Příklad 10 Počasí o 3 stavech [dr.Budíková]

Předpokládáme, že v nějaké oblasti (asi tak norské atlantické pobřeží) **může být počasí jen ve 3 stavech (*déšť , jasno, sníh*). Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají ani 2 jasné dny za sebou: jestliže je v jistém dni jasno, pak v dalších dni bude padat buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže v určitém dni prší nebo sněží, pak následující den se počasí buď nezmění (s prstí 0,5) nebo se změní a z toho v polovině případů bude jasno.**

Popište průběh počasí homogenním *Markovovým řetězcem*, charakterizujte všechny tři stavy **a najděte jeho stacionární rozdělení.**

Řešení :

Matice pravděpodobností přechodu má pro tuto situaci následující tvar:

číslování stavů (podle komor)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \text{déšť} & \text{jasno} & \text{sníh} \end{array} \\
\mathbf{P} = & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ze schématu je zřejmé (některá z mocnin matice **P** má jen nenulové prvky)[1]**, že každý stav je dosažitelný z kteréhokoliv jiného stavu. Řetězec je nerozložitelný a tedy všechny jeho stavy jsou stejného typu. Současně je zřejmé, že -** protože jde o **konečný řetězec – řetězec nemůže obsahovat trvalé nulové stavy a ani ne přechodné stavy, protože všechny stavy přechodné být nemohou. Existuje tedy stacionární rozdělení, které nalezneme výpočtem:** $\mathbf{a} = \mathbf{a}.\mathbf{P}$

$$a_0 = 0{,}5a_0 + 0{,}5a_1 + 0{,}25a_2$$

$$a_1 = 0{,}25a_0 + 0{,}25a_2$$

(redundantní) $$a_2 = 0{,}25a_0 + 0{,}5a_1 + 0{,}5a_2$$

s doplňující rovnicí $$a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

Jednoduchými úpravami všech tří „aktivních" rovnic

$$4a_0 = 2a_0 + 2a_1 + a_2\ ,\quad 4a_1 = a_0 + a_2 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

Dostaneme: $2a_0 = 2a_1 + a_2$ **neboli** $a_2 = 2a_0 - 2a_1$

$a_2 = 4a_1 - a_0$ **a tedy komparací**

$4a_1 - a_0 = 2a_0 - 2a_1$ **tj.** $6a_1 = 3a_0$ **resp.** $2a_1 = a_0$ **a také** $a_2 = 2a_0 - a_0 = a_0$

dostaneme stacionární řešení: $\begin{pmatrix} a_0 & a_0/2 & a_0 \end{pmatrix}$ **tj.** $a = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

neboli procentuálně $a = \begin{pmatrix} 40\% & 20\% & 40\% \end{pmatrix}$ **.**

---

[1] **Stačí spočíst P^2 (již ta má jen nenulové prvky) nebo P^4.**

Doplnění: střední doby návratu udává vektor: $\mu = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$.

Interpretace: **Znamená to tedy, že od sněžení do sněžení nebo od deštivého dne k deštivému dni uplyne v průměru 2,5 dne, zatímco k návratům do jasného dne bude docházet v průměru jen 1x za 5 dní.**

Všechny stavy jsou tedy *trvalé*, *nenulové*, *vzájemné dosažitelné po max. 2 krocích*. **Stav 1** (jasný den) **je *periodický* s periodou 2, ostatní dva jsou *neperiodické*.**

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0{,}400 & 0{,}200 & 0{,}400 \\ 0{,}400 & 0{,}200 & 0{,}400 \\ 0{,}400 & 0{,}200 & 0{,}400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$ **dosažitelné.**

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4375 & 0{,}1875 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}250 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}1875 & 0{,}4375 \end{pmatrix}$$