Symetrická nekonečná jednorozměrná náhodná procházka [Karlin-Taylor]

Jedná se o Markovův řetězec, jehož stavy tvoří množina celých čísel a platí:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2} \ .$$

Jedná se o nerozložitelný řetězec s periodou 2. Pro prsti přechodu platí[1]

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} . \left(\frac{1}{2}\right)^n . \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} . 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} . 2^{-2n}$$

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0 \quad , \quad n = 0,1,2,..., \ .$$

Výpočet založíme na tomto postupu:

Užijeme *Stirlingův vzorec* $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, takže odtud $(2n)! \approx (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}$

Máme

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\right)^2} . 2^{-2n} = \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} 2^{-2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ pro } n \to \infty \ .$$

Odtud plyne jednak, že $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ a současně, že $\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$

Všechny **stavy nesymetrické nekonečné náhodné procházky jsou** tedy **trvalé nulové.**

Nesymetrická nekonečná náhodná procházka

Jedná se o Markovův řetězec, jehož stavy tvoří množina celých čísel a platí:

$$p_{i,i+1} = p \ . \qquad\qquad p_{i,i+1} = (1-p) \ .$$

Jedná se o nerozložitelný řetězec s periodou 2. Pro prsti přechodu platí[2]

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} . p^n . (1-p)^n = \frac{2n!}{(n!)^2} . p^n . (1-p)^n$$

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0 \quad , \quad n = 0,1,2,..., \ .$$

---

[1] Návrat do daného stavu je možný vždy jen po sudém počtu kroků (2n), přičemž musíme učinit právě n kroků doprava a n kroků doleva. Počet takovýchto možností je dán právě kombinačním číslem $\binom{2n}{n}$

[2] Návrat do daného stavu je možný vždy jen po sudém počtu kroků (2n), přičemž musíme učinit právě n kroků doprava a n kroků doleva. Počet takovýchto možností je dán právě kombinačním číslem $\binom{2n}{n}$

S využitím *Stirlingova vzorce* $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, resp. $(2n)! \approx (2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}$ máme

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}.p^n.(1-p)^n = \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} p^n.(1-p)^n = \text{ pro } n \to \infty$$

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{2^{2n} 2.\sqrt{\pi n}}{2\pi n} p^n.(1-p)^n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} p^n.(1-p)^n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} p^n.(1-p)^n$$

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} p^n.(1-p)^n = \frac{(2p)^n.(2-2p)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{[4.p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Maximum výrazu $p(1-p)$ pro $p \in (0,1)$ je -jak známo- $\frac{1}{4}$ **nastává v bodě** $p = \frac{1}{2}$.

Hodnota výrazu $4p(1-p)$ proto nemůže být větší než 1. Platí tedy

$$p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{[4.p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} \le \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ a z toho plyne } \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = 0$$

Zbývá vyšetřit, zda platí $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ **nebo** $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ k prokázání, **zda stavy jsou trvalé nulové nebo přechodné.**

Ukázali jsme, že **v případě $p = 1/2$ jsou všechny stavy trvalé nulové**.

Pro $p \ne 1/2$ jde o vyšetření konvergence řady $\pi^{-1/2} c^n . n^{-1/2}$ **pro $c < 1$. Užijeme d´Alembertovo podílové kritérium:**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi^{-1/2} c^{n+1}.(n+1)^{-1/2}}{\pi^{-1/2} c^n (n)^{-1/2}} = \frac{c.(n)^{1/2}}{(n+1)^{1/2}} = c.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} = c.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/2}$$

Odtud $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} c.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/2} = c < 1,$$

protože $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/2} = 1$. **Řada** $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ **má tedy konečný součet, což znamená, že všechny stavy Markovova řetězce** představujícího nesymetrickou nekonečnou náhodnou procházku **jsou přechodné.** □.

Symetrická nekonečná *dvourozměrná* náhodná procházka

Uvažujme tentokrát nekonečnou náhodnou procházku „po celých číslech" ve dvoudimenzním prostoru. Částice, jejíž pohyb sledujeme, se může pohybovat kromě směrů "*doprava*" a "*doleva*" také ve směrech "*nahoru*" a "*dolů*". Předpokládáme (jde-li o symetrickou procházku)**, že pohyb do všech čtyř směrů je stejně pravděpodobný. Vyšetřování tohoto řetězce (stav je dán celočíselnou souřadnicí ve dvourozměrném prostoru) můžeme začít** (pro jednoduchost) **v počátku.**

Při stanovení pravděpodobnosti p_{00}^{2n} uvažujeme veškeré možnosti návratu do výchozího stavu (počátku). Návrat do něho je možný vždy tehdy, jestliže učiníme stejný počet kroků doleva jako doprava (řekněme i) a stejný počet kroků nahoru jako dolů (řekněme j). Budeme tedy analyzovat počet kroků $2i+2j=2n$.

Zřejmě platí $p_{00}^{2n+1}=0$, protože po lichém počtu kroků návrat do výchozího stavu zaznamenat nemůžeme. Spočteme tedy prvky posloupnosti p_{00}, kde

$$p_{00}^{(2n+1)}=0 \qquad n=0,1,2,3,..$$

$$p_{00}^{(2n)}=\sum_{i,j,i+j=n}\frac{(2n)!}{i!i!\,j!\,j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \qquad n=1,2,3,..$$

Číslo (složené z faktoriálů) v sumaci nám udává počet všech možných cest, kterými je možné provést pohyb i posunů doleva a doprava a současně j posunů nahoru a dolů. Pravděpodobnost každého takového kroku je (stejná) **$1/4$. Schéma odpovídá tvaru pravděpodobnostní funkce multinomického rozdělení.**

Vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem $(n!)^2$ dostaneme

$$p_{00}^{(2n)}=\sum_{i,j,i+j=n}\frac{(2n)!\,n!\,n!}{i!i!\,j!\,j!\,n!\,n!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum_{i=0}\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{n-i} \qquad n=1,2,3,..\,.$$

Přitom platí

$$\sum_{i=0}\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{n-i}=\binom{2n}{n}$$

, takže máme

$$p_{00}^{(2n)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}^2 \qquad n=1,2,3,..$$

S využitím *Stirlingova vzorce* pak dostaneme

$$p_{00}^{(2n)}\approx\frac{1}{\pi n} \qquad n=1,2,3,...$$

Odtud je zřejmé, že platí jednak $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(2n)}=0$, jednak $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$[3], z čehož plyne, že a stav 0 řetězce (stejně jako kterýkoliv jiný stav řetězce se všemi souslednými stavy) **je trvalý, nenulový.**

---

[3] **Chování řady je až na konstantu rovnocenné chování harmonické řady $1/n$, která diverguje.**

<u>Symetrická nekonečná *trojrozměrná* náhodná procházka</u>

Tentokrát rozšíříme uvažování na třírozměrnou nekonečnou náhodnou procházku „po celých číslech“. Částice, jejíž pohyb sledujeme, se může pohybovat kromě směrů “doprava“ a “doleva“ a “nahoru“ a “dolů“ ještě ve směrech „dopředu“ a „dozadu“. Opět předpokládáme (jde-li o symetrickou procházku), **že pohyb do všech šesti směrů je stejně pravděpodobný. Vyšetřování tohoto řetězce** (stav je dán celočíselnou souřadnicí ve třírozměrném prostoru) **začneme opět v počátku.**

Vzhledem k nemožnosti návratu do výchozího stavu po lichém počtu kroků i v tomto případě platí

$$p_{00}^{(2n+1)} = 0 \qquad n = 0,1,2,3,.. \text{, zatímco}$$

Pravděpodobnost návratu do počátku po sudém počtu kroků je rovna

$$p_{00}^{(2n)} = \sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \frac{(2n)!}{i!\,i!\,j!\,j!\,(n-i-j)!\,(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \qquad n = 1,2,3,.. \;.$$

Z každého počtu kroků $2n$ učiníme i kroků doprava, j kroků nahoru, $n-i-j$ kroků dopředu, i kroků doleva, j kroků dolů, $n-i-j$ kroků dozadu. Všechny kroky činíme se stejnou pravděpodobností $1/6$. Příslušný výraz v sumaci udává počet všech možných takovýchto kombinací.

Výpočet této pravděpodobnosti je tentokrát dost obtížný a lze jej nalézt v knize Karlin-Taylor na str. 68-69. Mj. se v průběhu odvození využívá přepisu (násobením čitatele a jmenovatele $(n!)^2$ a „odfaktorizování“ členu $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$)

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \left[\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\right]^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \qquad n = 1,2,3,.. \;.$$

Následně se využije skutečnosti, že platí

$$\sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \left[\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\right]^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 1 \qquad n = 1,2,3,.. \;.$$

(jde o součet všech členů třírozměrného multinomického rozdělení), přičemž hodnota p_{00}^{2n} se dá shora omezit výrazem $p_{00}^{(2n)} \le C_n \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ $n = 1,2,3,..$**, v němž se člen c_n určí jako**

$$c_n = \max_{i,j,0 \le i+j \le n}\left[\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\right]$$

Další výpočty vedou k omezení hodnoty levé strany shora výrazem

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)!\left(\frac{n}{3}\right)!\left(\frac{n}{3}\right)!\,2^{2n}3^{n}}\binom{2n}{n} \qquad n = 1,2,3,.. \;.$$

Uplatněním *Stirlingova vzorce* lze ukázat, že pravá strana této nerovnosti je asymptoticky ekvivalentní výrazu

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2}n^{3/2}}$$

Odtud je zřejmé, že sice opět platí $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = 0$**,ale především** $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$**, protože součet výsledné nekonečné řady je** evidentně **konečný. Znamená to tedy, že v případě třírozměrné symetrické náhodné procházky je (na rozdíl od jedno a dvourozměrné) sledovaný stav** (ostatně stejně jako všechny ostatní) **přechodný.**