P6 - Vytvořující funkce

1.16 Pojem vytvořující funkce

Významným analytickým prostředkem pro řešení úloh spojených s Markovovými řetězci jsou vytvořující funkce [moment generating functions].[1] **Vytvořující funkce jsou jakousi diskrétní analogií Laplaceovy transformace, dosti často užívané hlavně v technických aplikacích.**

Při rozboru Markovových řetězců často pracujeme s mocninami P^n matice pravděpodobností přechodu, což je práce při větším rozměru matice P dosti těžkopádná. Lze se tomu vyhnout právě zavedením vytvořujících funkcí.

Aplikace vytvořujících funkcí spočívá v určení příslušné transformace (obrazu) **k danému originálu** (vzoru), **ve vykonání příslušných operací v oboru transformované funkce a ve zpětné transformaci za účelem získání řešení v původním oboru. Lze dokázat, že mezi původní funkcí a jejím obrazem existuje jednoznačná korespondence. V praktických aplikacích usnadňují využití vytvořujících funkcí *slovníky transformací*** (tabulky typických funkcí a jejich transformací).

Definice 17 **Máme funkci $f(n)$, kde $n > 0$ takto. Vytvoříme k ní mocninnou řadu :**

(1.51) $F(z) = f(0) + f(1).z + f(2).z^2 + f(3).z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$ **, kde $|z| < 1$.**

O funkci $f(n)$ mluvíme jako o původní funkci, $F(z)$ je k ní příslušná vytvořující funkce (jako obraz funkce původní).

Uveďme několik základních poznatků o vztahu původních funkcí a k nim příslušných vytvořujících funkcí.

(A) Je-li $f(n) = 1$, pak $F(z) = \frac{1}{1-z}$, což je vidět přímo z definice (1.51)[2]**.**

(B) Je-li $f(n) = n$, pak $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, což je vidět z následujícího.

(1.52) $F(z) = 0 f(0) + 1.z + 2.z^2 + = \sum_{n=0}^{\infty} n.z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n.z^{n-1}.z = z.\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

(C) Je-li $f(n) = a^n$, pak $F(z) = 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{(1-az)}$,

Některé typické případy vytvořujících funkcí uvedeme v tabulce

---

[1] **Variantním názvem jsou též z-transformace**

[2] **Jde zřejmě o součet členů** nekonečné **geometrické posloupnosti s kvocientem z.**

	f(n)	F(z)
	1	1/(1-z)
	n	$z/(1-z)^2$
	a^n	$z/(1-az)$
	na^n	$az/(1-az)^2$

Pro analýzu Markovových řetězců má důležitý význam transformace vektorů a matic. Použijeme-li uvedené transformace na každý prvek vektoru resp. matice, provádíme tím transformaci celého vektoru či matice. Hovoříme pak o vytvořující funkci vektoru nebo matice.

Vytvořující funkci vektoru $m(n)$ **můžeme psát ve tvaru**

(1.53) $F(z) = m(0) + m(1).z + m(2).z^2 + m(3).z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} m(n) z^n$ **, kde** $|z| < 1$.

Vytvořující funkci matice M(n) můžeme psát ve tvaru

(1.54) $F(z) = M(0) + M(1).z + M(2).z^2 + M(3).z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} M(n) z^n$ **,** $|z| < 1$.

Pro maticovou funkci $M(n) = A^n$ **, kde A je čtvercová matice, platí tento rozvoj**

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^n = 1 + Az + A^2 z^2 + A^3 z^3 + ... = (I - Az)^{-1}$$

Inverzní matice $(I - Az)^{-1}$ **je vyjádřená jako součet nekonečné geometrické řady (jde o analogii se skalární funkcí** a^n**). Pokud je matice** $(I - Az)$ **regulární (tj. je-li čtvercová s lineárně nezávislými řádky/sloupci), pak inverzní matice k matici** $(I - Az)$ **existuje a je jednoznačně určena.**

Pro $f(n) = n.A^n$ **platí transformace** $F(z) = z(I - Az)^{-1}.A.(I - Az)^{-1}$

Během řešení úloh spojených s Markovovými řetězci pomocí vytvořujících funkcí se často setkáváme se zlomky dvou typů:

(1.55A,B) $$\frac{1 - cz}{(1 - az).(1 - bz)} \quad \text{a} \quad \frac{cz}{(1 - az).(1 - bz)}$$

Zlomek (1.55A) je možné rozložit pomocí metody neurčitých činitelů na součet dvou parciálních zlomků se jmenovateli $1 - az$ **a** $1 - bz$**. Potom se určí veličiny A,B, které vyhovují rovnici**

(1.56) $$\frac{1 - cz}{(1 - az).(1 - bz)} = \frac{A}{(1 - az)} + \frac{B}{(1 - bz)} \quad .$$

Tuto rovnici je možné řešit porovnáním koeficientů u absolutních členů a u členů obsahujících proměnnou z. Po odstranění zlomků v (1.56) máme

$$1 - c.z = A - Abz + B - Baz$$, z čehož obdržíme

(1.57) $$A + B = 1 \quad \text{a} \quad Ab + Ba = c$$

Řešením této soustavy rovnic pro neznámé A,B dostaneme

(1.58) $$A = \frac{c-a}{b-a} \quad , \quad B = \frac{b-c}{b-a}$$

Obdobně, jako řešení zlomku (1.55B) na základě obdobných úvah dostaneme

(1.59) $$A = \frac{c}{a-b} \quad , \quad B = \frac{c}{a-b} \quad .$$

Použijeme-li zmíněné transformace na každý prvek vektoru resp. matice. Provádíme tím transformaci celého vektoru resp. matice.

Při rozboru chování vektoru absolutních pravděpodobností $p(n)$ vyjdeme z vytvořující funkce tohoto vektoru ve tvaru

(1.60) $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \quad .$$

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí

$p(n+1) = p(n).P$, kde P je matice pravděpodobností přechodu po 1 kroku. Vytvořující funkci tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

(1.61) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n).P \quad .$$

Levou stranu (1.61) můžeme také vyjádřit ve tvaru

(1.62) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n+1) = \frac{1}{z} \cdot \left[\sum_{n+1=0}^{\infty} z^{n+1} p(n+1) - p(0) \right] .$$

Výraz $\sum_{n+1=0}^{\infty} z^n p(n+1)$ je rovněž vytvořující funkcí $f(z)$. Platí tedy vztah

(1.63) $$\frac{1}{z} . \left[F(z) - p(0) \right] = F(z).P$$

Odtud dostaneme pro $F(z)$:

(1.64) $$F(z) = p(0)(1 - zP)^{-1}$$, kde

I je jednotková matice , $(1 - zP)^{-1}$ je inverzní k matici $(1 - zP)$. Ze vztahu (1.64) je zřejmé, že použitím vytvořující funkce se vyhneme umocňování matice P, což obvykle znamená úsporu numerických výkonů. Na druhé straně zůstává určitým problémem hledání inverzní matice $(1 - zP)^{-1}$. Při hledání inverzní matice je možné vyjít z definice

(1.65) $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}'$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk k prvku a_{ij}, pro který platí $A_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$, kde M_{ij} je subdeterminant, který vznikne z determinantu A po vynechání i-tého řádku a j-tého sloupce.

1.17 - Ilustrace pomocí Příkladu 7 – výrobní linka

Abychom mohli provést výpočet dle vztahu (1.64), je třeba spočíst inverzi matice $(I-zP)$. Nejdříve vypočteme matici

(1.66) $$(I-zP)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-z.\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0{,}5z & -0{,}5z\\ -0{,}25z & 1-0{,}75z\end{pmatrix}$$

K provedení inverze vypočteme dle vztahu (1.65) determinant matice $(I-zP)$. Dostaneme $|I-zP|=[1-0{,}5z].[1-0{,}75z]-1/8z^2=[1-z].[1-0{,}25z]$. Dále máme

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1-0{,}75z & 0{,}5z\\ 0{,}25z & 1-0{,}5z\end{pmatrix}.$$ Tedy

(1.67) $$(I-zP)^{-1}=\frac{1}{(1-z).(1-0{,}25z)}.\begin{pmatrix}1-0{,}75z & 0{,}5z\\ 0{,}25z & 1-0{,}5z\end{pmatrix}$$

Jednotlivé prvky matice rozložíme pomocí metody neurčitých činitelů na součet dvou parciálních zlomků.

Prvek B^{11} inverzní matice $B=(I-zP)^{-1}$ typu (1.55A) lze rozložit na

$$\frac{1-0{,}75z}{(1-z).(1-0{,}25z)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1-0{,}25z} \quad .$$

Po odstranění zlomků dostaneme

$$(1-0{,}25z).A+(1-z).B=1-0{,}75z \quad .$$

Porovnáním koeficientů u absolutních členů a u členů s proměnnou z, dostaneme soustavu rovnic

$$A+B=1$$
$$0{,}25A+B=0{,}75 \quad ,$$

která má řešení $A=1/3, \quad B=2/3$.

Prvek B^{12} inverzní matice $(I-zP)^{-1}$ je typu (1.55B). Po provedeném rozkladu na dva zlomky pomocí metody neurčitých činitelů nebo přímo dosazením do (1.58) dostaneme pro čitatele zlomků hodnoty $A = 2/3$ a $B = -2/3$.

Když rozložíme na dva zlomky i zbývající dva prvky B^{21}, B^{22} inverzní matice $(I-zP)^{-1}$, dostaneme

$$(I-zP)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1/3}{1-z} + \frac{2/3}{1-0{,}25z} & \frac{2/3}{1-z} + \frac{-2/3}{1-0{,}25z} \\ \frac{1/3}{1-z} + \frac{-1/3}{1-0{,}25z} & \frac{2/3}{1-z} + \frac{1/3}{1-0{,}25z} \end{pmatrix}$$

Jde vlastně o součet dvou matic, takže můžeme rozepsat

(1.68) $$(I-zP)^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0{,}25z}\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Z tabulky z-transformací najdeme zpětnou transformaci funkce $F(z) = \frac{1}{1-z}$ původní funkci. Odpovídá ji funkce $f(n) = 1$. Funkci $F(z) = \frac{1}{1-0{,}25z}$ odpovídá funkce $f(n) = (0{,}25)^n$. Znamená to, že pro P^n platí

(1.69) $$P^n = 1^n.\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + 0{,}25^n.\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Matice P^n se skládá ze dvou matic, které mají odlišné vlastnosti. První matice je konstantní a nezávislá na počtu kroků n. Tato matice se nazývá stacionární matice.

Druhá matice násobená koeficientem $0{,}25^n$ představuje přechodnou (transientní) složku procesu. Protože obrazem funkce $p(n)$ byla vytvořující funkce $F(z) = p(0).(I-zP)^{-1}$, můžeme psát

(1.70) $$p(n) = p(0).\left[1^n.\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + 0{,}25^n.\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right].$$

Druhý výraz v závorce konverguje pro $n \to \infty$ k nule. Můžeme tedy psát

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = p(0).\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nezávisle na tom, zda je vektor počátečních pravděpodobností $p(0) = [1 \quad 0]$ nebo $p(0) = [0 \quad 1]$ jsme takto dostali pomocí vytvořující funkce vektor limitních pravděpodobností $a = (0{,}33333 \quad 0{,}66667)$.

Poznámka I pro řadu dalších situací platí, že systém popsaný pomocí vytvořující funkce má složku rovnovážnou (stacionární) a složku přechodnou (transientní).

1.18 Vytvořující funkce posloupností $p_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^{(n)}$

Definice 18: Vytvořující funkce $P_{ij}(s)$ posloupnosti $p_{ij}^{(n)}$ je definována vztahem

(1.71) $$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n \quad \text{pro} \quad |s| < 1$$ [3]

Podobným způsobem definujeme vytvořující funkci posloupnosti $f_{ij}^{(n)}$

(1.72) $$F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n \quad \text{pro} \quad |s| < 1$$

Připomeňme, že pro mocninné řady $A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, resp. $B(s) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j$

platí konvolutorní vztah

(1.73A) $$A(s) * B(s) = C(s) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r s^r \text{ opět pro } |s| < 1 \text{, kde}$$

(1.73B) $$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + ... + a_r . b_o$$

$$A(s) * B(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \right) . \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j \right) = a_0 . b_0 + (a_1 . b_0 + a_0 . b_1) . s + (a_2 . b_0 + a_1 . b_1 + a_0 . b_2) . s^2$$

neboli

(1.73C) $$A(s) * B(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k . \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad .$$

Jestliže ztotožníme koeficienty a_k s $f_{ii}^{(k)}$ a podobně koeficienty b_k ztotožníme s $p_{ii}^{(j)}$, pak porovnáním dříve uvedeného vztahu (1.13)

(1.74)=(1.13) $$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} . p_{ii}^{(n-k)} \quad \text{pro } n \geq 1$$ s (1.73B) dostaneme

(1.75A) $$F_{ii}(s) * P_{ii}(s) = P_{ii}(s) - 1 \quad \text{pro} \quad |s| < 1$$, neboli

(1.75B) $$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} \quad \text{pro} \quad |s| < 1$$

Odečtení konstanty 1 je nutné, protože vztah (1.74) neplatí pro $n = 0$.
Způsobem analogickým k tomu, který vedl k (1.74) dostaneme:

(1.76) $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} . p_{jj}^{(n-k)} \,, \qquad i \neq j \text{ a } n \geq 1 \,.$$

kde $f_{ij}^{(k)}$ je pravděpodobnost,toho, že první přechod ze stavu i do stavu j se vyskytne právě v k-tém přechodu. Opět dodefinujeme $f_{ij}^{(0)}$ pro všechna i a všechna j. Z (1.76) plyne, že

(1.77) $$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) * P_{jj}(s) \qquad \text{pro} \quad |s| < 1 \quad .$$

[3] Poloměr konvergence je nutno takto omezit, aby mocninná řada konvergovala.

Na základě (1.75B) může být také postavena **základní klasifikace stavů**:

A) Stav i je trvalý právě tehdy, když platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ (Definice 6)

Sdělení říká, že stav i je trvalý právě tehdy, jestliže (vycházeje právě ze stavu i) pravděpodobnost návratu do stavu i po nějaké určitém počtu kroků je jedna.

V porovnání k tomuto jsme definovali

B) Stav i je přechodný právě tehdy, když platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ (Definice 8)

To říká, že stav i je přechodný právě tehdy, jestliže (vycházeje ze stavu i) existuje „reziduální" pravděpodobnost $1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} > 0$, že se systém do stavu i po jakkoliv velkém konečném počtu kroků již nevrátí.

Tuto klasifikaci stavů lze dále přenést i na chování pravděpodobností přechodu po n krocích $p_{ii}^{(n)}$, což jsme ukázali ve Větě 3A konstatující, že

Stav i je trvalý právě tehdy, jestliže platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ a Větě 3B sdělující, že

Stav i je přechodný právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.