P1- Základní pojmy z oblasti Markovových řetězců

1.1 Základní pojmy – matice pravděpodobností přechodu

Markovovy řetězce jsou nejjednodušším typem procesů Markovova typu; předpokládá se u nich diskrétnost času i stavů. Uplatňují se při popisu systémů, které se mohou nacházet v jednom z konečného, popřípadě v jednom z nekonečného, ale spočetného[1] počtu stavů.

Předpokládáme, že máme celkem M stavů (počet může být konečný nebo spočetný) **a že diskrétní čas uvažujeme od okamžiku „0“.**

Chování takového systému (v nějakém **časovém okamžiku** $t = 0,1,2,\ldots$ **) je určeno**

1. ***vektorem*** *absolutních tj. nepodmíněných* ***pravděpodobností*** v určitém okamžiku

$$P(t) = [p_1(t), p_2(t), \ldots, p_M(t)] \quad \text{pro} \quad t = 0,1,2,\ldots$$

2. ***maticí pravděpodobností přechodu*** (z jednoho stavu do jiného, popř. pravděpodobnosti setrvání v témže stavu)

$$P(t) = \{ p_{ij}(t) \} \text{ pro } t = 0,1,2,\ldots \,,\ i,j = 1,2,\ldots,M$$

Poznámka 1

Vzhledem k tomu, že se jedná o pravděpodobnosti, musí $p_{ij}(t)$ splňovat podmínky

$$p_{ij}(t) \geq 0 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(t) = 1,$$

což znamená, že matice pravděpodobností přechodu **P(t)** má nezáporné prvky a jedničkové řádkové součty[2].

Přechod systému ve dvou po sobě následujících okamžicích lze popsat tímto základním schématem:

$$p(t+1) = p(t).P \,,$$

resp. mezi dvěma (počátečním a aktuálním) **časovými okamžiky:**

(1.1) $$p(t+1) = p(t).P = p(t-1).P^2 = \ldots = p(0).P^{t+1} \,,$$

Pro přechod od prvního („0“) ke druhému („1“) časovému okamžiku to znamená vyjádření

(1.2) $$p(1) = p(0).P \,,$$

Pro jednotlivé stavy pro přechod mezi prvními dvěma obdobími zřejmě **platí podle (1.2) :**

$$p_j(1) = p_1(0).p_{1j} + p_2(0).p_{2j} + p_3(0).p_{3j} + \ldots + p_M(0).p_{Mj} = \sum_{i=1}^{M} p_i(0).p_{ij}{}^{3} \,,$$

---

[1] Spočetným počtem rozumíme nekonečný počet, jehož velikost (mohutnost) je rovnocenná (ekvivalentní) nekonečnému počtu přirozených čísel. Pozn.: Množina racionálních čísel je rovněž spočetná, množina iracionálních nebo množina reálných čísel jsou „o mnoho větší“, tedy nespočetné.

[2] Nepřipouští se tedy neurčitost ve smyslu toho, že by nebylo určeno, kam (resp.s jakou pravděpodobností) se systém může v následujícím časovém okamžiku dostat.

což rozepsáno po jednotlivých stavech dává tuto soustavu vztahů

$$p_1(1) = p_1(0).p_{11} + p_2(0).p_{21} + p_3(0).p_{31} + ... + p_M(0).p_{M1} = \sum_{j=1}^{M} p_j(0).p_{j1}$$

$$p_2(1) = p_1(0).p_{12} + p_2(0).p_{22} + p_3(0).p_{32} + ... + p_M(0).p_{M2} = \sum_{j=1}^{M} p_j(0).p_{j2}$$

....

$$p_M(1) = p_1(0).p_{1M} + p_2(0).p_{2M} + p_3(0).p_{3M} + ... + p_M(0).p_{MM} = \sum_{j=1}^{M} p_j(0).p_{jM}$$

Pro přechod od t-tého k t+1-mu časovému okamžiku znamená obdobně vyjádření (1.1) soustavu n vztahů :

$$p_1(t+1) = p_1(t).p_{11} + p_2(t).p_{21} + p_3(t).p_{31} + ... + p_M(t).p_{M1} = \sum_{j=1}^{M} p_j(t).p_{j1}$$

$$p_2(t+1) = p_1(t).p_{12} + p_2(t).p_{22} + p_3(t).p_{32} + ... + p_M(t).p_{M2} = \sum_{j=1}^{M} p_j(t).p_{j2}$$

....

$$p_M(t+1) = p_1(t).p_{1M} + p_2(t).p_{2M} + p_3(t).p_{3M} + ... + p_M(t).p_{MM} = \sum_{j=1}^{M} p_j(t).p_{jM}$$

Vhodnou souhrnnou reprezentací všech pravděpodobností přechodu po 1 kroku $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$ je maticová forma, při níž matici P zapíšeme jako

(1.3)
$$\begin{array}{cc} \text{stav} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & .... & M \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{pro} \quad i, j = 0,1,2,....,M,....$$

Protože p_{ij} jsou pravděpodobnosti, musí být splněny vlastnosti:

(1.4A) $$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro všechna } i, j$$

(1.4B) $$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1 \quad \text{pro všechna } i, j$$

S ohledem na platnost (1.4A), (1.4B), má tedy matice P nezáporné prvky, přičemž součty prvků v každém jejím řádku jsou rovny 1.[4]

---

[3] Tím je vyčerpávajícím způsobem popsáno, odkud lze v nejširším možném případě (tedy ze všech možných M stavů) do stavu „j“ přejít.

[4] Pro součty po sloupcích to neplatí, protože ne do každého stavu se musíme do 1 kroku dostat.

1.2 Definice Markovova řetězce a souvisejících pojmů

Předpoklady týkající se sdruženého rozdělení M-rozměrných náhodných vektorů $X_0, X_1, X_2 ......$ jsou nutné k tomu, abychom mohli získat užitečné výsledky. Jeden ze základních předpokladů, který umožňuje rozvinout analytické nástroje, je ten, že stochastický proces je *markovský*, tzn., že má následující klíčovou vlastnost:

Definice 1

Stochastický proces $\{X_t\}$ se nazývá markovský [Markovian process], jestliže platí tzv. markovská vlastnost

(1.3) $$P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

pro $t = 0,1,2,...$ a pro každou posloupnost stavů $i, j, k_0, k_1, k_2, ..., k_{t-1}$

Markovská vlastnost je charakteristická tím, že podmíněná pravděpodobnost jakékoliv budoucí události za podmínky, že byly dány všechny minulé události a současný stav, je nezávislá na všech těchto minulých událostech a závisí pouze na stavu procesu v současnosti.

Definice 2

Podmíněnou pravděpodobnost $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$ nazveme *pravděpodobností přechodu* [transition probability]

Definice 3

Jestliže platí $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\}$ pro všechna $t = 0,1,2,...$, pak říkáme, že tyto jednokrokové pravděpodobnosti jsou stacionární [stationary] pro všechna $t = 0,1,2,...$. Takže pokud máme stacionární pravděpodobnosti přechodu, znamená to, že se tyto pravděpodobnosti v průběhu času nemění.

Podmíněné pravděpodobnosti sdělující, že *„v čase t+n je systém ve stavu j, jestliže byl předtím v čase t ve stavu i“* jsou obvykle značeny $p_{ij}^{(n)}$[5] a jsou nazývány pravděpodobnosti přechodu po n krocích. Takže $p_{ij}^{(n)}$ je právě podmíněná prst, že náhodná proměnná X, vycházeje ze stavu i, bude po n krocích právě ve stavu j (po n časových jednotkách).

Protože $p_{ij}^{(n)}$ jsou podmíněné pravděpodobnosti, musí rovněž splňovat podmínky:

(1.4A) $$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \text{pro všechna } i, j \text{ a pro } n = 0,1,2,.....$$

(1.4B) $$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{pro všechna } i, j \text{ a pro } n = 0,1,2,.....$$

---

[5] Tyto podmíněné pravděpodobnosti jsou v případě stacionarity procesu shodné s podmíněnými pravděpodobnostmi, že *„v čase n je systém ve stavu j, jestliže byl předtím v čase 0 ve stavu i“*

Vhodnou souhrnnou **reprezentací** všech **pravděpodobností přechodu po n krocích je opět maticová forma – matice pravděpodobností přechodu po n krocích**

$$\begin{array}{c} \text{stav} \quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad \ldots\ldots \quad M \\ P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \ldots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \ldots & p_{1M}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \ldots & p_{MM}^{(n)} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{pro } n = 0,1,2,\ldots.. \tag{1.5}$$

Každý řádek této matice vyjadřuje rozdělení pravděpodobností stavů, kam se dá ze stavu vyjádřeného tímto řádkem po *n* krocích dostat.

Každý sloupec této matice vyjadřuje rozdělení pravděpodobností stavů, odkud se dá do stavu vyjádřeného tímto sloupcem po *n* krocích dostat.

S ohledem na platnost (1.4A), (1.4B), má matice $P^{(n)}$ nezáporné prvky, přičemž dále součty prvků v každém jejím řádku jsou rovny 1.[6]

Definice 4

Stochastický proces $\{X_t\}$, $t = 0,1,2,..$ se nazývá konečný Markovův řetězec (= *řetězec s konečným počtem stavů*), jestliže má následující vlastnosti:

1. **Počet stavů (M) je konečný.**
2. **Náhodný proces má markovskou vlastnost (1.3)**
3. **Jsou definovány stacionární pravděpodobnosti $p_{ij}(t,t+1)$ ve smyslu definice 3**
4. **Je dán vektor počátečních pravděpodobností $P\{X_0 = i\}$ pro všechna i.**

Tvrzení tato **definice 4 Markovova řetězce** (ne nutně stacionárního)

$$p_{ij}(t,t+1) = \Pr\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

a stav systému v čase 0 X_0 (resp. rozdělení pravděpodobnosti v tomto stavu) **úplným způsobem popisují trajektorii Markovova procesu:**

ověření:

Označme $p_i = \Pr\{X_0 = i\}$. K důkazu bude postačující ukázat, jak spočíst pomocí matice $p_{ij}(t,t+1)$ a vektoru $P\{X_0 = i\}$ všechny veličiny

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_t = i_t\} \tag{1.6}$$

tzn. ukázat, jak mohou být za předpokladů Definice 4 získány libovolné pravděpodobnosti obsahující posloupnosti stavů $X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ na základě axiomu pro rozklad celkové pravděpodobnosti.

---

[6] **Pro součty po sloupcích to neplatí, protože ne do každého stavu se musíme do n krocích dostat –** viz dále podrobněji při zavedení klasifikaci stavů.

Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme pro (1.6) vyjádření

(1.7)
$$\begin{gathered}\Pr\{X_t = i_t | X_0 = í_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{t-1} = i_{t-1}\}. \\ \Pr\{X_0 = í_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{t-1} = i_{t-1}\}.\end{gathered}$$

Nyní podle definice Markovské vlastnosti (1.3) procesu

(1.8)
$$\begin{gathered}\Pr\{X_t = i_t | X_0 = í_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{t-1} = i_{t-1}\} = \\ \Pr\{X_t = í_t | X_{t-1} = i_{t-1}\} = P_{i_{t-1}, i_t}\end{gathered}$$

Substituujeme-li (1.8) do (1.7), dostaneme

$$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_t = i_t\} = P_{i_{t-1}, i_t} . \Pr\{X_0 = í_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{t-1} = i_{t-1}\}$$

Druhý člen pravé strany vyjadřuje pravděpodobnost sdruženého jevu $\{X_0 = í_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{t-1} = i_{t-1}\}$. Postupujeme-li dále indukcí stejně jako pro pravděpodobnost jevu $\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_t = i_t\}$, dostaneme

(1.9) $$\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_t = i_t\} = P_{i_{t-1}, i_t} . P_{i_{t-2}, i_{t-1}} . P_{i_{t-3}, i_{t-2}} .... P_{i_0, i_1} . p_{i_0} \quad . \quad \square \,.$$

1.3 Příklady - prostorově homogenní Markovovy řetězce

Nechť ξ označuje diskrétní náhodnou veličinu, jejíž možné hodnoty jsou celá nezáporná čísla. Označme $\Pr\{\xi = i\} = a_i$, přičemž $a_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Nechť náhodné vektory $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t, ...$ reprezentují *nezávislá* pozorování veličiny ξ. Popíšeme nyní dva různé Markovovy řetězce, které mají souvislost s posloupností veličin $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t, ...$.

Příklad 1A Uvažujme proces $X_t, t = 0,1,2,.....$, definovaný jako $X_t = \xi_t$, s počáteční předepsanou hodnotou $X_0 = \xi_0$. Jeho markovská matice pravděpodobností přechodu po 1 kroku má tvar

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & .... \\ a_0 & a_1 & a_2 & ... \\ a_0 & a_1 & a_2 & .... \\ .... & .... & ...... & ..... \end{pmatrix}$$

Každý řádek (které jsou navzájem stejné) zde prostě vyjadřuje skutečnost, že náhodná veličina X_{t+1} je nezávislá na náhodná veličině X_t,

Příklad 1B Jiná důležitá třída Markovových řetězců pochází z úvah o postupných dílčích součtech η_t sestavených z veličin ξ_t, neboli o veličinách

(1.10) $$\eta_t = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_t \qquad t = 1,2,....,$$

s dodefinováním počátku $\eta_0 = 0$.

Na proces $X_t = \eta_t$ můžeme nahlížet jako na Markovův řetězec. Můžeme snadno spočíst jeho matici pravděpodobností přechodu

$$\Pr\{X_{t+1} = j | X_t = i\} =$$

$$\Pr\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ...\xi_{t+1} = j | \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ...\xi_t = i\} = \Pr\{\xi_{t+1} = j - i\}$$

$$= a_{j-i} \qquad \text{pro } j \geq i$$

$$= 0 \qquad \text{pro } j < i,$$

Zde jsme využili předpokládanou nezávislost jednotlivých ξ_t. Schématicky vyjádřeno pomocí matice pravděpodobností přechodu součtů η_t:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & .... \\ 0 & a_0 & a_1 & ... \\ 0 & 0 & a_0 & .... \\ .... & .... & ...... & ..... \end{pmatrix}$$

Příklad 1C Kdybychom připustili, že hodnoty náhodné proměnné ξ_i mohou být jak kladná, tak záporná celá čísla, pak možné hodnoty η_t pro každé *t* budou obsaženy v rámci množiny všech celých čísel. Místo konvenčního očíslování stavů pomocí přirozených čísl, je zde výhodnější ztotožnit stavový prostor s množinou všech celých čísel, protože matice pravděpodobností přechodu se vyjádří v symetričtějším tvaru:

$$P = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ \cdots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .... \end{pmatrix} \cdots$$