Funkce více proměnných

Diferenciál a Taylorův polynom pro funkce více proměnných

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ má v oblasti Ω spojité všechny parciální derivace prvního řádu. Potom

$$df(X^0) = f'_{x_1}(X^0)dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(X^0)dx_n$$

nazveme diferenciálem funkce $f(X)$ v bodě $X^0 \in \Omega$. Pro bod $X \in \Omega$ blízký bodu X^0 platí:

$$f(X) \approx f(X^0) + df(X^0).$$

Pro $n = 2$ označme $X = [x, y]$ a má-li f v jistém okolí bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu, definujeme zde Taylorův polynom druhého řádu:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}(f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{y^2}(a, b)(y-b)^2)$$

a platí zde:

$$f(x, y) \approx T_2(x, y).$$

Extrémy funkcí více proměnných

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ je definována na oblasti Ω. Nechť X^0 je jejím stacionárním bodem, tj.

$$f'_{x_1}(X^0) = f'_{x_2}(X^0) = \ldots f'_{x_n}(X^0) = 0.$$

Nechť v jistém okolí $U_\delta(X^0)$ má funkce $f(X)$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Označme

$$D_k = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_k} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f''_{x_kx_1} & f''_{x_kx_2} & \cdots & f''_{x_k^2} \end{vmatrix}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Je-li $D_k(X^0) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$
(respektive $(-1)^k D_k(X^0) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$),
má funkce v lokální minimum (resp. maximum).

Základní neurčité integrály

$$\int 0dx = c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int e^x dx = e^x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c,\ x \in (-1, 1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1, x \in (-\infty, \infty) pro\ n \geq 0\ cel\acute{e},$$

$$x \in (-\infty, 0)\ nebo\ (0, \infty)\ pro\ n < 0\ cel\acute{e}, x \in (0, \infty)\ pro\ n\ necel\acute{e}$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,\ x \in (0, \infty)\ nebo\ x \in (-\infty, 0)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + c,\ pro\ interval,\ kde\ \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -cotg(x) + c,\ pro\ interval,\ kde\ \sin x \neq 0$$

Pravidla pro integrování

Metoda per partes:

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v intervalu I spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$, pak zde platí:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

1. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
2. Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
3. Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
4. Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
5. Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
6. Hledaný integrál je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ t \in I$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

1. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$, tak aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
2. Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
3. Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
4. Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
5. Zkontrolujeme, zda na intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Rozklad na parciální zlomky

Nechť $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je ryze lomená reálná racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejný kořen. Nechť $g(x) =$

$$a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \dots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \dots [(x-c)^2+d^2]^q,$$

(kde $\alpha,\ \beta,\ \dots,\ \gamma,\ a,\ b, \dots,\ c,\ d$ jsou reálná čísla a $k,\ l, \dots,\ m,\ p, \dots,\ q$ jsou přirozená čísla) je rozklad jmenovatele v reálném oboru.

Potom existují reálná čísla

$$A_1, \dots, A_k,\ B_1, \dots,\ B_l, \dots,\ C_1, \dots,\ C_m$$

a $M_1,\ N_1, \dots,\ M_p,\ N_p, \dots,\ P_1,\ Q_1, \dots,\ P_q,\ Q_q$ tak, že platí

$$R(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)^1} +$$

$$+ \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \dots + \frac{B_1}{(x-\beta)^1} + \dots +$$

$$+ \frac{C_m}{(x-\gamma)^m} + \dots + \frac{C_1}{(x-\gamma)^1} +$$

$$+ \frac{M_p x + N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-a)^2+b^2]^1} + \dots +$$

$$+ \frac{P_q x + Q_q}{[(x-c)^2+d^2]^q} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{[(x-c)^2+d^2]^1}.$$

Nekonečné řady

Kritéria konvergence

Nutná podmínka konvergence:

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Konvergence alternující řady

Jestliže $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a

$$a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Pak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
a diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Limitní Cauchyovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Je-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

řada konverguje a je-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

řada diverguje.

Limitní d'Alembertovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Je-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

řada konverguje a je-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

řada diverguje.