Příklad 7 – Výrobní linka v provozu/opravě [VK příklad 2.1, str.15]

Uvažujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu této linky se dopělo k následujícím závěrům. Pokud se výrobní linka v jednom období nacházela ve stavu provozu, pak v dalším období v 50% případů zůstala v provozu a v 50% případů se nacházela v opravě. Pokud se výrobní linka nacházela ve stavu opravy, pak v dalším období v 75% případů zůstala výrobní linka v opravě a v 25% případů přešla do provozu.

V tomto jednoduchém příkladě jsou uvedeny dva stavy, výrobní linka v provozu a výrobní linka v opravě. Dané relativní četnosti je možno interpretovat jako pravděpodobnosti přechodu. Potom matice podmíněných pravděpodobností přechodu má tvar

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Stavy}\ 1 & 2\end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vektor absolutních pravděpodobností stavů vypočteme dle vztahu $´p^{(n+1)} = p^{(n)}.P$

A) Předpokládejme, že na počátku se výrobní linka nachází ve stavu provozu, tj. $p(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$. Vektor absolutních pravděpodobností stavů po prvním období bude tedy

$$p(1) = p(0).P = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix},$$

Znamená to tedy, že po uplynutí prvního období budou provoz i oprava výrobní stejně pravděpodobné. Vektor absolutních pravděpodobností po 2. období bude

$$p(2) = p(1).P = \begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}375 & 0{,}625\end{bmatrix},$$

Tedy pravděpodobnost, že výrobní linka bude v provozu i po druhém období, je 0,375 a pravděpodobnost, že výrobní linka bude v opravě je 0,625. Podobně je možné nalézt vektory absolutních pravděpodobností stavů po dalších obdobích. Hodnoty složek vektoru absolutních prstí pro prvních pět období jsou souhrnně uvedeny v tabulce:

Tabulka 1

TAB1							
n	0	1	2	3	4	5	6
$p_1^{(n)}$	1	0,5	0,375	0,3438	0,3359	0,334	
$p_2^{(n)}$	0	0,5	0,625	0,6562	0,6641	0,666	

B) V případě, že na počátku sledování byla výrobní linka v opravě, tedy vektor výchozích absolutních prstí $p(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$, je možné stanovit vektory absolutních prstí pro následující období takto:

$$p(1)=p(0).P=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{bmatrix},$$

$$p(2)=p(1).P=\begin{bmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}3125 & 0{,}6875\end{bmatrix},$$

Analogicky bychom stanovili vektory absolutních prstí pro třetí až páté období. Souhrnně jsou všechny hodnoty uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2

TAB2							
n	0	1	2	3	4	5	6
$p_1^{(n)}$	0	0,25	0,3125	0,3281	0,332	0,333	
$_2^{(n)}$	1	0,75	0,6875	0,6719	0,668	0,667	

Budeme-li předpokládat, že se oba stavy mohou stále vyskytovat, můžeme stanovit *limitní rozdělení absolutních pravděpodobností* vektoru $p^{(n)}$ pomocí limitního vektoru *a* . Složky limitního vektoru *a* stanovíme řešením soustavy rovnic $a=a.P$ s užitím podmínky $\sum_{i=1}^{M} a_i = 1$. Pro daný příklad bude mít soustava tvar

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}, \quad a_1+a_2=1$$

Po jednoduché úpravě dostáváme soustavu

$$0{,}5.a_1+0{,}25.a_2=a_1$$

$$0{,}5.a_1+0{,}75.a_2=a_2$$ včetně podmínky $a_1+a_2=1$.

Jednu z rovnic touto podmínkou nahradíme a soustavu snadno vyřešíme.

Výsledný stacionární vektor a má tyto složky

$$a=\begin{pmatrix}0{,}3333 & 0{,}6667\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\end{pmatrix}.$$

Znamená to, že po dostatečně dlouhé době bude výrobní linka v provozu s pravděpodobností 0,3333 a v opravě s pravděpodobností 0,66667. Srovnáme-li tyto limitní pravděpodobnosti se složkami vektoru absolutních pravděpodobností po prvních pěti obdobích, vidíme, že se systém stabilizuje velmi rychle, protože *vektor limitních pravděpodobností* se od *vektoru absolutních pravděpodobností pro páté období* liší jen nepatrně.