je ireducibilní, jestliže jsou všechny stavy sousledné. Je-li v řetězci taková třída jen jedna, pak tento řetězec nazýváme nerozložitelný (ireducibilní). Tvoří-li všechny stavy řetězce uzavřenou třídu a jsou-li tyto stavy ergodické, pak se tento řetězec nazývá regulární.

Jestliže pro jeden nebo i několik stavů platí $p_{ii} = 1$ (tj. setrvání ve stavu i je jistý jev) a do těchto stavů existuje vstup tzn. existuje stav j nepatřící do tohoto podřetězce a takový, že $p_{ji}^{(n)} > 0$, pak o těchto stavech mluvíme jako o absorpčních. Ostatní stavy řetězce pak nutně musí být transientní.

Řetězce obsahující absorpční stavy nazýváme absorpční řetězce.

1. 10 Periodicita stavů Markovova řetězce

Jiná klasifikace stavů Markovova řetězce je založena na tom, po jakém počtu kroků (přechodů) může nastat opakování určitého stavu. Půjde o to, že realizace některých stavů může nastat pouze po nějakém násobku kroků. V tomto smyslu zavedeme definice

Definice 13A

Stav i Markovova řetězce se nazývá **periodický** [periodic state] **s periodou r, jestliže platí** $p_{ii}^{(h.r)} > 0$ **pro všechna** $h = 1,2,3,.....$

Periodou stavu i , někdy značenou $r = d(i)$ rozumíme největší společný dělitel ze všech přirozených čísel (větší než 1) , pro který $p_{ii}^{(n)} > 0$. [3]

Definice 13B

Stav i Markovova řetězce se nazývá **neperiodický** [non-periodic state], **jestliže neexistuje žádná perioda** $r, r > 1$**, vůči níž by tento stav byl periodický**

Definovali jsme tedy periodu stavu i jako největší společný dělitel všech přirozených čísel $n \geq 1$ pro které $p_{ii}^{(n)} > 0$. [Pokud $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro všechna $n \geq 1$, definujeme $d(i) = 0$]. Máme-li náhodnou procházku, kde nepřipouštíme setrvání ve stavu (při jednom „přechodu“), pak každý stav má periodu 2. Pokud bychom připustili možnost setrvání v daném stavu, pak by měl každý stav periodu 1, tj.byl by neperiodický. protože bez ohledu na počáteční stav j systému, může systém dosáhnou stavu i_0 a zůstat v něm jakoukoliv dobu před návratem do stavu j.

Tvrzení 2. Jsou-li stavy i, j sousledné a jeden z nich i je periodický s periodou $d(i)$, pak i druhý stav j je periodický a má shodnou periodu. Tedy

$$\text{Jestliže } i \leftrightarrow j \text{ , potom platí } d(i) = d(j)$$

Tvrzení 3. Jestliže stav i má periodu $r = d(i)$, pak existuje přirozené číslo N, závisející na i, že pro všechna přirozená $n \geq N$ platí $p_{ii}^{n.r} > 0$

Tvrzení zajišťuje, že návrat do stavu i může nastat ve všech dostatečně velkých násobcích periody $r = d(i)$.

Důsledek: Jestliže $p_{ji}^{(m)} > 0$, potom $p_{ji}^{(m+k.r)} > 0$ pro všechna přirozená dostatečně velká k.

---

[3] Znamená to tedy, že periodický stav má nenulovou pravděpodobnost výskytu po libovolném počtu kroků, které jsou násobkem „jeho“ periody, V ostatních časových okamžicích může být pravděpodobnost jeho výskytu kladná i nulová.

Definice 14

Stav i Markovova řetězce se nazývá ergodický [ergodic state], jestliže je trvalý, nenulový a neperiodický.[4]

Příklad **V konečném Markovově řetězci s M stavy a maticí pravděpodobností přechodu**

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ...... & 0 \\ ... & .. & .. & ...... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ..... & 0 \end{pmatrix}$$ **má každý stav periodu M.**

Většina procesů typu Markovových řetězců, se kterými se lze setkat, jsou neperiodické. Náhodné procházky jsou naopak typické periodickým chováním.

[4] V některých textech se do pojmu *ergodicity* nezahrnuje neperiodičnost stavu.

1.11 Další prostředky klasifikace trvalých a přechodných stavů

Klasifikace stavů trvalé/přechodné zavedená Definicí 6 resp. Definicí 8 a založená na chování nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$, může být přenesena na chování tomuto procesu odpovídající nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$. Přesněji to vyslovuje následující věta:

Věta 3A: Stav i je trvalý právě tehdy, jestliže platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.

Důkaz (Karlin str.66)*:* je založen na využití Abelova lemmatu pro vytvořující funkce

A) nutnost: Předpokládejme, že stav i je trvalý, to znamená, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ (podle definice). Potom lze na základě prvního tvrzení Abelova lemmatu tvrdit, že platí

$\lim_{s\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n = \lim_{s\to 1-} F_{ii}(s) = 1$. Takže ze vztahu (8.25B) plyne

$\lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) = \lim_{s\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \infty$. Odvoláme-li se na druhé tvrzení Abelova lemmatu, dostaneme $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, což dává dokazované tvrzení.

B) postačitelnost: Předpokládejme, že stav i je přechodný, tzn. Platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$.

S využitím prvního tvrzení Abelova lemmatu a s ohledem na platnost (8.25B), vyvodíme, že $\lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) < \infty$. Dále, s odvoláním na druhé tvrzení Abelova lemmatu dostáváme výsledek, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$, což je ve zřejmém rozporu s naším předpokladem trvalosti stavu i, čímž je ověřena postačitelnost. .

Opačnou situaci popisuje tvrzení

Věta 3B: Stav i je přechodný právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Poznámka 7 Střední počet návratů do stavu i, při daném $X_0 = i$ je roven $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$. takže věta 3A říká, že stav i je trvalý právě tehdy, jestliže střední počet návratů je nekonečný.

Jak bylo výše (Definicí 9) uvedeno, veličina $\mu_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_{ii}^{(n)}$ je nazývána **střední doba návratu** (do stavu i). V závislosti na ní rozlišujeme stavy

a) **trvalé nulové**, jestliže $\mu_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_{ii}^{(n)} = \infty$

b) **trvalé nenulové**, jestliže $\mu_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_{ii}^{(n)} < \infty$

Důsledek: Nechť i^* je trvalý stav. Máme[5]

$$\frac{1-F(s)}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} \frac{1-s^n}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} \left(1+s+s^2+s^3+....,s^{n-1}\right) \to \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{i^*i^*}^{(n)}$$ [6]při $s \to 1-$

Důkaz: Z rovnosti

$$(1-s).P(s) = \frac{1-s}{1-F(s)}$$ vyplývá

$$\lim_{s\to 1-}(1-s).P(s) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n.f_{i^*i^*}^{(n)}} = \frac{1}{\mu_{i^*i^*}} .$$

Víme, že trvalý stav i je nulový právě tehdy, když platí

(*) $$\lim_{s\to 1-}(1-s).P(s) = 0 .$$

To je splněno , kdykoliv platí

(**) $$\lim_{n\to} p_{i^*i^*}^{(n)} = 0 .$$ □.

Složitější je důkaz ekvivalentnosti (*) a (**)

---

[5] Protože u trvalého stavu platí $\sum_{n=0}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} = 1$, jinak obecně $\sum_{n=0}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} s^n = F(s)$.

[6] $\lim_{s\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} \left(1+s+s^2+s^3+....+s^{n-1}\right) = \lim_{s\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} f_{i^*i^*}^{(n)} s^{n-1} \to \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{i^*i^*}^{(n)}$

V obojím případě využíváme platnosti $f_{i^*i^*}^{(0)} = 1$

Věta 4: Všechny stavy dosažitelné z trvalého stavu jsou rovněž trvalé, a to stejného typu: trvalé nulové/nenulové, periodické/neperiodické

Důkaz: Nechť je k nějaký stav dosažitelný z trvalého stavu i^*. Musí tedy existovat nejmenší r takové, že platí $p_{i^*i_1}p_{i_1i_2},\dots\dots,p_{i_{r-1}k} > 0$ pro vhodnou posloupnost stavů $i_1,i_2,\dots,i_{r-1}$. V této posloupnosti se nemůže vyskytnout stav i^*, protože jinak by cesta k němu byla kratší. Máme $p_{i^*k}{}^{(r)} = a > 0$. Stav i^* musí být dosažitelný z k, neboť kdyby nebyl, pak by opak měl za následek platnost nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{li^*}{}^{(n)} \le 1-a \qquad\qquad a>0$$

Lze proto nalézt takové r, pro které $p_{ki^*}{}^{(r)} = b > 0$. Pro $n = 1,2,\dots$, pak platí

$$p_{i^*i^*}{}^{(r+t+n)} \ge p_{i^*k}{}^{(r)}.p_{kk}{}^{(n)}.p_{ki^*}{}^{(t)} = a.b.p_{kk}{}^{(n)}$$

$$p_{kk}{}^{(r+t+n)} \ge p_{ki^*}{}^{(t)}.p_{ii}{}^{(n)}.p_{i^*k}{}^{(r)} = a.b.p_{ii}{}^{(n)}\ .$$

Odtud dostáváme implikace

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i^*i^*}{}^{(n)} = \infty \quad\to\quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}{}^{(n)} = \infty$$

$$\lim_{s\to 1-}(1-s)\sum_{n=0}^{\infty} p_{i^*i^*}{}^{(n)}s^n = 0 \quad\leftrightarrow\quad \lim_{s\to 1-}(1-s)\sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}{}^{(n)}s^n = 0\ .$$

Vidíme, že k je trvalý stav,který je nulový právě tehdy, když též i^* je nulový stav. □ .

Pokud se chceme v důkazu vyhnout operování s mocninnými řadami, lze uplatnit velmi podobné tvrzení (převzaté v textu S.Karlin-H.M.Taylor str.66)

Věta 4* Nechť jsou stavy i a j sousledné. Pak jestliže je stav i trvalý, potom je také stav j trvalý.

Důkaz Protože jsou stavy i a j sousledné, existují $m,n \ge 1$ taková, že $p_{ij}{}^{(n)} > 0$ jakož i $p_{ji}{}^{(n)} > 0$. Nechť $v > 0$. Zřejmě platí $p_{jj}{}^{(m+n+v)} \ge p_{ji}{}^{(m)}.p_{ii}{}^{(v)}.p_{ij}{}^{(m)}$.

Pokud tuto nerovnost „nasoučtujeme", dostaneme

$$\sum_{v=0}^{\infty} p_{jj}{}^{(m+n+v)} \ge \sum_{v=0}^{\infty} p_{ji}{}^{(m)}.p_{ii}{}^{n)}.p_{ij}{}^{(v)} = p_{ji}{}^{(m}.p_{ij}{}^{(n)}\sum_{v=0}^{\infty} p_{ii}{}^{(v)}\ .$$

Odtud je zřejmé, že pokud $\sum_{v=0}^{\infty} p_{ii}{}^{(v)}$ diverguje, potom také $\sum_{v=0}^{\infty} p_{jj}{}^{(v)}$ diverguje. □ .

Dále uvedeme několik tvrzení, které vypovídají o tom, že ne v každém Markovově řetězci musí, resp. mohou být obsaženy stavy všech dosud uvedených typů. O tom, že v konečném Markovově řetězci (v řetězci s konečným počtem stavů M) je okruh přípustných stavů dosti omezen , vypovídají následující dvě tvrzení:

Věta 5 **V konečném Markovově řetězci nemohou být přítomny nulové trvalé stavy.**

Důkaz: Mějme takový řetězec a předpokládejme, že i^* je jeho trvalý nulový stav. Pro každý stav k dosažitelný z i^* platí dle důkazu Věty 1 pro všechna n:

$$p_{i^*i^*}^{(m+n)} \geq p_{i^*k}^{(m)}.p_{ki^*}^{(n)} = b.p_{ki^*}^{(n)} \quad .$$

Jestliže je k nedosažitelné z i^*, pak $p_{i^*k}^{(n)} = 0$ pro $n = 0,1,2,....$ Z (5) proto plyne

$$\lim_{s \to 1-} (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} p_{i^*k}^{(n)} s^n = 0, \ , \ k \in I$$

Sečtením pro všechny stavy $k \in I$ dostáváme:

$$0 = \lim_{s \to 1-} (1-s) \sum_{k=1}^{M^*} \sum_{n=0}^{\infty} p_{i^*k}^{(n)} s^n = \lim_{s \to 1-} (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} s^{(n)} = 1[7] \ , \ k \in I \ .$$

Předpoklad o přítomnosti nulových stavů tedy vede ke sporu. □ .

Konečný Markovův řetězec může tedy obsahovat pouze stavy trvalé nenulové a stavy přechodné.

Věta 6 **V konečném Markovově řetězci nemohou být všechny stavy přechodné.**

Důkaz: Bude doplněn později □ .

Důsledkem obou předchozích vět (5,6) je závěr, že v Markovově řetězci s konečným počtem stavů musí být vždy přítomen aspoň 1 stav trvalý nenulový.

Tvrzení 11 Jestliže jsou stavy i, j trvalé, avšak náležející do odlišných tříd, potom platí

(1.32) $$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{pro všechna } n$$ [8]

Tvrzení 12 Jestliže stav j je přechodný, potom

(1.33) $$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{pro všechna } i$$ [9]

Následující věta ukáže, že pokud je *„trvalost"* vlastnost určitého stavu, potom se tento stav bude vyskytovat nekonečněkrát často s pravděpodobností 1:

---

[7] První z rovností platí v důsledku toho, že stav i* je trvalý nulový.

[8] Plyne to přímo z definice třídy (jsou-li aspoň 2).

[9] Plyne to z toho, že pravděpodobnost výskytu procesu v přechodném stavu po velkém počtu přechodů směřuje k nule.

Věta 7: Stav i je trvalý [reccurent] nebo přechodný [transient] podle toho, zda platí $Q_{ii} = 1$ nebo $Q_{ii} = 0$ (pozn.: jiná možnost se nemůže vyskytnout, kde Q_{ii} definujeme jako pravděpodobnost

$$Q_{ii} = \Pr\{\text{částice vycházející ze stavu i se vrátí nekonecně krát do stavu i}\}$$

Důkaz: Definujme veličinu $Q_{ii}^{(n)}$ předpisem

$$Q_{ii}^{(N)} = \Pr\{\text{částice vycházející ze stavu i se vrátí do stavu i aspoň N} - \text{krát}\}$$

Můžeme psát :

$$Q_{ii}^{(N)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}.Q_{ii}^{(N-1)} = Q_{ii}^{(N-1)}.f_{ii}^{*} \text{ , kde } f_{ii}^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \ .$$

Platnost tohoto vzorce je založena na rozkladu události $Q_{ii}^{(N)}$ podle doby prvního návratu. Jestliže postupujeme rekurzívně, dostáváme postupně

$$Q_{ii}^{(N)} = f_{ii}^{*} Q_{ii}^{N-1} = \left(f_{ii}^{*}\right)^{2} Q_{ii}^{(N-2)} = \left(f_{ii}^{*}\right)^{3} Q_{ii}^{(N-3)} = \ldots = \left(f_{ii}^{*}\right)^{N-1} Q_{ii}^{(1)}.$$

Víme ale, že podle definice platí

$$Q_{ii}^{(1)} = f_{ii}^{*} \text{ , z čehož máme } Q_{ii}^{(N)} = \left(f_{ii}^{*}\right)^{N}$$

Protože ale $\lim_{N\to\infty} Q_{ii}^{(N)} = Q_{ii}$, máme $Q_{ii} = 1$ nebo $Q_{ii} = 0$ podle toho, zda $f_{ii}^{*} = 1$ nebo $f_{ii}^{*} < 1$, resp.ekvivalentně, dle toho, zda stav i je trvalý nebo přechodný. □.

Věta 8: Jestliže platí souslednost stavů i, j ($i \leftrightarrow j$) a pohybujeme se ve třídě trvalých stavů, pak platí

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \ .$$

Dále definujme veličinu

$$Q_{ij} = \Pr\{\text{částice vycházející ze stavu i prejde do stavu j nekonecne častokrát}\}$$

Jako přímý důsledek věty 6 dostaneme

Důsledek Jestliže platí $i \leftrightarrow j$ a jsme ve třídě trvalých stavů, pak platí

$$Q_{ij} = 1$$

Důkaz: Je snadné ukázat, že platí $Q_{ij} = f_{ij}^{*}.Q_{jj}$ a protože j je rovněž trvalý stav, platí podle věty 8 $f_{ij}^{*} = 1$, z čehož plyne $Q_{ij} = 1$. □ .

To říká, že stav i je přechodný právě tehdy, jestliže (vycházeje ze stavu i) existuje „reziduální“ pravděpodobnost $1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} > 0$, že se systém do stavu i po jakkoliv velkém konečném počtu kroků již nevrátí.

Příklad 4

Mějme Markovův proces s maticí pravděpodobností přechodu

$$
\begin{array}{cc}
\text{stavy} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Je zřejmé, že stav č. 2 je absorpční (a tedy **trvalý**), **neboť pokud jednou proces vstoupí do stavu č.2** (**třetí řádek matice**), **pak ho již nikdy neopustí. Stavy č. 3 a 4 jsou přechodné stavy, protože, pokud proces vstoupí do stavu 3,**[10] **pak existuje kladná pravděpodobnost, že se do něj již nikdy nevrátí.**[11] **Tato pravděpodobnost je 1/3** (že proces přejde ze stavu 3 do stavu 2 po jednom kroku)**. Pokud proces opustí stav 4, nemůže se již do něho nikdy později vrátit** (stav 4 je zřejmě přechodný). Když proces vstoupí do stavu 2[12], nadále již v něm zůstane

Stavy 0 a 1 jsou trvalé stavy. Jak bylo konstatováno dříve, k tomu, abychom to prokázali, postačí ukázat, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1 \text{ , resp. že } \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1$$

To je však obecně obtížné, a proto je žádoucí vyvinout alternativní test:

Nutná a postačující podmínka, aby byl stav i trvalý je, aby pravděpodobnost daná součtem nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty \quad \textbf{konvergovala.}$$

Bohužel, i toto kritérium je obtížné použít, takže bude nutno uplatnit ještě jiné kritérium, *které uvedeme později*. **Všimněme si ale, že matice pravděpodobností přechodu po n krocích $P^{(n)}$ bude mít** pro tento případ **vždy podobu:**

$$
P = \begin{pmatrix} *** & *** & 0 & 0 & 0 \\ *** & *** & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & *** & *** & 0 \\ *** & *** & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

kde symbol * označuje kladná čísla. Zde je intuitivně zřejmé, že pokud je proces ve stavu 0, vrátí se jednou do stavu 0 (možná projdouce stavem 1) po nějakém počtu kroků. Podobný argument platí pro stav 1.**

---

[10] Zůstává v něm s pravděpodobností 1, přechod nikam jinam není možný

[11] Do stavu 4 se nedá odnikud vstoupit, do stavu 3 pouze z něho samého a stavu 2.

[12] Po jednom kroku je to možné pouze ze stavu 3, a to s pravděpodobností 1/3.