Příklady k procvičení

Příklad 1: Rozhodněte, zda jsou nekonečné řady geometrické, pokud ano, stanovte jejich součet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 7(\frac{3}{5})^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^{n-1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 5(\frac{3^n}{2^{n+1}})$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^{n+1}}$

Příklad 2: Rozhodněte, zda nekonečné řady konvergují:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$

Příklad 3: Rozhodněte o absolutní konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n^2)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-2n}{3n+1})^n$

Řešení úloh:

Příklad 1: Rozhodněte, zda jsou nekonečné řady geometrické, pokud ano, stanovte jejich součet:

a) $q = a_{n+1}/a_n = \frac{2n-1}{2n+1} \neq konst.$, není konvergentní

b) $q = 3/5,\ a_1 = 7.3/5,\ \sum_{n=1}^{\infty} 7(\frac{3}{5})^n = (7.3/5)\frac{1}{1-3/5} = 21/2$

c) $q = 1/6, a_1 = 1/2,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^{n-1}} = (1/2).\frac{1}{1-1/6} = 3/5$

d) $q = 3/2 > 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} 5(\frac{3^n}{2^{n+1}}) = \infty$

e) $q = -1/3,\ a_1 = 2/9,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^{n+1}} = (2/9).\frac{1}{1-(-1/3)} = 1/6$

Příklad 2: Rozhodněte, zda nekonečné řady konvergují:

a) $a_{n+1}/a_n = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \leq 1/20,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ konverguje

b) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = 1/2,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ konverguje

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = 1/2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$ konverguje

d) $a_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ diverguje

e) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}(n+1)!}{5^{n+2}n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1)/5 = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$ diverguje

Příklad 3: Rozhodněte o absolutní konvergenci řad

a) $|a_n| = 1/n^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. abs.

b) $|a_n| = \frac{3^n}{n!}, \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$ konv. abs.

c) $|a_n| = \frac{n+1}{(n^2)}$, viz 3d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n^2)}$ nekonv. abs., ale $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n^2)} = 0$, tedy konv. rel.

d) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}$ diverguje

e) $|a_n| = (\frac{2n}{3n+1})^n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = 2/3 < 1$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-2n}{3n+1})^n$ konv. abs.