Teorie portfolia

Jedno-indexový model a určení podílů cenných papírů v portfoliu

Téma přednášky

- „lehký“ úvod do jedno-indexového modelu
- optimální portfolio
- příklad

Jedno-indexový model

- pozorování cen akcií naznačují, že výnosnost většiny akcií má tendenci růst, pokud roste trh a naopak klesat, pokud klesá trh
- má proto smysl dát výnosnost akcie do vztahu s výnosností trhu

$$r_i = a_i + \beta_i \cdot r_M$$

- a_i je složka výnosnosti *i-tého* cenného papíru, která je nezávislá na chování trhu
- r_M je výnosnost tržního indexu

Jedno-indexový model

- β_i je konstanta, která vyjadřuje předpokládanou změnu výnosnosti akcie *i* v závislosti na změně výnosnosti trhu
- uvedená rovnice rozděluje výnosnost akcie na dvě části – část nezávislou na trhu a část závislou na trhu
- β_i měří citlivost výnosnosti akcie na výnosnost trhu
- a_i vyjadřuje „necitlivost“ (nezávislost) výnosnosti akcie na výnosnost trhu

Jedno-indexový model

- rozložíme-li a_i na dvě části – na odhad a náhodnou chybu (střední hodnota je nulová), pak můžeme původní rovnici zapsat ve tvaru

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r_M + \varepsilon_i$$

- je nutné si uvědomit, že jak výnosnost trhu, tak náhodná chyba jsou náhodné veličiny, tj. mají pravděpodobnostní rozložení a střední hodnotu a směrodatnou odchylku

Jedno-indexový model

- je žádoucí mít náhodnou složku nekorelovanou s výnosností trhu, formálně se dá tento požadavek zapsat následovně
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, r_M) = E[(\varepsilon_i - 0) \cdot (r_M - \bar{r}_M)] = 0$$
- odhady hodnot α_i, β_i a $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ (rozptyl náhodné chyby) jsou často získávány z časových řad pomocí regresní analýzy
- regresní analýza je jedna z technik, která zaručuje nekorelovanost náhodné složky s výnosností trhu (minimálně během odhadovaného období)

Jedno-indexový model

- klíčovým předpokladem jedno-indexového modelu je, že náhodná chyba *i-té* akcie je nezávislá na náhodné chybě *j-té* akcie, tj.

$$E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0$$

- kovariance dvou cenných papírů *i, j*

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

Optimální portfolio

- budeme předpokládat, že jedno-indexový model je nejlepší metodou předpovědí kovarianční struktury výnosností
- bylo by vhodné mít jedno „číslo“, které by charakterizovalo v(ý)hodnost zařazení konkrétního cenného papíru do optimálního portfolia
- pokud předpokládáme platnost jedno-indexového modelu, pak takové číslo existuje

Optimální portfolio

- tímto číslem je poměr mezi očekávanou nadměrnou výnosností cenného papíru a betou cenného papíru $$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$$

- seřadíme-li si cenné papíry podle tohoto kritéria (od největšího po nejmenší), získáme tím pořadí v(ý)hodnosti zařazení cenného papíru do optimálního portfolia

Optimální portfolio

- pokud je do optimálního portfolia zahrnut cenný papír s konkrétním poměrem $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$, tak všechny cenné papíry s vyšším poměrem budou také zahrnuty v optimálním portfoliu
- pokud není do optimálního portfolia zahrnut cenný papír s konkrétním poměrem $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$, tak všechny cenné papíry s nižším poměrem nebudou zahrnuty v optimálním portfoliu, nebo pokud je povolen sell short, tak budou prodány nakrátko

Optimální portfolio

- existuje konkrétní hodnota C* (tzv. cut-off ratio), která určuje, které cenné papíry budou zahrnuty do optimální portfolia a které nebudou zahrnuty, resp. budou prodány nakrátko
- abychom mohli určit, které cenné papíry zahrneme, musíme postupovat následovně:
  1. seřadíme cenné papíry podle poměru $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$
  2. do optimálního portfolia zahrneme ty cenné papíry, pro které platí $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$ > C*

Optimální portfolio

- jediným problémem zůstává stanovení hodnoty C*
- hodnota C* je počítána z charakteristik cenných papírů, které jsou zahrnuty v optimálním portfoliu
- protože na začátku nevíme, kolik cenných papírů bude do optimálního portfolia zahrnuto, bude při výpočtu C* zahrnovat různý počet cenných papírů

Optimální portfolio

- pokud C_i je možný kandidát na C*, pak C_i je počítáno za předpokladu, že v optimálním portfoliu je právě *i* cenných papírů
- důležitým předpokladem pro výpočet je seřazení cenných papírů podle poměru $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$ od největší po nejmenší hodnotu

Optimální portfolio

- pro portfolio *i* cenných papírů platí

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^{i} \frac{\left(\bar{r}_j - r_f\right) \cdot \beta_j}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}{1 + \sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \right)}$$

- cenné papíry jsou zahrnuty do portfolia, pokud platí

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} > C_i$$

Optimální portfolio

- za C* zvolíme poslední C_i, pro které je předchozí vztah pravdivý
- zůstává pouze spočítat váhy cenných papírů v optimálním portfoliu

$$X_i = \frac{Z_i}{\sum_{zahrnut\acute{y}} Z_j}$$

- pričemž

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \cdot \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right)$$

Optimální portfolio

- předchozí výpočty byly určeny pro výpočet vah cenných papírů v portfoliu pro případ nepovoleného sell shortu
- v případě povoleného sell shortu postupujeme stejně, jen za C* bereme C_n

Příklad

- mějme následující data, bezrizikovou investici s výnosností 5% a rozptyl tržní výnosnosti 10

cenný papír i	$\bar{r}_i$	β_i	$\sigma^2_{\varepsilon_i}$
1	0,15	1	50
2	0,17	1,5	40
3	0,12	1	20
4	0,17	2	10
5	0,11	1	40
6	0,11	1,5	30
7	0,11	2	40
8	0,07	0,8	16

Příklad

- spočítáme poměr očekávané nadměrné výnosnosti k beta a seřadíme cenné papíry od největšího poměru k nejmenšímu
- pokračujeme dalšími dílčími výpočty a stanovením všech C_i

Příklad

cenný papír i	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$	$\frac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\frac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	C_i
1	0,1	0,002	0,02	0,002	0,02	0,0167
2	0,08	0,0045	0,0563	0,0065	0,0763	0,0369
3	0,07	0,0035	0,05	0,01	0,1263	0,0442
4	0,06	0,024	0,4	0,034	0,5263	0,0543
5	0,06	0,0015	0,025	0,0355	0,5513	0,0545
6	0,04	0,003	0,075	0,0385	0,6263	0,053
7	0,03	0,003	0,1	0,0415	0,7263	0,0502
8	0,025	0,001	0,04	0,0425	0,7663	0,0491

Příklad – sell short zakázán

cenný papír i	$\frac{\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^*$	$\frac{\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right) = Z_i$	X_i
1	0,0200	0,0455	0,0009	**0,2348**
2	0,0375	0,0255	0,0010	**0,2467**
3	0,0500	0,0155	0,0008	**0,1999**
4	0,2000	0,0055	0,0011	**0,2833**
5	0,0250	0,0055	0,0001	**0,0354**
			0,0039	1

Příklad – sell short povolen

cenný papír i	$\frac{\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^*$	$\frac{\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right) = Z_i$	X_i
1	0,0200	0,0509	0,0010	**0,3310**
2	0,0375	0,0309	0,0012	**0,3770**
3	0,0500	0,0209	0,0010	**0,3402**
4	0,2000	0,0109	0,0022	**0,7108**
5	0,0250	0,0109	0,0003	**0,0889**
6	0,0500	-0,0091	-0,0005	**-0,1472**
7	0,0500	-0,0191	-0,0010	**-0,3097**
8	0,0500	-0,0241	-0,0012	**-0,3909**
			0,0031	1