Příklad 2A – Urnové schéma 1 [přemisťování kuliček] [dr.Budíková]

Máme černou a bílou urnu a dohromady 5 koulí. Na počátku jsou všechny koule v černé urně. Činíme opakovaná přemisťování koulí z jedné urny do druhé: V každém kroku náhodně vybereme jednu kouli (výběr kterékoliv koule je stejně pravděpodobný) a přemístíme ji do druhé urny. Formulujeme homogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$ s množinou stavů $J = \{0,1,2,\ldots,5\}$, přičemž $X_n = j$, když v n-tém kroku pokusu bude v černé urně právě j koulí.

A) Najděte matici pravděpodobností přechodu a nakreslete přechodový diagram:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B) Najděte stacionární rozdělení tohoto HMŘ

$$(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5).\mathbf{P}$$

s doplňkovou podmínkou $\sum_{j=0}^{5} a_j = 1$.

Řešení bude mít podobu

$$(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5) = (1/32 \quad 5/32 \quad 10/32 \quad 10/32 \quad 5/32 \quad 1/32).$$

C) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci průběhu procesu (v době dostatečně vzdálené od počátečního stavu):

Definujme náhodnou veličinu X : počet koulí v černé urně po stabilizaci. Pak

$$EX = \sum_{j=0}^{5} x_j.p(x_j) = 0.\frac{1}{32} + 1.\frac{5}{32} + 2.\frac{10}{32} + 3.\frac{10}{32} + 4.\frac{5}{32} + 5.\frac{1}{32} = \frac{5}{32} + \frac{20}{32} + \frac{30}{32} + \frac{20}{32} + \frac{5}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$$

Příklad 2B – Ehrenfestovo hypotetické schéma [Karlin-Taylor]

Jde o klasický matematický model difúze částic přes membránu, popsatelný náhodnou procházkou s konečným počtem stavů, kde hraniční stavy jsou odrážející. Náhodná procházka je omezena na stavy $i = \cdot - + \ldots, - 0, + + \ldots, a$

Pravděpodobnosti přechodu jsou dány tímto schématem

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a-i}{2a}, jestliže \quad j = i+1 \\ \dfrac{a+i}{2a}, jestliže \quad j = i-1 \\ 0, jinak \end{cases},$$

Fyzikální interpretace tohoto modelu je následující: Představme si dvě nádoby, které dohromady obsahují dohromady $2a$ kuliček. Předpokládejme, že první nádoba označená A má k kuliček, a druhá nádoba B obsahuje $2a-k$ kuliček. Každá kulička je vybírána náhodně (přičemž všechny výběry jsou stejně pravděpodobné z celkového úhrnu $2a$ kuliček) **a je přemístěna do druhé nádoby. Každý výběr znamená změnu stavu procesu. Zřejmě kuličky fluktuují mezi oběma nádobami s driftem od nádoby s velkou koncentrací kuliček do druhé nádoby s menší koncentrací kuliček.**

Tímto Ehrenfestovým modelem může být aproximován fyzikální systém který je v podstatě je ovládán množinou vyvažujících sil v podstatě úměrných vzdálenosti od rovnovážného stavu může být aproximován. (Řádkové součty jsou zřejmě 1).

Úloha: znázorněte příslušnou MPP Ehrenfestova schématu (zvolme např. a= 4) :

Zvolíme-li a= 4, pak možné stavy procesu jsou tedy -4,-3,-2, -1,0,1,2,3,4

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{4-i}{8}, jestliže \quad j = i+1 \\ \dfrac{4+i}{8}, jestliže \quad j = i-1 \\ 0, jinak \end{cases}$$

Znamená to tedy, že při zvoleném a = 4 budeme mít celkem 9 stavů a nenulové pravděpodobnosti budou u těchto v úvahu přicházejících přechodů:

$P_{-\,-} = \frac{8}{8}$, $P_{-\,-} = \frac{1}{8}$, $P_{-\,-} = \frac{7}{8}$, $P_{-\,-} = \frac{2}{8}$, $P_{-\,-} = \frac{6}{8}$, $P_{-\,-} = \frac{3}{8}$, $P_{-0} = \frac{5}{8}$

$P_{12} = \frac{3}{8}$, $P_{10} = \frac{5}{8}$, $P_{01} = \frac{4}{8}$ $P_{0-} = \frac{4}{8}$, $P_{12} = \frac{3}{8}$, $P_{10} = \frac{5}{8}$, $P_{23} = \frac{2}{8}$, $P_{21} = \frac{6}{8}$

$P_{34} = \frac{1}{8}$, $P_{32} = \frac{7}{8}$ a konečně $P_{43} = \frac{8}{8}$

Příslušná MPP bude tedy mít tvar (odpovídající MPP nesymetrické náhodné procházky konečného řetězce s odrážejícími stěnami)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} \text{S-4} & \text{S-3} & \text{S-2} & \text{S-1} & \text{S0} & \text{S1} & \text{S2} & \text{S3} & \text{S4} \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/8 & 0 & 7/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2/8 & 0 & 6/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3/8 & 0 & 5/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4/8 & 0 & 4/8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5/8 & 0 & 3/8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/8 & 0 & 2/8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/8 & 0 & 1/8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Úlohou by mohlo být *nalezení stacionárního rozdělení tohoto řetězce* (s prověřením toho, že toto rozdělení existuje)