P8 - Spojité Markovovy řetězce

2. Markovovy řetězce se spojitým časem

2.1 Obecné vlastnosti náhodných procesů se spojitým časem

Předpokládáme-li, že se přechody mezi jednotlivými stavy mohou uskutečnit v libovolně blízkých časových okamžicích, můžeme vystihnout případy změn ve spojitém čase. Mluvíme potom o Markovově resp. markovském procesu se spojitým časem.

Náhodné proměnné $X(t)$ nabývají stejně jako u (diskrétních) **Markovových řetězců hodnoty, které jsou přiřazeny určitým stavům. V daném okamžiku se může vyskytnout jeden ze stavů $I_1, I_2, I_3, \ldots I_N$. Okamžiky $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, \ldots$ se liší o veličinu Δt**, která se blíží k nule[1].

Dochází-li ke změnám v okamžicích, které se liší o Δt, potom pro tento interval ***musíme*** **sledovat i pravděpodobnosti přechodu. Nechť existují limity měnících se pravděpodobností, které znamenají pravděpodobnosti přechodu v době $t+\Delta t$, podmíněné situací, jaká nastala v době t ve tvaru**

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geq 0 \tag{2.1}$$

V řadě situací vystačíme předpokladem, že tyto pravděpodobnosti přechodu $a_{ij}(t)$ jsou konstantní, tedy nezávislé na t tedy a_{ij}. Pravděpodobnost setrvání v daném j-tém stavu $p_{jj}(t, t+\Delta t)$ v limitně neomezeně malé době by se ovšem blížila k jedné. Proto zavádíme (v limitě) její doplněk do 1, tedy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1-p_{jj}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = a_{jj}(t) \geq 0 \tag{2.2}$$

Limita (2.1) představuje intenzitu pravděpodobnosti **přechodu ze stavu i do stavu j), limita (2.2) představuje intenzitu výstupu ze stravu j** (kamkoliv jinam)**.**

Matici pravděpodobností přechodu, zachycující podmíněné pravděpodobnosti výskytu určitých stavů v době $t+\Delta t$ podmíněné výskytem určitých stavů v době t lze psát ve tvaru[2]

$$P = \begin{pmatrix} 1-a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & \ldots & a_{2M}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1-a_{22}(t)\Delta t & \ldots & a_{2M}(t)\Delta t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1}(t)\Delta t & a_{M2}(t)\Delta t & \ldots & 1-a_{MM}(t)\Delta t \end{pmatrix}$$

[1] **Zápis $\Delta t \to 0$ ve svém důsledku znamená, že náhodný proces jsme schopni pozorovat v kterémkoliv časovém okamžiku z intervalu $\langle 0, T \rangle$.**

[2] **Tato matice má** – stejně jako MPP diskrétních Markovových řetězců – **jedničkové řádkové součty.**

Matici intenzit přechodu lze psát ve tvaru

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1M}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2M}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}(t) & a_{M2}(t) & \dots & a_{MM}(t) \end{pmatrix}$$

Protože řádkové součty v matici $\mathbf{P}$ jsou jednotkové , musí platit

(2.3) $$-a_{jj}(t)=\sum_{i=1, i\neq j}^{M} a_{ji}(t)$$

a tedy **součty prvků v řádcích matice $\mathbf{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$ jsou nulové.**

V důsledku toho lze řádky matice $\mathbf{A}(t)$) násobit libovolným nenulovým číslem,

Matici $\mathbf{A}(t)$ nazýváme maticí intenzit pravděpodobností **přechodu a s maticí $\mathbf{P}(t,t+\Delta t)$ souvisí tímto vztahem:**

(2.5) $$\mathbf{P}(t,t+\Delta t)=\mathbf{I}_M+\mathbf{A}(t)\Delta t$$

Pro absolutní pravděpodobnosti lze psát

(2.4) $$\mathbf{p}(t+\Delta t)=\mathbf{p}(t)\mathbf{P}(t,t+\Delta t)\ .$$

Vyjádříme-li absolutní pravděpodobnosti pomocí matice intenzit přechodu $\mathbf{A}(t)$, můžeme zapsat

$$\mathbf{p}(t+\Delta t)=\mathbf{p}(t)\left[\mathbf{I}_M+\mathbf{A}(t)\Delta t\right]$$ **. neboli po úpravě**

(2.6) $$\frac{\mathbf{p}(t+\Delta t)-\mathbf{p}(t)}{\Delta t}=\mathbf{p}(t)\mathbf{A}(t)$$

Přejdeme li k limitnímu vyjádření pro neomezeně se zmenšující Δt, dostaneme

(2.7) $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{p}(t+\Delta t)-\mathbf{p}(t)}{\Delta t}=\mathbf{p}'(t)$$ **a odtud z**

(2.8) $$\mathbf{p}'(t)=\mathbf{p}(t)\mathbf{A}(t).$$

Jestliže průběh náhodného procesu nezávisí na době, která uplynula od počátku procesu, mluvíme opět o *homogenních Markovových procesech*, v opačném případě o *nehomogenních Markovových procesech*.

Matici intenzit přechodu značíme v případě homogenního procesu s konečným počtem stavů $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$, kde nyní již **intenzity a_{ij} nezávisejí na čase.**

Pak můžeme vztah (2.8) vyjádřit ve tvaru

(2.9) $$\mathbf{p}'(t)=\mathbf{p}(t)\mathbf{A}.$$

Z formálně matematického hlediska představuje vztah (2.8) maticovou **soustavu diferenciálních rovnic pro veličiny $\mathbf{p}(t)$, kterou lze zapsat následovně**

(2.9A) $$\frac{p'(t)}{p(t)} = A \quad , \quad \text{resp.} \quad \frac{d(\log p(t))}{dt} = A .$$

Jako řešení této soustavy dostáváme:

$\lg p(t) = At + c$ resp. $p(t) = k e^{At}$, kde za k můžeme jako počáteční podmínku voli vektor $p(0)$, takže máme zápis

(2.10) $$p(t) = p(0) e^{At},$$ ve kterém je exponenciální maticová funkce A definována jako mocninný rozvoj

(2.11) $$e^{At} = I_M + \frac{A}{1!} t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \ldots$$[3]

Ukazuje se, že veličiny $p(t)$ budou – až na výchozí vektor $p(0)$ - dány určitým typem mocninné řady.

Existuje-li limitní (=stacionární) rozdělení pravděpodobností, pak platí

(2.4) $$\lim_{\Delta t \to 0} p(t + \Delta t) = p(t)$$, takže z toho plyne

$p'(t) = 0$ a tedy

Pro rozdělení limitních pravděpodobností lze psát dle (2.9)

(2.10) $$pA = 0 .$$

Protože platí – až na konstantu - $A = P - I_M$, je limitní rozdělení stejné jako v případě, že pracujeme s procesy (řetězci) s nespojitým časem:

Ze vztahu $p[P - I_M] = 0$ plyne

(2.11) $$pP = p ,$$

což je stejný vztah jak ho známe z regulárních diskrétních Markovových řetězců.

[3] Vyplývá to z Taylorova rozvoje exponenciální funkce pro maticový argument

2.2 Vytvořující funkce pro spojité Markovovy procesy

Analogií vytvořující funkce $F(s)$ bude pro spojitý Markovův proces funkce

(2.12) $$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Tento tvar vytvořující funkce odpovídá Laplaceově transformaci. Podobně jako u vytvořující funkce u diskrétních Markovových řetězců (z-transformace) existuje i zde jednoznačná korespondence mezi původní funkcí $f(t)$ a její transformací $F(s)$. U jednoduchých situací obvykle vystačíme při použití této transformace s tím, že užijeme *„slovníku“* transformací. Nejčastěji užívané funkce obsahuje následující tabulka:

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
e^{-at}	$1/(s+a)$
t	$\frac{1}{s^2}$.

Použijeme-li k analýze systému vztah (2.10), tvoříme Laplaceovu transformaci pro původní funkci, jíž je vektor $p(t)$. Označme Laplaceovu transformaci tohoto vektoru $p(t)$ symbolem $P(s)$, pak máme

(2.13) $$P(s)=\int_0^\infty e^{-st}p(t)dt .$$

Užijeme-li vztah (2.10), pak pro vektor $P(s)$ platí

(2.14) $$P(s)=\int_0^\infty e^{-st}p(0)e^{At}dt=p(0)\int_0^\infty e^{-t(sI-A)}dt .$$

Protože pro maticové funkce lze v řadě případů využít podobné vztahy jako pro funkce skalárních proměnných, můžeme provést analogický výpočet integrálu[4]:

$$\int_0^\infty e^{-tK}dt=\left[\frac{e^{-tK}}{-K}\right]_0^\infty=\left[\frac{e^{-\infty K}}{-K}-\frac{e^{-0K}}{-K}\right]=\left[\frac{0}{-K}-\frac{1}{-K}\right]=K^{-1}.$$

Můžeme tedy pro funkci $P(s)$ psát

(2.15) $$P(s)=p(0)\left[sI_M-A\right]^{-1} .$$

Matice $\left[sI_M-A\right]^{-1}$ je analogií matice $\left[I_M-zP\right]^{-1}$, která byla použita při analýze stacionárního rozdělení stavů diskrétního Markovova řetězce.

[4] K je v tomto případě matice rozměrů MxM.

Příklad 2.1

Stanovte vektor absolutních pravděpodobností $p(t)$, má-li matice intenzit přechodu tvar $A=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -4\end{pmatrix}$.

řešení: sestrojíme inverzní matici k matici sI_M-A:

$$sI_M-A=\begin{pmatrix}s+5 & -5\\ -4 & s+4\end{pmatrix}.$$

(Její determinant je $(s+5)(s+4)-20=s^2+9s+20-20=s(s+9)$). Proto

$$(sI_M-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+9)}\begin{pmatrix}s+4 & 5\\ 4 & s+5\end{pmatrix}.$$

Dále uplatníme rozklad součinu ve jmenovateli na parciální zlomky se jmenovateli $1/s$ a $1/(s+9)$. Dostaneme

$$\frac{1}{s(s+9)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+9}$$

$A(s+9)+Bs=1$, tj. $(A+B)s+9A=1$, odkud máme

$A+B=0$, $9A=1$, s řešením $A=\frac{1}{9}$, $B=-\frac{1}{9}$

Dostáváme tedy

$$(sI_M-A)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+\frac{1}{s+9}\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}.$$

Transformované funkci $1/s$ odpovídá původní funkce rovná 1 a funkci $1/(s+9)$ odpovídá původní funkce e^{-9t}.

Vektor $p(t)$ lze tedy psát jako

$$p(t)=p(0)\left[1\cdot\begin{pmatrix}4/9 & 5/9\\ 4/9 & 5/9\end{pmatrix}+e^{-9t}\begin{pmatrix}5/9 & -5/9\\ -4/9 & 4/9\end{pmatrix}\right].$$

Odtud je patrné, že se analyzovaný systém ustálí ve stacionární situaci (dané vektorem $a=(4/9 \;\; 5/9)$, přičemž rychlost směřování k tomuto ustálenému stavu je úměrná výrazu e^{-9t} [5]

[5] Význam druhého členu postupně odezní, protože zřejmě $\lim_{t\to\infty} e^{-9t}B=0$ pro matici B s konečně velkými prvky.