

P5 Absorpční stavy

1.14 Absorpční stavy

Definice 16 (Trvalý) Stav k je nazýván absorpční [absorbing state], jestliže platí

$$(1.36) \quad p_{kk} = 1 ,$$

což znamená, že pokud někdy systém navštíví stav k , zůstane v něm již navždy. Jestliže k je absorpční stav, potom **pravděpodobnost přechodu** [passage probability] **ze stavu i do stavu k je nazývána pravděpodobností absorpce v k , pokud vycházíme z i .**

Když v řetězci existují dva nebo více absorpčních stavů a když je zřejmé, že proces bude dříve či později absorbován v jednom z těchto stavů, je žádoucí nalézt tyto pravděpodobnosti absorpce. Tyto pravděpodobnosti lze nalézt řešením soustavy lineárních rovnic.

Předpokládejme, že Markovův řetězec je takový, že se s určitostí jednoho z jeho absorpčních stavů dosáhne. Jestliže stav k je absorpční, potom množina absorpčních pravděpodobností f_{ik} vyhovuje soustavě rovnic:

$$(1.37) \quad f_{ik} = \sum_{j=0}^M p_{ij} f_{jk} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, M$$

za podmínek $f_{kk} = 1$, $f_{ik} = 0$, jestliže stav i je trvalý a jestliže $i \neq k$.

Absorpční pravděpodobnosti jsou důležité mj. v „náhodných procházkách“. Náhodná procházka je Markovův řetězec s vlastností, že když se systém ve stavu i , potom v jednom přechodu systém buď zůstane v i nebo se přemístí do jednoho ze stavů, které jsou bezprostředně sousedící s i .

Příklad: Předpokládáme dva hráče, každý mající 2 dolary, kteří se domluvili na odehrání hry a sázejí po 1 dolaru v každé hře do té doby, než je jeden z nich bez peněz. Peněžní obnos, který má hráč A po odehrání n partií hry vytváří Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$(1.38) \quad \begin{array}{l} \text{číslování stavů} \\ P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

Jestliže p představuje pravděpodobnost hráče A k výhře v jedné partii, potom pravděpodobnost absorpce ve stavu 0 (kdy hráč A prohraje všechny své peníze)

může být získána z předešlé soustavy rovnic. Může být ukázáno, že tyto rovnice pak vyústí v alternativní výrazy (obecnější, než je pro $M = 4$ jako v tomto příkladě).

Stanovme pravděpodobnosti přechodu u jednotlivých stavů:

p_{00} : $p_{00}^{(1)} = 1$, $p_{00}^{(2)} = 1$, ..., $p_{00}^{(n)} = 1$, perioda $d_0 = 1$ **neperiodický stav**

$f_{00}^{(1)} = 1$, $f_{00}^{(2)} = 0$, $f_{00}^{(n)} = 0$ pro $n \geq 2$, zřejmě $\sum_{n=0}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1$ (přijímáme $f_{00}^{(0)} = 0$)

Zřejmě platí $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} = +\infty$ stav je tedy trvalý

p_{55} : $p_{55}^{(1)} = 1$, $p_{55}^{(2)} = 1$, ..., $p_{55}^{(n)} = 1$, perioda $d_0 = 1$ **neperiodický stav**

$f_{55}^{(1)} = 1$, $f_{55}^{(2)} = 0$, $f_{55}^{(n)} = 0$ pro $n \geq 2$, zřejmě $\sum_{n=0}^{\infty} f_{55}^{(n)} = 1$ (přijímáme $f_{55}^{(0)} = 0$)

Stavy 0 a 5 jsou zřejmě absorpční, tedy trvalé nenulové .

p_{11} : $p_{11}^{(1)} = 0$, $p_{11}^{(2)} = pq$, $p_{11}^{(3)} = 0$, $p_{11}^{(4)} = 2p^2q^2$, ..., $p_{11}^{(5)} = 0$,

$f_{11}^{(1)} = 0$, $f_{11}^{(2)} = pq$, $f_{11}^{(3)} = 0$, $f_{11}^{(4)} = p^2q^2$, $f_{11}^{(2k)} = 0$ pro $k \geq 2$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_{11}^{(n)} = pq + p^2q^2 + p^3q^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n q^n = \frac{1}{1-pq} < 1$ **stav 1 je přechodný**

(přijímáme konvenci $f_{11}^{(0)} = 0$)

p_{22} : $p_{22}^{(1)} = 0$, $p_{22}^{(2)} = pq$, $p_{22}^{(3)} = 0$, $p_{22}^{(4)} = p^2q^2$, ..., $p_{22}^{(5)} = 0$,

Shodně pro přechodové pravděpodobnosti p_{33} , p_{44}

stavy 1,2,3,4 jsou stavy přechodné

Stavy 1,2,3,4: (největší společný dělitel sudých čísel je 2) perioda $d_0 = 2$ periodický stav.

$p_{11}^{(n)} = p^n q^n = p^n (1-p)^n$

$$(1.39) \quad 1 - f_{i0} = \frac{\sum_{m=0}^{i-1} \rho^m}{\sum_{m=0}^{M-1} \rho^m} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, M, \quad \text{kde } \rho = \frac{1-p}{p}$$

Pro případ $M = 4$ a $i = 2$ je pravděpodobnost konečné prohry hráče A dána podílem

$$(1.40) \quad f_{20} = \frac{\rho^2 + \rho^3}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3} .$$

1.15 Pravděpodobnosti přechodu do absorpčních stavů

Absorpčními řetězci nazveme ty Markovské řetězce, v nichž se vedle přechodných stavů vyskytují absorpční stavy, tj. takové, pro které je pravděpodobnost setrvání v daném stavu rovna 1. Abychom vytvořili v matici pravděpodobností přechodu absorpčního řetězce kompaktní bloky, přečíslováme jednotlivé stavy tak, že vhodným způsobem změním pořadí řádků a sloupců matice pravděpodobností přechodu příslušného absorpčního řetězce.

Dostaneme tak blokově vyjádřenou MPP ve tvaru

$$(1.41) \quad P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

Je-li celkový stav počet stavů r a počet přechodných stavů s , potom I je jednotková matice řádu $r-s$. Q je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými stavy o rozměru $[s;s]$, 0 je nulová matice o rozměrech $[(r-s);s]$ a R je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými a absorpčními stavy o rozměru $[s;(r-s)]$

Střední počet průchodů přechodnými stavy

U absorpčních řetězců často sledujeme charakteristiky, které lze vyvodit pomocí **fundamentální matice** mající tvar

$$(1.42) \quad N = (I - Q)^{-1}.$$

Inverzní matice existuje, konverguje-li maticová posloupnost Q^n s neomezeně rostoucím n k nulové matici a lze-li pro ni psát

$$(1.43) \quad (I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

Prvky fundamentální matice takto udávají, kolikrát se proces v průměru ocitne v přechodných stavech. Označíme-li jednotlivé prvky fundamentální matice $N = \{n_{ij}\}$, pak n_{ij} bude vyjadřovat **střední hodnotu počtu průchodů stavem j** , pokud proces na počátku vyšel ze stavu i , kde i, j jsou oba přechodné stavy.

Budeme-li předpokládat, že se průchody přechodnými stavy uskutečňují v jednotkových časových intervalech, můžeme zkoumat průměrné doby strávené v jednotlivých přechodných stavech.¹ Tyto doby obecně závisí na tom, z jakého stavu proces na počátku vyšel.

Pokud proces vyšel ze stavu absorpčního, je tato doba zřejmě nulová.²

¹ Zde opět musíme mít na mysli situaci do té doby, než proces vstoupí do některého z trvalých stavů.

² Formulace musí být upravena takto: Pokud se proces nacházel na počátku v absorpčním stavu, je pravděpodobnost vstupu do přechodného stavu nulová a tudíž střední doba průchodu stavem je nulová.

Vyjde-li proces z i - této přechodného stavu, můžeme střední dobu (střední počet průchodů) strávenou v přechodných stavech vyjádřit jako $m_i(t_i)$, kde doba

$t_i = \sum_j n_{ij}$ vyjadřuje počet průchodů všemi přechodnými stavy dosažitelnými ze

stavu i . Soustavu veličin $m_i(t_i)$ pro různá i lze vyjádřit sloupcovým vektorem $m(t)$. Tento sloupcový vektor je tvořen řádkovými součty prvků fundamentální matice N definované v (1.42). Vektor $m(t)$ získáme také vynásobením fundamentální matice N zprava sloupcovým vektorem složeným ze samých jedniček. Označíme-li ho ζ , pak lze psát

$$m(t) = N \cdot \zeta \quad \text{nebo}$$

$$(1.44) \quad m(t) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1M} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jedním z cílů sledování může být určení pravděpodobností přechodu do absorpčních stavů. Přejít z přechodných do absorpčních stavů může být uskutečněn přímo nebo může proběhnout přes řadu přechodných stavů.

Jako b_{ij} označíme pravděpodobnost přechodu z přechodného stavu i do absorpčního stavu j . Můžeme ji vyjádřit jako

$$(1.45) \quad b_{ij} = p_{ij} + \sum_{s_k \in T} p_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{zde } T \text{ označuje množinu přechodných stavů.}$$

kde p_{ij} značí **přímý přechod do absorpčního stavu**, druhý člen pak označuje všechny možné přechody nepřímé.

V maticové formě můžeme tyto pravděpodobnosti $B = \{ b_{ij} \}$ vyjádřit vztahem

$$B = R + Q \cdot B, \quad \text{resp. po úpravě}$$

$$(1.46) \quad B = (I - Q)^{-1} R = N \cdot R$$

Řádkové součty matice B , která vyjadřuje pravděpodobnosti přechodu ze stavů přechodných do stavů absorpčních, jsou rovny jedné. Je to zřejmé z povahy absorpčních stavů, ve kterých (resp. v jednom z nich) musí proces skončit.

V absorpčním řetězci nás mohou zajímat pravděpodobnosti (dočasněho) setrvání v systému přechodných stavů. Pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy můžeme v maticovém tvaru vyjádřit jako

$$(1.47) \quad H = (N - I) \tilde{N}^{-1}, \quad \text{kde}$$

H je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými stavy a \tilde{N}^{-1} je inverzní matice k fundamentální matici, obsahující pouze diagonální prvky.