2.3. Základní NL- a VS-prostory

2.3.1 Prostory L^p a ℓ^p, $1 \le p \le \infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. Prostory funkcí

$L^p(J) := \{ f \mid f: J \to \mathbb{C}$ měř., J měř., $\int_J |f(t)|^p \, dt < \infty \}$ pro $1 \le p < \infty$.

$\|f\|_p := \left(\int_J |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $f \in L^p(J)$

$L^\infty(J) := \{ f \mid f: J \to \mathbb{C}$ měř., J měř., $\operatorname{ess\,sup}_{t \in J} |f(t)| < \infty \}$ pro $p = \infty$

$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in J} |f(t)|$, $f \in L^\infty(J)$.

$L^p := L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $L^\infty(J)$ ... prostor funkcí měřitelných a ohraničených na J.

2. Prostory posloupností

$\ell^p(J) = \{ \xi \mid \xi = \{\xi_n\}_{n \in J}, J \subseteq \mathbb{Z}, \sum_{n \in J} |\xi_n|^p < \infty \}$ pro $1 \le p < \infty$

$\|\xi\|_p = \left(\sum_{n \in J} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\xi \in \ell^p(J)$

$\ell^\infty(J) = \{ \xi \mid \xi = \{\xi_n\}_{n \in J}, J \subseteq \mathbb{Z}, \sup_{n \in J} |\xi_n| < \infty \}$ pro $p = \infty$

$\|\xi\|_\infty = \sup_{n \in J} |\xi_n|$ $\qquad \xi_n \in \mathbb{C}$

$\ell^p := \ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \le p \le \infty$, $\ell^\infty(J)$ ... prostor ohraničených posloupností.

$|J| < \infty \Rightarrow \ell^p(J) = \mathbb{C}^{|J|}$! pro $1 \le p \le \infty$.

3. $\boxed{V}$ $L^p(J)$, $\ell^p(J)$ jsou úplné (B-prostory) a separabilní pro $1 \le p < \infty$.
$L^\infty(J)$, $\ell^\infty(J)$ jsou pouze úplné a separabilní jen pokud $|J| < \infty$.
Důkaz: viz Taylor, str. 94–97, 105, 108. (viz 2.2.6/6)

4. $\boxed{V}$ p-norma je indukována skalárním součinem pouze v případě $p = 2$ (viz 2.2.7/5),
kdy $\langle f, g \rangle = \int_J f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt$ v $L^2(J)$, resp. $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{n \in J} \xi_n \overline{\eta_n}$ v $\ell^2(J)$.

Zejména tedy $L^2(J)$, resp. $\ell^2(J)$ je separabilní H-prostor tvořený prostorem funkcí, resp. posloupností s konečnou energií.

Tzv. přirozená ONB v $\ell^2(J)$: $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}_{n \in J}$, $\varepsilon_n = \{\delta_{n,k}\}_{k \in J}$.

5. $\boxed{V}$ Hölderova nerovnost

$x \in L^p(J)$, $y \in L^q(J)$, resp. $x \in \ell^p(J)$, $y \in \ell^q(J)$, kde $1 \le p, q \le \infty$,
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\left(\text{tj. } q = \frac{p}{p-1} \right) \Rightarrow xy \in L^1(J)$, resp. $xy \in \ell^1(J)$ a platí
$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$ $\left(\overset{p=q=2}{\Longrightarrow} \text{C-Schwarzovu nerovnost } 2.2.7/3/5^\circ \right)$

6. $\boxed{V}$ Koincidence prostorů

(a) $\mu(J)<\infty$ (Leb. míra), $1\le p<q<\infty \Rightarrow L^q(J)\subseteq L^p(J)$

(b) $J=\mathbb{R} \Rightarrow s_1(t):=\frac{1}{\sqrt t}1_{(0,1]}\in L^1-L^2$ a $s_2(t):=\frac{1}{1+|t|}\in L^2-L^1$. Navíc

$\overline{L_1\cap L_2}=L_2$ (uzávěr v $\|\cdot\|_2$) a $\overline{L_1\cap L_2}=L_1$ (uzávěr v $\|\cdot\|_1$)

(c) $1\le p<q\le\infty \Rightarrow \ell^p(J)\subseteq \ell^q(J)\subseteq\ell^\infty(J)$, $|J|<\infty\Rightarrow$ rovnost obou inkluzí (viz 2.2.6)

Důkaz:

(a) $f\in L^q(J)$ lib. $\Rightarrow \|f\|_q^q=\int_J |f(t)|^{p\frac{q}{p}}\,dt<\infty \Rightarrow |f|^p\in L^{\frac qp}(J)$.

Přitom $1_J\in L^{\frac{q}{q-p}}(J)$, kde $\frac pq+\frac{q-p}{q}=1$, takže užitím Hölderovy nerovnosti:

$$\||f|\|_p^p=\||f|^p\|_1=\||f|^p 1_J\|_1\le \underbrace{\||f|^p\|_{\frac qp}}\ \underbrace{\|1_J\|_{\frac{q}{q-p}}}<\infty\Rightarrow |f|\in L^p(J)\Rightarrow$$

$f=f_R+if_I$

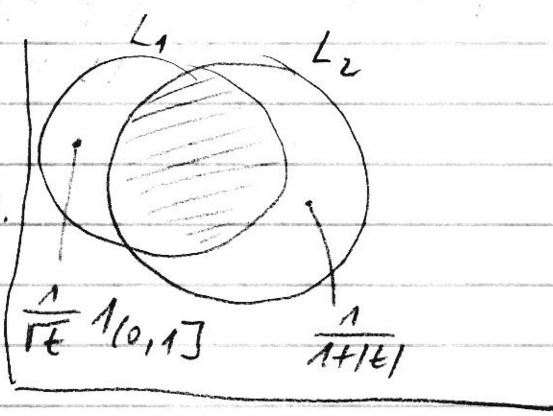
$|f_R|,|f_I|\le|f|\Rightarrow |f_R|^p,|f_I|^p\le|f|^p\Rightarrow$ $\||f|\|_q^{q\cdot\frac pq}=\|f\|_q^p<\infty$ $\quad \mu(J)^{\frac{q-p}{q}}<\infty$

$\Rightarrow f_R,f_I\in L^p(J)\Rightarrow f\in L^p(J)$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+|t|}\,dt=2\int_0^\infty\frac{1}{1+t}=2\left[\ln|1+t|\right]_0^\infty=\infty$.

$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^2dt=2\int_0^\infty\frac{1}{(1+t)^2}\,dt=2\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^\infty=2.$

$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt t}1_{(0,1]}\right|dt=\int_0^1 t^{-\frac12}\,dt=2\left[t^{\frac12}\right]_0^1=2$



$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt t}1_{(0,1]}\right|^2dt=\int_0^1\frac1t\,dt=\left[\ln|t|\right]_0^1=\infty$.

$\overline{L_1\cap L_2}=L_2$ a $\overline{L_1\cap L_2}=L_1$ – viz Lax 96/241

(c) $|J|<\infty\Rightarrow \ell^p=\mathbb{C}^{|J|}$ pro $\forall\, 1\le p\le\infty$. Nechť $|J|=\aleph_0$ a $p<\infty$.

Pro $\xi=\{\xi_n\}_{n\in J}\in\ell^p(J)$ lib.: $\sum_{n\in J}|\xi_n|^p<\infty\Rightarrow|\xi_n|\to0$ pro $|n|\to\infty$

$\Rightarrow \exists N\in J: |\xi_n|<1$ pro $|n|\ge N \overset{q>p}{\Rightarrow} |\xi_n|^q<|\xi_n|^p$ pro $|n|\ge N$

$\Rightarrow \sum_{n\in J,|n|\ge N}|\xi_n|^q<\sum_{n\in J,|n|\ge N}|\xi_n|^p\le\sum_{n\in J}|\xi_n|^p<\infty\Rightarrow\sum_{n\in J}|\xi_n|^q<\infty$,

neboť $\{n\mid n\in J\subseteq\mathbb{Z}, |n|<N\}$ je konečná $\Rightarrow \xi\in\ell^q(J)$.

Výjimku dělá $\xi\in\ell^\infty(J)$, neboť $\lim_{n\to\infty}|\xi_n|=0\Rightarrow\{|\xi_n|\}_{n\in J}$ ohraničená $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{n\in J}|\xi_n|<\infty$.