P9A - Spojité MŘ – Poissonův proces

2.3 Poissonův proces

Značný význam v aplikacích mají i jednoduché Markovovy procesy, ve kterých pracujeme jen s omezenou množinou možností přechodu mezi jednotlivými stavy.

Nechť $X(t)$ je počet výskytů nějakého jevu v čase $(0,t)$. Jestliže přitom jde jen o samotný výskyt jevů, které se vzájemně liší jen různým umístěním v čase, mluvíme o tzv. bodovém procesu. Jde o posloupnost jevů, které se vyskytují za sebou v určitých náhodných časových okamžicích. Předpokládáme přitom, že počet výskytů jevu $X(t)$ může nabývat jen nezáporné celočíselné hodnoty $i = 0,1,2,3,...$ a jeho přírůstky $X(t_2) - X(t_1)$ pro libovolné t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ mohou také nabývat jen hodnoty $0,1,2,3,...$.

Za takový bodový proces můžeme pokládat počet nakupujících v určitém obchodě, počet hovorů přicházející do telefonního přístroje, výskyt poruch na zařízení, počet vozidel přijíždějících ke křižovatce spod.

Poissonův proces je charakteristický těmito vlastnostmi:

A. Proces $\{X(t)\}$ má nezávislé přírůstky: Jevy, které se vyskytnou v nepřekrývajících se časových okamžicích, jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Znamená to, že počet jevů připadajících na určitý interval nezávisí na počtu jevů v jakémkoliv jiném intervalu. Jde tedy o vlastnost nezávislosti.

B. Proces $\{X(t)\}$ má homogenní přírůstky. Intenzita vyskytujících se jevů , tj. střední hodnota počtu těchto jevů za časovou jednotku (označme ji λ) je konstantní. Tato vlastnost se označuje jako stacionarita a příslušné procesy se nazývají *homogenní Poissonovy procesy*. V případě, že by intenzita výskytu jevů závisela na čase (se značením $\lambda(t)$) **, mluvíme o *nehomogenních Poissonových procesech.***

C. Pro Δt dostatečně malé a při neměnné hodnotě λ jsou pravděpodobnosti přechodu ze stavu k do stavu $k+1$ během intervalu $(t, t+\Delta t)$ rovny

(2.20A)
$$p_{k,k+1}(t, t+\Delta t) = \lambda.\Delta t + o(\Delta t)$$

Pro pravděpodobnosti setrvání ve stejném stavu během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ platí

(2.20B)
$$p_{k,k}(t, t+\Delta t) = 1 - \lambda.\Delta t + o(\Delta t)$$

Pravděpodobnosti jiných přechodů jsou v porovnání s předchozími zanedbatelné, tedy s vyjádřením

(2.20C)
$$\sum_{j=k+2}^{\infty} p_{k,j}(t, t+\Delta t) = o(\Delta t)$$

Z přijatých předpokladů vyplývá, že matice intenzit přechodu Poissonova procesu má tvar:

(2.21) $$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ .... & .... & .... & .... \end{pmatrix}$$

Pro pravděpodobnosti přechodu p_k tj. pravděpodobnosti, že systém bude v období $(t, t+\Delta t)$ ve stavu k, budou dány vztahy

(2.22A) $$p_0(t+\Delta t) = [1-\lambda.\Delta t + o(\Delta t)].p_0(t) \qquad \text{pro } k=0$$

(2.22B) $$p_k(t+\Delta t) = [1-\lambda.\Delta t + o(\Delta t)].p_k(t) + [\lambda.\Delta t + o(\Delta t)]p_{k-1} + o(\Delta t) \qquad \text{pro } k>0$$

Z těchto definičních vztahů dostaneme po úpravě

(2.23A) $$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

(2.23B) $$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Limitním přechodem pro $\Delta t \to 0$ dostaneme

(2.24A) $$\frac{p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

(2.24B) $$\frac{p_k(t)}{dt} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)$$

Počáteční podmínky popisující Poissonův proces jsou dány jako

$$p_k(0) = 1 \qquad \text{pro } k=0$$

$$p_k(0) = 0 \qquad \text{pro } k>0.$$

Rovnice (2.24) představují rekurentní soustavu diferenciálně-diferenčních rovnic. Její řešení získáme integrováním a postupným dosazováním pro $k = 0,1,2,....$.

Řešení obdobně odvoditelné pomocí vytvořujících funkcí této soustavy lze psát jako

(2.25) $$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ,$$

což je *tvar hustoty Poissonova rozdělení ve vztahu k počtu změn za časový interval* t . Člen $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost toho, že za období délky t nedojde k žádné změně.

Je-li rozdělení počtu změn systému za určitou dobu Poissonovo, pak je pro tentýž proces rozdělení dob mezi změnami exponenciální.

Matice pravděpodobností přechodu Poissonova procesu má tvar:

(2.26)

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda.\Delta t & \lambda.\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda.\Delta t & \lambda.\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda.\Delta t & \lambda.\Delta t \\ .... & .... & .... & .... \end{pmatrix}$$