R. Úvodní poznámky ke mocninným rozvojům v komplexním oboru

Holomorfní funkce $f(z): G \to \mathbb{C}$, $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast

$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ konečná

(1) $\boxed{D}$ f holomorfní na $G \Leftrightarrow \exists\, f'(z)$ pro $\forall z \in G$

(2) $\boxed{V}$ f holomorfní na $G \Rightarrow f$ má derivace všech řádů na G

(3) Laurentova věta: f holomorfní v mezikruží $r_2 < |z-a| < r_1 \Rightarrow$ Laurentův rozvoj $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k$ konverguje alespoň v tomto mezikruží, přičemž L-rozvoj je jediný.

a = singularita $f \Leftrightarrow \exists r > 0$: f holom. v $0 < |z-a| < r$

a) $\lim_{z \to a} f(z) = a_0 \neq \infty$ ... odstran. singul.: $f(a) = a_0 \Rightarrow f$ holom. na $|z-a| < r$ a L-rozvoj přejde v Taylorův rozvoj

$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$, kde $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

b) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ ... pól $\Rightarrow \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow g(z) := \frac{1}{f(z)} = (z-a)^s \underbrace{(b_s + b_{s+1}(z-a) + \dots)}_{g^*(z)}$ $\quad \neq 0 \quad s \geq 1$

$\frac{1}{g^*}$ = holom. v $|z-a| < \varepsilon < r$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^s} \frac{1}{g^*(z)} \overset{a)}{=} \frac{1}{(z-a)^s}(a_{-s} + a_{-s+1}(z-a) + \dots) = a_{-s}(z-a)^{-s} + a_{-s+1}(z-a)^{-s+1} + \dots$

c) $\lim_{z \to a} f(z)$ neex. ... podstatná singul.: $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ $\quad \dots + a_{-s}(z-a)^{-s} + a_{-s+1}(z-a)^{-s+1} + \dots \leftarrow$ nekon. mnoho členů

(4) $f(z)$ má singularitu v $\infty \Leftrightarrow g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ má singularitu v 0

a) odstranitelnou $\Rightarrow f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$

b) pól $\Rightarrow f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a_s z^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots = \sum_{j=-\infty}^{s} a_j z^j$

c) podstatná singul. $\Rightarrow f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \underbrace{\dots + a_s z^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_1 z + \dots}_{\text{nekon. mnoho členů}}$

(5) Abelova věta

Jestliže potenční řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konverguje pro $z = z_0 \neq a$, pak konverguje absolutně pro $|z-a| < |z_0 - a|$

$\sup_{z_0} |z_0 - a| = R$ ... poloměr konvergence

$|z-a| < R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konverguje absolutně

(6) Důsledek: speciálně $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftarrow R \geq 1$

f holomorfní na $r_2 < |z-a| < r_1 \Rightarrow$ L-řada $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konv. abs. na $r_2 < |z-a| < r_1$. Jestliže $r_2 < 1 < r_1$, pak speciálně konverguje absolutně pro $|z-a| = 1$, tj. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n (z-a)^n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$ $\quad \Leftrightarrow \frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{r_2}$

D: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konv. $\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n}_{(1)}$ konv. a $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{(2)}$ konv. $\Leftrightarrow$ (1) konv. abs. pro $|z-a| > r_2$, (2) konv. pro $|z-a| < r_1$

(7) V Nechť $f(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ je holom. v $|z-a|<r_1$; $g(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ holom. v $|z-a|<r_2$.

Položme $r = \min(r_1, r_2)$. Pak platí

(a) $f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ je holomorfní v $|z-a|<r$, přičemž $c_n = \sum_{k=0}^{\infty(n)} a_k b_{n-k}$.

(b). Pokud $g(z) \neq 0$ v $|z-a|<r$, pak $\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k$ je holomorfní v $|z-a|<r$, přičemž $a_n = \sum_{k=0}^{\infty(n)} b_k d_{n-k}$.

Důkaz:

(a) $[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$ existuje v $|z-a|<r$ $\Rightarrow$ $f(z)\cdot g(z)$ je holomorfní v $|z-a|<r$. Pot. řady pro $f(z)$ a $g(z)$ konvergují dle (5) absolutně v $|z-a|<r$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ jejich tzv. Cauchyho součin

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-a)^l\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l (z-a)^{k+l} \overset{k+l=n}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$ konverguje absolutně

k $f(z)\cdot g(z)$ v $|z-a|<r$ [impl. (*) - viz deníček Analýza 2, str. 35-36]

Potom $\{c_n\}$ jsou hledané koeficienty T. rozvoje pro $f(z)\cdot g(z)$, neboť T. (resp. L.) rozvoj je jediný dle (3).

(b) $g(z) \neq 0$ v $|z-a|<r$ $\Rightarrow$ $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ existuje v $|z-a|<r$

$\Rightarrow$ $\frac{f(z)}{g(z)}$ je holomorfní v $|z-a|<r$.

$f(z) = \frac{f(z)}{g(z)}\cdot g(z) \overset{(a)}{\Rightarrow} a_n = \sum_{k=0}^{\infty(n)} b_k d_{n-k}$.

(8) Podobně pro L. řady.