6. Vyšetřování průběhu funkce

Cílem tohoto textu je podat ucelený přehled charakteristik, které se obvykle zjišťují u funkcí (křivek) o zadaném analytickém vyjádření a systematicky popsat postup jejich zjišťování. V textu se vyskytují odkazy do skript autorů *Z. Došlá, J. Kuben: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno 2003*. Odkazy jsou ve tvaru `[DoKu:č.# s.#]`.

V dalším $\mathcal{I} := \mathcal{I}(a,b)$ značí interval reálných čísel s krajními hodnotami $a < b$ libovolného typu (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ nebo $[a,b]$. Pokud je interval zleva či zprava otevřený, tj. a nebo b neleží v $\mathcal{I}$, pak připouštíme $a = -\infty$, případně $b = \infty$.

I. Cílem vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce $y = f(x)$ je zejména určení:

1. **Význačných bodů:** body $x_i \in \mathbb{R}^*$, kde
   - a) do výpočtu $f(x_i)$ vstupují neurčité výrazy `[DoKu: s.106]`;
   - b) $x_i \in D(f)$ je **izolovaným** bodem definičního oboru funkce f, tj. existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x_i)$ nenáležející do definičního oboru $D(f)$;
   - c) f není spojitá: stanovíme typ nespojitosti `[DoKu:odst.4.5 s.80-82]`, podobně pro nespojitost zleva nebo zprava v krajním bodě intervalu;
   - d) $f(x_i) = 0$ ... tzv. **nulové** body funkce f;
   - e) $f'(x_i) = 0$ ... tzv. **stacionární** body funkce f `[DoKu:Pozn.6.9 s.116]`;
   - f) $f(x_i)$ nabývá **lokálního** nebo **globálního** extrému a stanovení jeho typu (**minimum, maximum**) `[DoKu:def.6.6,6.16 s.115,118]`;
   - g) f má inflexi `[DoKu:def.6.29 s.127]`.
2. **Význačných intervalů:** maximální intervaly $\mathcal{I}_k := \mathcal{I}(a_k, b_k)$, kde
   - a) f je definována: definiční obor $D(f)$ `[DoKu:def.1.21 s.10]` je obvykle sjednocením všech takových intervalů a jednobodových množin tvořených izolovanými body x_i ad 1b), tj. $D(f) = \bigcup_k \mathcal{I}_k \cup \bigcup_i \{x_i\}$;
   - b) f nabývá svých hodnot: obor hodnot $H(f)$ `[DoKu:def.1.21 s.10]` je v takovém případě sjednocením obrazů $f(\mathcal{I}_k)$ všech intervalů $\mathcal{I}_k$ ad a) a jednobodových množin tvořených funkčními hodnotami v izolovaných bodech, tj. $H(f) = \bigcup_k f(\mathcal{I}_k) \cup \bigcup_i \{f(x_i)\}$;
   - c) f je kladná a kde je záporná;
   - d) f je spojitá `[DoKu:def.4.32 s.76]`;
   - e) f je monotonní (rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí), případně konstantní `[DoKu:def.1.35 s.16]`;
   - f) f je (ostře) konvexní nebo konkávní `[DoKu:odst.6.3 s.120-127]`, případně lineární.
3. **Asymptot:** `[DoKu:odst.6.4 s.128-130]`
   - a) **bez směrnice:** bod $x_0 \in \mathbb{R}$, který je bodem nespojitosti 2. druhu ad 1c), kde platí $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$;
   - b) **se směrnicí:** přímka $ax + b$, pro niž $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.
4. **Dalších charakteristik:**
   - a) **symetrie** f `[DoKu:Def.1.30 s.13]`: určení středu symetrie x_s vůči němuž je f **sudá** nebo **lichá** funkce, neboli $f(x+x_s)$ je sudá nebo lichá (vzhledem k počátku), tj. $f(-x+x_s) = f(x+x_s)$ nebo $f(-x+x_s) = -f(x+x_s)$ platí pro každé $x \in D(f)$;
   - b) **periodicita** f `[DoKu:Def.1.32 s.15]`: určení nejmenší periody, tj. minimální hodnoty $T > 0$, pro niž platí $f(x) = f(x+T)$ pro každé $x \in D(f)$.
   - c) **(ne)ohraničenost** funkce f zdola a shora `[DoKu:def.1.29 s.12]`;

II. Doporučený systematický postup vyšetřování průběhu zadané funkce $y = f(x)$:
(viz též [DoKu:odst.6.5 s.131-133])

1. Určení význačných bodů ad I.1a)-d):

a) Spočteme limity (oboustranné, případně jednostranné) všech neurčitých výrazů [DoKu: s.106] vznikajících během výpočtu $f(x_i)$ ve všech relevantních bodech x_i ad I.1a): $f(x)$ musí být definována v nějakém alespoň ryzím oboustranném nebo jednostranném okolí každého takového bodu x_i. Obvykle v takových případech užíváme pro výpočet L'Hospitalova pravidla [DoKu:odst.5.5 s.102-104]. Pro nalezení takových bodů můžeme také využít postup dále popsaný v d) v případech, kdy tyto body jsou nulovými body nějaké funkce, která je jmenovatelem nějakého nezkratitelného zlomku vystupujícího v analytickém vyjádření $f(x)$.

b) Rozborem analytického vyjádření $f(x)$ určíme izolované body definičního oboru.

c) Ve všech bodech x_i (včetně bodů dopočtených v a)), kde f není spojitá, spočteme potřebné limity zleva či zprava a určíme typ této nespojitosti.

d) Hledáme nulové body

- přímým výpočtem, pokud je to možné, tj. známe příslušné analytické řešení (například v případě polynomů nižších stupňů, které se snažíme rozložit na součin kořenových činitelů [DoKu: s.39]);
- numerickým výpočtem, kdy nejprve spočteme $f(a_i)$ pro dostatečně mnoho hodnot $a_i \in D(f)$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Separujeme kořeny určením subintervalů $[a_j, a_{j+1}]$, kde f je spojitá a nabývá hodnot opačného znaménka na okrajích, tj. $f(a_j)f(a_{j+1}) < 0$. Každý takový interval postupně zužujeme (například půlením) tak dlouho, dokud v něm nenalezneme nulový bod $x_0 \in [a_j, a_{j+1}]$ přesně a nebo s chybou menší než ε, jakmile $a_{j+1} - a_j < \varepsilon$. Protože funkce f je na takovémto uzavřeném a ohraničeném intervalu spojitá, musí v některém jeho bodě nabýt nulové hodnoty podle Bolzanovy věty a jejího důsledku [DoKu:4.35-36 s.77]. Tyto výpočty můžeme snadno provádět například v MATLABu.

2. Určení definičního oboru $D(f)$:

Je-li $f(x)$ elementární funkcí, pak $D(f)$ je známý a jsme hotovi. V opačném případě je třeba $f(x)$ rozložit na posloupnost elementárních operací (unárních i binárních). Definiční obor operace vyhodnocované jako poslední v pořadí zúžíme na průnik s oborem hodnot předposlední operace. Její takto zúžený obor hodnot opět vynucuje odpovídající zúžení i jejího definičního oboru, kde opět uděláme průnik tohoto zúžení s oborem hodnot další operace v pořadí, atd. Tak postupně zužujeme definiční obory jednotlivých operací v opačném pořadí jejich provádění. Dosažené zúžení definičního oboru první prováděné operace je hledaným definičním oborem $D(f)$. Viz [DoKu:odst.1.3 s.18] a také ilustrační obrázek k [DoKu:Def.1.40 s.10-20] z přednášky. Při konstrukci definičního oboru binárních operací bereme v úvahu hodnoty neurčitých výrazů spočtené v kroku 1.

3. Určení oboru hodnot $H(f)$:

$H(f) = f(D(f))$ konstruujeme postupně z $D(f)$ v pořadí provádění elementárních operací.

4. Vyšetření symetrie:

Existenci a polohu středu symetrie x_s můžeme nalézt buď rozborem analytického vyjádření $f(x)$ nebo ji odhadneme z grafického vyjádření až v posledním kroku 20 (např. užitím MATLABu). Pak dosadíme $\pm x + x_s$ místo x, a vhodnou úpravou obou výrazů $f(x + x_s)$ a $f(-x + x_s)$ ověříme platnost příslušné identity $f(-x + x_s) = f(x + x_s)$ nebo $f(-x + x_s) = -f(x + x_s)$ pro každé $x \in D(f)$. V dalším stačí vyšetřovat chování f pouze pro $x \geq x_s$, přesněji pro $x \in D(f) \cap [x_s, \infty)$.

5. Vyšetření periodicity:

Postupujeme analogicky jako v předchozím kroku s tím rozdílem, že místo x_s rozborem buď přímo určíme nebo z grafu odhadneme periodu T a poté ověříme platnost identity $f(x + T) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$. V dalším stačí pak vyšetřovat chování f pouze na vhodně zvoleném intervalu délky T, přesněji pro $x \in D(f) \cap [a, a + T)$.

6. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je spojitá:

Odstraníme-li z $D(f)$ všechny izolované body a body nespojitosti, získáme množinu všech bodů spojitosti. Ta je ve většině případů disjunktním sjednocením vhodných intervalů.

7. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je kladná a kde záporná:

Funkci f vyhodnotíme nejprve ve všech izolovaných bodech. Z množiny bodů spojitosti nalezené v předchozím kroku odstraníme všechny nulové body. Je-li takto získaná množina disjunktním sjednocením intervalů, pak f na žádném z nich nemění znaménko. Stačí tedy z každého takového podintervalu vybrat po jednom bodu a v něm spočítat funkční hodnotu. Obvykle volíme body, kde je vyhodnocení snadné: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

8. Kroky 1 až 7 zopakujeme pro f':

Určování $D(f')$ je přitom usnadněno skutečností, že každý bod $D(f')$ musí být bodem spojitosti funkce f dle `[DoKu:věta 5.7 s.91]`. Zejména tedy $D(f')$ nemůže obsahovat izolované body.

9. Určení stacionárních bodů ad I.1e):

Stacionárními body f jsou právě všechny nulové body derivace f'.

10. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je rostoucí:

f je rostoucí (neklesající) na každém intervalu, kde $f' > 0$ ($f' \geq 0$), podrobněji viz `[DoKu:odst.6.1 s.113-115]`.

11. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je klesající:

f je klesající (nerostoucí) na každém intervalu, kde $f' < 0$ ($f' \leq 0$), podrobněji viz `[DoKu:odst.6.1 s.113-115]`.

12. Určení lokálních extrémů `[DoKu:odst.6.2 s.115-120]`:

Funkce f může mít lokální extrém pouze v těchto případech:

(i) v bodě x_0, kde $f'(x_0)$ neexistuje; f má v takovém bodě ostré lokální minimum (maximum), jestliže je zde spojitá a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x_0) \subseteq D(f')$ takové, že $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) v levé části tohoto okolí a současně $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) v pravé části tohoto okolí `[DoKu:věta 6.10 s.117]`; neboli když f v levé části tohoto okolí klesá (roste) a v pravé části okolí roste (klesá) — viz kroky 10 a 11.

(ii) v bodě x_0, který je stacionární ($f'(x_0) = 0$) `[DoKu:věta 6.8 s.116]`; x_0 je dle `[DoKu:věta 6.14, pozn.6.15 s.118]` ostrým lokálním minimem (maximem), pokud navíc pro nějaké $k \geq 1$ je $f^{(2k)}(x_0) > 0$ ($f^{(2k)}(x_0) < 0$) a $f^{(m)}(x_0) = 0$ pro každé $1 \leq m < 2k$.

13. Kroky 1 až 7 zopakujeme pro f'':
Určování $D(f'')$ je opět usnadněno skutečností, že každý bod $D(f'')$ musí být bodem spojitosti funkce f' dle `[DoKu:věta 5.7 s.91]`. Zejména tedy $D(f'')$ nemůže obsahovat izolované body.

14. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je konvexní:
f je (ostře) konvexní na každém intervalu, kde $f'' \geq 0$ ($f'' > 0$), podrobněji viz `[DoKu:odst.6.3 s.120-126]`.

15. Určení hodnot $x \in D(f)$, kde f je konkávní:
f je (ostře) konkávní na každém intervalu, kde $f'' \leq 0$ ($f'' < 0$), podrobněji viz `[DoKu:odst.6.3 s.120-126]`.

16. Určení inflexních bodů ad I.1g) `[DoKu:odst.6.3 s.127-128]`**:**
Funkce f může mít inflexní bod pouze v těchto případech:

(i) v bodě x_0, kde $f''(x_0)$ neexistuje; f má v takovém bodě inflexi, jestliže f' je zde spojitá a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x_0) \subseteq D(f'')$ takové, že $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) v levé části tohoto okolí a současně $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) v pravé části tohoto okolí `[DoKu:věta 6.10 s.117]`; neboli když f je v levé části tohoto okolí ostře konkávní (ostře konvexní) a v pravé části okolí ostře konvexní (ostře konkávní) — viz kroky 14 a 15.

(ii) v bodě x_0, kde f'' existuje, přičemž pro nějaké $k \geq 1$ je $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ a $f^{(m)}(x_0) = 0$ pro každé $2 \leq m < 2k + 1$.

17. Vyšetření (ne)ohraničenosti funkce f a globální extrémy:
Funkce je neohraničená zdola (shora), jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}^*$, takové, že $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \infty$). Takovými body x_0 jsou buď $\pm\infty$ nebo body nespojitosti 2. druhu. Pokud je funkce zdola (shora) ohraničená, pak globální[1] minimum (maximum) může (ale nemusí) funkce f nabýt pouze ve stacionárním bodech nebo v bodech, kde nemá derivaci `[DoKu:pozn.6.17 s.118-9]`. Pokud máme zjištěno, že existuje globální minimum (maximum), vyplývá z předchozího následující postup jejich nalezení:

- Najdeme stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace (včetně izolovaných bodů a bodů $D(f)$, které jsou krajními body nějakého intervalu spojitosti).
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot (obvykle je jich konečný počet) vybereme nejmenší (největší). To bude hledané globální minimum (maximum).

18. Určení asymptot funkce f `[DoKu:odst.6.4 s.128-130]`**:**

a) **bez směrnice:** mezi body nespojitosti 2. druhu nalezneme všechny body $x_0 \in \mathbb{R}$, kde $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$. V každém takovém bodě je $x = x_0$ rovnicí hledané asymptoty bez směrnice (přímka rovnoběžná s osou y a procházející bodem x_0).

b) **se směrnicí** `[DoKu:věta 6.34 s.129]`**:**
Přímka $y = ax + b$ je asymptotou f pro $x \to \infty$ právě když

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ a } \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogicky pro $x \to -\infty$.

19. Tabelace funkčních a limitních hodnot ve význačných bodech:
Tabelujeme funkční hodnoty spočtené ve význačných bodech.

[1] nebo též absolutní

20. Nakreslení grafu funkce na celém definičním oboru:

Do grafu nejprve vyneseme jako izolované body hodnoty tabelované v kroku 19. Pak na každém intervalu spojitosti (a, b) nalezeném v kroku 6 zvolíme vhodnou dostatečně bohatou množinu bodů $x_1 < \cdots < x_n$, v nichž vyhodnotíme funkční hodnoty $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, přidáme je do grafu z kroku 19 a pak spojíme lomenou čarou nebo jinak vhodně interpolujeme. V MATLABu můžeme pro tento účel užít například příkazy: `x=linspace(a,b); plot(x,f(x))`.