16. $\boxed{V}$ Věta o ortogonální projekci v H-prostorech

$\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ uzavřený lineární podprostor $\Rightarrow$

(i) $\forall x \in \mathcal{H}\ \exists!\ \hat{x} \in \mathcal{H}_1 : \|x-\hat{x}\| = \inf_{y\in\mathcal{H}_1} \|x-y\|$

Přitom $\hat{x}$ je pro $\forall x \in \mathcal{H}$ jednoznačně určen předpisem.

(ii) $x-\hat{x} \in \mathcal{H}_1^\perp$ (tj. $x-\hat{x} \perp y\ \forall y \in \mathcal{H}_1$)

Důkaz: viz DD/51, v (ii) $\hat{x}$ je jediný: $x-\hat{x}_1, x-\hat{x}_2 \in \mathcal{H}_1^\perp \Rightarrow \hat{x}_2-\hat{x}_1 = x-\hat{x}_1-(x-\hat{x}_2) \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_1^\perp = \{0\}$
$\Rightarrow \hat{x}_2 = \hat{x}_1$.

17. $\boxed{\text{Def}}$ Operátor $P_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$, kde $P_{\mathcal{H}_1} x := \hat{x}$, se nazývá operátorem ortogonální projekce $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}_1$ (ortogonálním projektorem $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}_1$)
(zjevně $P_{\mathcal{H}_1} x = x$ pro $\forall x \in \mathcal{H}_1$, takže $P_{\mathcal{H}_1}$ je surjekce)

18. $\boxed{V}$ Následující výroky pro operátor $P : \mathcal{H} \to \mathcal{R}(P) =: \mathcal{H}_1$ (uzav. podpr. v $\mathcal{H}$) jsou ekvivalentní:

1° $P = P_{\mathcal{H}_1}$, tj. P je operátor ortogonální projekce $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}_1$

2° $\forall x \in \mathcal{H}$ je $x^\perp := x - Px \perp \mathcal{H}_1$ ($\Leftrightarrow x^\perp \in \mathcal{H}_1^\perp$)

3° $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $P^2 = P$ (tj. P je idempotentní) a $P = P^*$, tj. P je samosdr.

Důkaz:

1° $\Leftrightarrow$ 2°: plyne z 16(ii) a 17.

2° $\Rightarrow$ 3°:

a) $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_1)$: Linearita: $c_1x_1 + c_2x_2 - (c_1Px_1 + c_2Px_2) =$
$= c_1\underbrace{(x_1-Px_1)}_{\in\mathcal{H}_1^\perp} + c_2\underbrace{(x_2-Px_2)}_{\in\mathcal{H}_1^\perp} \in \mathcal{H}_1^\perp$ (L-podpr. dle 2.2.7/6°) $\overset{(ii)\ \text{jednozn.}}{\Rightarrow} P(c_1x_1+c_2x_2) = c_1Px_1 + c_2Px_2$
2.2.7/6° (Pyth...)

Spojitost: $x = Px + x^\perp \Rightarrow \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x^\perp\|^2 \geq \|Px\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_1)$, $\|P\| \leq 1$.

b) $P^2 = P$: $u := Px \in \mathcal{H}_1$, $Pu \in \mathcal{H}_1 \overset{2°}{\Rightarrow} u - Pu \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_1^\perp = \{0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow Px = u = Pu = P^2x$.

c) $P = P^*$: $\langle Px, y\rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} + y^\perp\rangle = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \underbrace{\langle \hat{x}, y^\perp\rangle}_{=0} =$
$= \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \underbrace{\langle x^\perp, \hat{y}\rangle}_{=0} = \langle \hat{x} + x^\perp, \hat{y}\rangle = \langle x, \hat{y}\rangle = \langle x, Py\rangle$.

3° $\Rightarrow$ 2°: $M := \{x \in \mathcal{H} \mid Px = x\} \subseteq \mathcal{H}_1$. Naopak pro $\forall x \in \mathcal{H}$ je
$Px \in M$, neboť $P^2x = PPx = Px \Rightarrow \mathcal{H}_1 = \mathcal{R}(P) \subseteq M$.
Pak pro $u \in M = \mathcal{H}_1$ a $x \in \mathcal{H}$ lib.: $\langle x - Px, u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle Px, u\rangle =$
$= \langle x, u\rangle - \langle x, P^*u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, Pu\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, u\rangle = 0$.

19. $\boxed{\text{Důsl. 1}}$ $P_{\mathcal{H}_1}$ je pozitivní ($0 \leq P_{\mathcal{H}_1} \leq 1$) a $\|P_{\mathcal{H}_1}\| = 1$

Důkaz: V důkazu 3°a) jsme ukázali $\|P_{\mathcal{H}_1}\| \leq 1$. Pro $x \in \mathcal{H}_1$ je $\|P_{\mathcal{H}_1}x\| = \|x\|$, tj. $\|P_{\mathcal{H}_1}\| = 1$.
2.4.3/12 $\Rightarrow 0 \leq P^*P = PP = P \leq \|P\|^2 = 1$.

20. $\boxed{\text{Důsl. 2}}$ $M \subseteq H_1$ (podmnož.) $\Rightarrow M^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)}$

Důkaz:

I. 2.2.7 (8) $\Rightarrow \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} = M^{\perp} \Rightarrow H_1 := \overline{\mathcal{L}(M)} \subseteq M^{\perp\perp}$

II. Naopak $x \in M^{\perp\perp} \overset{2^\circ}{\Rightarrow} x = \hat{x} + x^{\perp},\ x^{\perp} \perp H_1 \Rightarrow x^{\perp} \in M^{\perp},\ x^{\perp} = x - \hat{x} \in M^{\perp\perp}$ (L-podpr.)

$\Rightarrow x^{\perp} \perp x^{\perp} \Rightarrow 0 = \langle x^{\perp}, x^{\perp} \rangle = \|x^{\perp}\|^2 \Rightarrow x^{\perp} = 0 \Rightarrow x = \hat{x} \Rightarrow x \in H_1 = \overline{\mathcal{L}(M)}$.

Tedy $M^{\perp\perp} \subseteq \overline{\mathcal{L}(M)}$.

21. $\boxed{\text{Důsl. 3}}$ $I - P_{H_1} : H \to H_1^{\perp}$ je opravdu ortogonální projekce

Důkaz: Ověříme 2°: pro $\forall x \in H$ je $x - (I - P_{H_1})x = x - x + P_{H_1}x = P_{H_1}x \in H_1$,

přičemž $H_1^{\perp\perp} \overset{20}{=} \overline{\mathcal{L}(H_1)} = \overline{H_1} = H_1$.

22. $\boxed{\text{Důsl. 4}}$ Některé další vlastnosti operátoru ortog. projekce.

Nechť $H_1, H_2 \subseteq H$. Pak

(1) $x \in H_1 \Leftrightarrow P_{H_1}x = x$

(2) $x \in H_1^{\perp} \Leftrightarrow P_{H_1}x = 0$

(3) $H_2 \subseteq H_1 \Leftrightarrow P_{H_2}P_{H_1}x = P_{H_2}x \ \forall x \in H$.

Důkaz:

(1) $x \in H_1 \Leftrightarrow x^{\perp} = x - P_{H_1}x \in H_1 \overset{18/2^\circ}{\Leftrightarrow} x^{\perp} \in H_1 \cap H_1^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow x^{\perp} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = P_{H_1}x$.

(2) $x \in H_1^{\perp} \overset{(1)\text{ a }21}{\Leftrightarrow} (I - P_{H_1})x = x \Leftrightarrow x - P_{H_1}x = x \Leftrightarrow P_{H_1}x = 0$.

(3) $x = P_{H_1}x + x^{\perp},\ x^{\perp} \in H_1^{\perp} \Rightarrow P_{H_2}x = P_{H_2}P_{H_1}x + P_{H_2}x^{\perp},\ x^{\perp} \in H_1^{\perp}$

$P_{H_2}x = P_{H_2}P_{H_1}x \ \forall x \in H \Leftrightarrow P_{H_2}x^{\perp} = 0 \ \forall x \in H \overset{\Rightarrow:\ x = y = x^{\perp} \text{ dle } (2)}{\Leftrightarrow} P_{H_2}y = 0 \ \forall y \in H_1^{\perp}$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y \in H_2^{\perp} \ \forall y \in H_1^{\perp} \Leftrightarrow H_1^{\perp} \subseteq H_2^{\perp} \Leftrightarrow H_2 \subseteq H_1$.