P9B – Spojité MŘ - Yuleův proces

2.4 Yuleův proces

Yuleův proces popisuje vývoj početnosti souboru jedinců, kteří nezanikají a rozmnožují se dělením nebo štěpením. Pravděpodobnost, že jedinec existující v čase $t \geq 0$ dá v intervalu $(t, t+\Delta t)$ vznik dalšímu jedinci, nechť je $q.\Delta t + o(\Delta t)$ pro $\Delta t \to 0$. Chování jedinců není nijak vzájemné ovlivňováno. Stav procesu X_t je dán celkovým počtem jedinců (=rozsahem populace) **v čase t.**

Přechodové intenzity náhodného procesu jsou dány tímto předpisem:

$$q_{i,i+1} = iq\ ,\ q_{i,i} = -iq,\ \text{přičemž}\ q_{i,j} = 0\ \text{ pro } i \neq j \neq i+1\ ,\ i,j = 1,2,3,...$$

Matice intenzit přechodu Yuleova procesu tedy vypadá takto:

Číslování stavů:

(2.30)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} -q & q & 0 & 0 & .... \\ 0 & -2q & 2q & 0 & .... \\ 0 & 0 & -3q & 3q & ..... \\ 0 & 0 & 0 & -4q & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ...... & ..... \end{pmatrix} \end{array}$$

Tomu odpovídající **matice pravděpodobností přechodu Yuleova procesu je následující:**

Číslování stavů:

(2.31)
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 1-q.\Delta t & q.\Delta t & 0 & 0 & .... \\ 0 & 1-2q.\Delta t & 2q.\Delta t & 0 & .... \\ 0 & 0 & 1-3q.\Delta t & 3q.\Delta t & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 1-4q.\Delta t & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ...... & ..... \end{pmatrix} \end{array}$$

Odvození

(2.32) $$p_k(t+\Delta t) = [1 - kq.\Delta t + o(\Delta t)].p_k(t) + [kq.\Delta t + o(\Delta t)].p_{k-1}(t) + o(\Delta t)$$ **pro $k \geq 1$**[1]

Po obdobné úpravě (2.32) máme

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \left[-kq.p_k(t) + p_k(t).\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] + \left[kq.p_{k-1}\Delta t + p_{k-1}(t).\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

[1] Případ k=0 se vyskytnout nemůže, protože jedinci neodumírají a na druhé straně z nulové populace nevzejde žádný živý jedinec.

Levá strana v limitě pro $\Delta t \to 0$ dává derivaci $p'_k(t)$, přičemž členy $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$ zanedbatelné svou velikostí **odpadnou**

(2.33) $$p_k'(t) = -kq.p_k(t) + kq.p_{k-1}(t) \quad . \quad k = 1,2,3,\ldots$$ □ .

Poznámka: V případě, že uvažujeme pravděpodobnosti přechodu z jiných stavů, platí retrospektivní rovnice:

(2.34) $$\frac{dp_{ik}(t)}{dt} = -iqp_{ik}(t) + iqp_{i+1,k}(t) \qquad i = 1,2,3,\ldots$$

s počáteční podmínkou $p_{ik}(0) = \partial_{ik}$, $i = 1,2,3,\ldots$

Řešení těchto rovnic je

(2.35A) $$P_{ik}(t) = \binom{k-1}{k-i} e^{-iqt}(1-e^{-qt})^{k-i} \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

(2.35B) $$p_{ik}(t) = 0 \qquad i = k+1, k+2,\ldots.$$ □ .

Určitým zobecněním Yuleova procesu je

2.4A Divergentní proces růstu

Ten je popsán intenzitami přechodu

$q_{i,i+1} = q_i$, $i = 1,2,3,\ldots$ neboli maticemi

Číslování stavů: 1 2 3 4 5

(2.36) $$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 & 0 & 0 & \ldots. \\ 0 & -q_2 & q_2 & 0 & \ldots. \\ 0 & 0 & -q_3 & q_3 & \ldots.. \\ 0 & 0 & 0 & -q_4 & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots... & \ldots.. \end{pmatrix}$$ a

(2.37) $$P = \begin{pmatrix} 1-q_1.\Delta t & q_1.\Delta t & 0 & 0 & \ldots. \\ 0 & 1-q_2.\Delta t & q_2.\Delta t & 0 & \ldots. \\ 0 & 0 & 1-q_3.\Delta t & q_3.\Delta t & \ldots.. \\ 0 & 0 & 0 & 1-q_4.\Delta t & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots... & \ldots.. \end{pmatrix}$$

Doby mezi přechody ze stavu do stavu označme τ_i $i = 1,2,3,...$: Jsou to vzájemně nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\frac{1}{q_i}$ [2]

$$\text{Platí-li } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty \text{, dostaneme } E\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i = \sum_{i=1}^{\infty} E\tau_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty \text{ .}$$

Odtud máme mj. že $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < \infty$ s pravděpodobností 1. Trajektorie tohoto procesu v konečném čase diverguje do nekonečna. To se projeví mj. v nejednoznačnosti řešení retrospektivních rovnic pro pravděpodobnosti přechodu.

[2] **Lze to ověřit shodně jako v případě Poissonova procesu.**