P4 Rozložitelné a nerozložitelné Markovovy řetězce

1.12 Rozložitelné Markovovy řetězce

Skupinu vzájemně sousledných stavů nazýváme uzavřenou třídou = podřetězcem. Jestliže je v řetězci taková třída pouze jedna, nazýváme tento řetězec nerozložitelný (ireducibilní) [irreducible chain] . Tvoří-li všechny stavy řetězce uzavřenou třídu a jsou-li tyto stavy ergodické, nazýváme tento řetězec regulární [regular chain].

Definice 14

Markovův řetězec se nazývá rozložitelný [reducible chain], jestliže v něm existuje více než jedna množina (podřetězec) takovýchto sousledných stavů.

Je-li řetězec nerozložitelný, znamená to, že v matici pravděpodobností přechodu P lze nalézt dílčí submatice s nulovými prvky.

Často se lze u konečných rozložitelných řetězců setkat s těmi podobami matice P :

(A) $$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$ **, kde P_1, P_2 jsou čtvercové submatice**

Oba podřetězce jsou zde tvořeny oddělenými skupinami stavů, kdy stavy jednoho podřetězce nejsou dosažitelné ze stavů druhého podřetězce (a tedy ani nemohou být s nimi sousledné).[1]

(B) $$P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ R & S \end{bmatrix}$$ **, kde Q, S jsou čtvercové submatice**

Zde matice Q obsahuje trvalé stavy a matice S přechodné stavy. Matice R zde představuje matici pravděpodobností přechodu ze stavů přechodných do stavů trvalých (opačná cesta není přirozeně možná, což je indikováno nulovou maticí v pravém horním poli)**.**

Je-li matice P rozložitelná na tvar

(C) $$P = \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0 \end{bmatrix}$$ **,kde obě „0“ jsou nulové čtvercové submatice,**

bude systém oscilovat po každém kroku mezi dvěma množinami stavů a příslušná matice P bude popisovat periodický řetězec.

Není-li matice P rozložitelná, jedná se o regulární řetězec, kde všechny jeho stavy tvoří uzavřený celek[2].

---

[1] V maticích P1 a P2 mohou být vedle trvalých stavů přítomny rovněž stavy přechodné.

[2] Každý stav řetězce je dosažitelný z každého jiného stavu.

1.13 Regulární Markovovy řetězce

Definice 15 Matici pravděpodobností přechodu nazveme regulární, je-li P^n pro určité konečné n bez nulových prvků. Zároveň platí, že matice P je regulární, jestliže není rozložitelná na tvary (A), (B),(C).

Lze dokázat, že matice P konverguje při $n \to \infty$ k limitní matici typu

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ \dots & \dots & \dots. & \dots. \\ a_0 & a_1 & \dots. & a_M \end{bmatrix},$$

jejíž řádky tvoří shodné řádkové vektory $a = (a_0 \quad a_1 \quad \dots. \quad a_M)$, které nazýváme *limitní stacionární vektory*

Věta 9 Pro regulární matici P platí tyto základní vlastnosti:

1. Je-li P regulární, A je limitní matice a a je limitní vektor, pak s rostoucím n se $p.P^n$ blíží k a, ať je výchozí vektor p jakýkoliv: $\lim_{n\to\infty} p.P^n = a$.

2. vektor a jediný, pro který platí $a.P = a$; je tedy určen jednoznačně.

3. Platí, že $P.A = A.P = A$.

Limitní vektor a je možné určit následujícím způsobem:

Předpokládáme-li, že se *v případě regulárních řetězců* mohou všechny stavy v budoucnosti stále vyskytovat, tj. platí $0 < p_{ij} < 1$, existuje limitní rozdělení absolutních pravděpodobností vektoru $p(n)$. Potom platí

(1.34) $$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} p(n-1) = a \text{ , kde}$$

vektor $a = (a_1 \quad a_2 \quad \dots. \quad a_M)$ je limitní stacionární vektor. Složky vektoru a lze interpretovat, jako podíly (z celku 1) z celkové doby, kterou systém stráví ve stavech $1,2,\dots.,M$ v průběhu dost dlouhého časového období.

Protože platí

(1.35A) $$p(n) = p(n-1).P \,,$$

můžeme po limitním přechodu tento vztah psát ve tvaru

(1.35B) $$a = a.P \,.$$

Rovnice této soustavy o M neznámých $a_1 \quad a_2 \quad \dots. \quad a_M$ jsou lineárně závislé a proto nelze bez dalšího nalézt jediné řešení. Nalézt jednoznačné řešení nicméně umožňuje zavedení další přirozené podmínky, která plyne z toho, že stacionární pravděpodobnosti stavů tvoří úplnou soustavu jevů, tj. podmínky $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Výpočty stacionárních pravděpodobností a_1 a_2 .... a_M získáme tedy řešením soustavy rovnic

$$(a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_M) = (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_M).\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0} & p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix}, \text{ resp.}$$

(1.35C)
$$a_i = \sum_{j=0}^{M} a_j p_{ji} \quad .$$

s dodatečnou podmínkou $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

V příkladě se zásobami kamer[3] lze ukázat, že matice pravděpodobností přechodu po 8 krocích $P^{(8)}$ má tvar:

$$P^{(8)} = P^8 = P^4.P^4 = \begin{Bmatrix} 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \\ 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}264 & 0{,}166 \end{Bmatrix}.$$

Zaznamenejme pozoruhodnou skutečnost, že každý ze čtyř řádků má identické prvky. To znamená, že pravděpodobnost toho, že systém je po 8 týdnech ve stavu j se zdá být nezávislá na počátečním stavu zásob ! Jinými slovy, jeví se, že existuje nějaká limitní pravděpodobnost, že systém bude ve stavu j po velkém počtu přechodů a že takováto pravděpodobnost je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobností stavů. Tento důležitý výsledek vztažený k dlouhodobému chování Markovových řetězců s konečným počtem stavů nyní ukážeme:

Markovova řetězce a jsou rovna převráceným hodnotám středních dob návratu, tj.

(1.36)
$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} \quad \text{pro } j=0,1,\dots,M.$$

Pojem stacionární v tomto případě znamená, že pravděpodobnost toho, že se proces nachází v určitém stavu, řekněme j, po velkém počtu přechodů směřuje k hodnotě π_j , která je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobnosti výskytu stavů. Je důležité dodat, že stacionární pravděpodobnost neznamená, že se proces usídlí v jednom stavu. Naopak, proces pokračuje v uskutečňování přechodů ze stavu do stavu a v jakémkoliv kroku n je pravděpodobnost přechodu ze stavu do stavu stále p_{ij}.

---

[3] V této části textu jsou stacionární pravděpodobnosti výše zavedené jako a_j značeny π_j .

Limitní π_j mohou být také interpretovány jako stacionární pravděpodobnosti (nezaměňovat se stacionárními pravděpodobnostmi přechodu) . Jestliže počáteční absolutní pravděpodobnost toho, že jsme ve stavu j je π_j (tj. $P\{X_0 = j\} = \pi_j$ pro všechna j, pak absolutní pravděpodobnost výskytu procesu ve stavu v čase n=1,2,... je také dána těmito π_j tj $P\{X_n = j\} = \pi_j$

Zmiňme, že stacionární pravděpodobnosti sestávají z M+2 rovnic pro M+1 neznámých. Protože existuje jediné řešení, přinejmenším jedna rovnice musí být redundantní a může tedy být škrtnuta. Nemůže to ale být rovnice

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_j = 1 \, ,$$

protože řešení $\pi_j = 0$ by evidentně také vyhovovalo ostatním M+1 rovnicím. Dále: řešení jiných M+1 stacionárních rovnic je jednoznačné až na multiplikativní konstantu, a právě díky zmíněné poslední rovnici je toto řešení „tlačeno“ k tomu, aby šlo o pravděpodobnostní rozdělení.

V příkladě se zásobami kamer mohou být rovnice stacionárního stavu vyjádřeny jako

$$\pi_0 = \pi_0.p_{00} + \pi_1.p_{10} + \pi_2.p_{20} + \pi_3.p_{30}$$

$$\pi_1 = \pi_0.p_{01} + \pi_1.p_{11} + \pi_2.p_{21} + \pi_3.p_{31}$$

$$\pi_2 = \pi_0.p_{02} + \pi_1.p_{12} + \pi_2.p_{22} + \pi_3.p_{32}$$

$$\pi_3 = \pi_0.p_{03} + \pi_1.p_{13} + \pi_2.p_{23} + \pi_3.p_{33}$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Dosazení hodnot za p_{ij} do těchto pěti rovnic vede ke vztahům

$$\pi_0 = (0{,}080)\pi_0 + (0{,}632)\pi_1 + (0{,}264)\pi_2 + (0{,}080)\pi_3$$

$$\pi_1 = (0{,}184)\pi_0 + (0{,}368)\pi_1 + (0{,}368)\pi_2 + (0{,}184)\pi_3$$

$$\pi_2 = (0{,}368)\pi_0 + \qquad + (0{,}368)\pi_2 + (0{,}368)\pi_3$$

$$\pi_3 = (0{,}368)\pi_0 + \qquad\qquad + (0{,}368)\pi_3$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

(Algebraické) řešení těchto čtyř rovnic vede k simultánnímu řešení

$$\pi_0 = 0{,}285 \qquad \pi_1 = 0{,}285 \qquad \pi_2 = 0{,}264 \qquad \pi_3 = 0{,}166$$

kterýžto výsledek je (téměř) shodný s výpočtem matice $P^{(8)}$. Takže po mnoha týdnech se pravděpodobnosti výskytu žádné, jedné, dvou a tří kamer v prodejně budou přibližovat k hodnotám 0,285, 0,285 0,264 a 0,166. Odpovídající střední roby návratu [expected recurrence times] jsou :

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3{,}51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3{,}51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3{,}79 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6{,}02 \text{ týdnů}$$