$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad P(z) = ?}$$

Přímý výpočet:

$$\underbrace{\begin{array}{lclclclcl} z^2 = zz & & z^3 = z^2 z & & \dots & & z^n = z^{n-1}z & \Rightarrow & n-1 \text{ násobení} \\ a_1 z & & a_2 z^2 & & \dots & & a_n z^n & \Rightarrow & n \text{ násobení} \\ a_0 & + & a_1 z & + & \dots & + & a_n z^n & \Rightarrow & n \text{ sečítání} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Celkem } 2n-1 \text{ násobení a } n \text{ sečítání}}$$

Princip Hornerova schématu:

$$\underbrace{(\dots((}_{n-1} a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \cdots + a_1)z + a_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Celkem } n \text{ násobení a } n \text{ sečítání} = \textbf{teoretické minimum}}$$

Věta 1.1 (Hornerovo schéma)**.**
$P(x) = P_1(x)(x-z) + P_0,\ P_1(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1,\ b_0 := P_0 = P(z)$, kde

$$\left.\begin{array}{lcl} b_n & = & a_n \\ b_k & = & a_k + z b_{k+1},\ k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{array}\right\} \Rightarrow n \text{ násobení a } n \text{ sečítání.}$$

Důkaz.

$$\begin{array}{lclclclclclcl} P_1(x)x + P_0 & = & b_n x^n & + & b_{n-1}x^{n-1} & + & \dots & + & b_2 x^2 & + & b_1 x & + & b_0 \\ -zP_1(x) & = & & - & z b_n x^{n-1} & - & \dots & - & b_3 z x^2 & - & b_2 z x & - & b_1 z \\ \hline P(x) & = & a_n x^n & + & a_{n-1}x^{n-1} & + & \dots & + & a_2 x_2 & + & a_1 x & + & a_0 \end{array}$$

Odtud porovnáním koeficientů obdržíme požadované vztahy pro b_k. □

Algoritmus.

$$\begin{array}{lccccccccc} P: & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & \dots & a_1 & & a_0 \\ & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = \\ & b_n & & b_{n-1} & & b_{n-2} & \dots & b_1 & & \boxed{b_0 = P(z)} \end{array}$$

Důsledek 1.2 (Rozšířené Hornerovo schéma)**.**
$P_0(x) := P(x) = P_n(z)(x-z)^n + \cdots + P_2(z)(x-z)^2 + P_1(z)(x-z) + P_0(z)$, kde
$P_k(x) = P_{k+1}(x)(x-z) + P_k(z),\ k = 0, 1, \dots, n-1$.

Důkaz. Rozklad z věty 1.1 aplikujeme n-krát postupně na $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$:
$P_0(x) =$

$$\underbrace{(\dots\underbrace{(\underbrace{(P_n(z)(x-z) + P_{n-1}(z))}_{P_{n-1}(x)}(x-z) + P_{n-2}(z))}_{P_{n-2}(x)}(x-z) + \cdots + P_1(z))}_{P_1(x)}(x-z) + P_0(z).$$

□

Důsledek 1.3 (Výpočet k-té derivace pomocí rozšířeného Hornerova schématu)**.**
$P_0^{(k)}(z) = k!P_k(z)$ pro $k = 0, 1, \dots, n$.

Důkaz.

$$\left[P_j(z)(x-z)^j\right]_{x=z}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad j \neq k \\ k!P_k(z) & \text{pro} \quad j = k \end{cases}.$$

□

Algoritmus.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
P_0: & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & \dots & a_2 & & a_1 & & a_0 & & \\
 & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & & \\
P_1: & b_n^{(1)} & & b_{n-1}^{(1)} & & b_{n-2}^{(1)} & \dots & b_2^{(1)} & & b_1^{(1)} & & b_0^{(1)} & = & \boxed{P_0(z)} \\
 & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & \dots & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & & & & \\
P_2: & b_n^{(2)} & & b_{n-1}^{(2)} & & b_{n-2}^{(2)} & \dots & b_2^{(2)} & & b_1^{(2)} & = & \boxed{P_1(z)} & & \\
 & & & \vdots & & & \dots & & & \vdots & & & & \\
 & \downarrow = & \overset{\times z+}{\nearrow} & \downarrow = & & & & & & & & & & \\
P_n: & b_n^{(n)} & & b_{n-1}^{(n)} & = & \boxed{P_{n-1}(z)} & & & & & & & & \\
 & \downarrow = & & & & & & & & & & & & \\
 & \boxed{P_n(z)} & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$