PMZMII - Cviceni 1 (matice prechodu)

Cilem je najit matici, ktera umi vyjadrit vektor v ruznych bazich.

Upozorneni do pisemky: V pisemce bude cilem jen prislusne matice sestavit, nikoliv konkretne pocitat(to by byla ztrata casu v dobe, kdy mame k dispozici pocitace). Duraz je tedy kladen na pochopeni latky, nikoliv na vase pocetni schopnosti.
Priklad 4.4B20
Naleznete matici prechodu od baze (1) k bazi (2) vektoroveho prostoru V, je-li:
$V = \mathbb{R}^2$,
(1): $u_1 = (2, -3), u_2 = (-1, 1)$
(2): $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, -2)$.
Reseni:
Ukazme si napriklad, jak vypada vektor (1,0) v danych bazich. Hledame tedy linearni kombinace vekoru (u_1, u_2) a (v_1, v_2), abychom dostali dany vektor:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Protoze (u_1, u_2) tvori bazi, musi to byt linearne nezavisle vektory a tudiz musime dostat jednoznacne reseni systemu linearnich rovnic, kokretne $(-1, -3)$. Takto tedy vypada vektor $(1, 0)$ v bazi (u_1, u_2). Podobne v bazi (v_1, v_2) vypada vektor $(1, 0)$ jako vektor $(1, 0)$. Skutecne plati:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + -3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Maticove to muzeme zapsat jako

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Tedy matice prechodu od baze (1) k bazi (2) je

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\1.5 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

a matice prechodu od baze (2) k bazi (1)

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}.$$

Pozor na definici matice prechodu. Tahle se mi zda logictejsi (i doc. Veselemu), nicmene v ucebnici je definice obracene, proto i vsechny vysledky budou opacne.

Priklad 4.4B21a

Je dana baze (1) vektoroveho prostoru V a matice A. Naleznete bazi (2) prostoru V takovou, aby A byla matici prechodu od baze (1) k bazi (2). $V = \mathbb{K}$ nad $\mathbb{R}$

(1): $u_1 = 1 + 2i, u_2 = 2 - 3i$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Reseni:

Nejprve si uvedomte, ze vektorovy prostor $V = \mathbb{K}$ nad $\mathbb{R}$ ma dimenzi 2. Proto je take matice prechodu typu 2x2. Proto muzeme komplexni cislo chapat jako dvojrozmerny vektor, tedy$u_1 = (1, 2), u_2 = (2, -3)$. Nyni je dulezite si uvedomit, co vlastne vyjadruje matice prechodu: Matice prechodu od baze (1) k bazi (2) jsou vlastne linearni kombinace vektoru baze (1) v bazi (2) naskladane do sloupcu. Pouzitim teto definice resime

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1v_1 + 1v_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3v_1 + 2v_2,$$

coz se da zapsat maticove jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

odkud plyne, ze

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tedy resenim je jsou komplexni cisla $v_1 = -1.4i$ a $v_2 = 1 + 0.6i$.

Pokud bychom prijali definici matice prechodu z ucebnice, pak by

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},$$

coz odpovida vysledkum.
Priklad 4.4B21b,c
V priklade b si staci uvedomit, ze existuje izomorfismus mezi prostorem polynomu radu 2 a prostorem $\mathbb{R}^3$, tedy napriklad polynom $u_1 = x^2 + 3x + 2$ muzeme chapat jako vektor $u_1 = (1, 3, 2)$. V priklade c si uvedomme, ze prostor matic $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ je ctyr dimenzionalni (overte si to), tedy napriklad matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lze chapat jako vektor $(1, 0, 1, 1)$.
Priklad 4.4B22c
Z definice matice prechodu plyne, ze

$$u_1 = (-1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ 0 \end{pmatrix} + (4+3i)\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2+i)\begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Podobne vektory u_2 a u_3. Tedy maticove

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 2-i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & 1-2i & -2-i \\ 4+3i & -8-3i & -3+9i \\ -2+i & 3-3i & -3-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8i & -4-13i & -14+5i \\ -3-i & 6+i & 1-6i \\ -1+3i & 1-6i & -6 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom opet zamenili definici, vysledek by byl

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 2-i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & 1-2i & -2-i \\ 4+3i & -8-3i & -3+9i \\ -2+i & 3-3i & -3-3i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3-3i & 1+i & 1+4i \\ -7+i & 2 & 5+2i \\ 5 & 2-2i & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Priklad 4.4B23d
Abychom nalezli matici prechodu musime resit

$$\begin{aligned} U_1 &= a_1V_1 + b_1V_2 + c_1V_3 + d_1V_4 \\ U_2 &= a_2V_1 + b_2V_2 + c_2V_3 + d_2V_4 \\ U_3 &= a_3V_1 + b_3V_2 + c_3V_3 + d_3V_4 \\ U_4 &= a_4V_1 + b_4V_2 + c_4V_3 + d_4V_4. \end{aligned}$$

Protoze opet matice jsou ze 4dimenzionalniho prostoru, je mozne je chapat jako vektory, tedy vysezminenou rovnici je mozno maticove zapsat jako

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Vysledkem je matice

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom opet zamenili definici, dostali bychom to, co je ve vysledcich cvicebnice, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$