P10 – Spojité MP – Procesy množení a zániku

2.5 Procesy množení a zániku [birth-and-death processes]

Značné množství problémů (mj. řešených v modelech hromadné obsluhy) lze efektivně analyzovat pomocí procesů množení a zániku. Narození je představováno např. příchodem zákazníků do obchodu, zánik/úmrtí jeho opuštění poté, co nakoupil zboží.

Zavedeme některá označení a výchozí předpoklady. Narození a zánik/úmrtí v populaci jsou nezávislé jevy. Pravděpodobnost, že v k-členné populaci dojde během intervalu $(t, t+\Delta t)$ je $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$, tj.

P {1 narození během doby $(t, t+\Delta t)$, pokud populace má k členů} = $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$

Dále:

P {0 narození během doby $(t, t+\Delta t)$,pokud populace má k členů} = $1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$

P {1 zániku během doby $(t, t+\Delta t)$, pokud populace má k členů} = $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$

P {0 zániku během doby $(t, t+\Delta t)$,pokud populace má k členů} = $1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$.

Je zřejmé, že v populaci, která má 0 členů, nemůže dojít k úmrtí, takže položíme $\mu_0 = 0$, nad druhé straně ale předpokládáme, že v nulové populaci může dojít ke zrození, takže $\lambda_0 \geq 0$. Jak je bezprostředně patrné z předchozího, jsou pravděpodobnosti narození a úmrtí více jedinců populace během intervalu $(t, t+\Delta t)$ při $\Delta t \to 0$ zanedbatelné, protože jsou rovny $o(\Delta t)$.

Označme $p_k(t)$ nepodmíněnou pravděpodobnost, že populace má v okamžiku t právě k členů $k = 0,1,2,3,\ldots$. Je zřejmé, že platí vztah $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$.

Při odvození vztahů pro $p_k(t+\Delta t)$ budeme vycházet z následujících úvah:

Populace bude mít v okamžiku $t+\Delta t$ velikost $k, k \geq 1$ právě tehdy, když nastane právě jen z těchto disjunktních jevů:

a) populace má v okamžiku t velikost k a během Δt nedojde k žádné změně.

b) populace má v okamžiku t velikost k a během Δt dojde k jednomu narození a jednomu zániku.

c) populace má v okamžiku t velikost $k-1$ a během Δt dojde k jednomu narození a žádnému zániku.

d) populace má v okamžiku t velikost $k+1$ a během Δt nedojde k žádnému narození a jednomu zániku.

Pro případ $k=0$ budeme uvažovat (jen) dvě možnosti:

a) populace má v okamžiku t velikost 0 a během Δt nedojde k žádnému narození.

b) populace má v okamžiku t velikost 1 a během Δt nedojde k žádnému narození ale dojde k jednomu zániku.

Matice intenzit přechodu A:

(2.40)

$$\begin{array}{rccccc}
\text{Číslování stavů:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
A= & \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & 0 \\
0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \lambda_3 \\
0 & 0 & 0 & \mu_4 & -\lambda_4-\mu_4
\end{pmatrix}}
\end{array}$$

Matice pravděpodobností přechodu P takto bude mít tvar

(2.41)

$$\begin{array}{rccccc}
\text{Číslování stavů:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
P= & \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix}
1-\lambda_0\Delta t & \lambda_0\Delta t & 0 & 0 & 0 \\
\mu_1\Delta t & 1-(\lambda_1+\mu_1)\Delta t & \lambda_1\Delta t & 0 & 0 \\
0 & \mu_2\Delta t & 1-(\lambda_2+\mu_2)\Delta t & \lambda_2\Delta t & 0 \\
0 & 0 & \mu_3\Delta t & 1-(\lambda_3+\mu_3)\Delta t & \lambda_3\Delta t \\
0 & 0 & 0 & \mu_4\Delta t & 1-(\lambda_4+\mu_4)\Delta t
\end{pmatrix}}
\end{array}$$

Za těchto předpokladů můžeme vyjádřit hodnoty $p_k(t+\Delta t)$ a $p_0(t+\Delta t)$ ve formě součtů pravděpodobností příslušných jevů takto:

(2.42AB)

$p_k(t+\Delta t)=[1-\lambda_k\Delta t-\mu_k\Delta t]p_k(t)+[\lambda_{k-1}\Delta t]p_{k-1}(t)+[\mu_{k+1}\Delta t]p_{k+1}(t)$ pro $k\geq 1$

$p_0(t+\Delta t)=[1-\lambda_0\Delta t]p_0(t)+[\mu_1\Delta t]p_1(t)$ pro $k=0$.

Po úpravách (převedení $p_k(t)$ na pravou stranu a vydělení Δt) dostaneme:

(2.43A) $$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=-(\lambda_k+\mu_k)p_k(t)+\mu_{k+1}p_{k+1}(t)+\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)$$

Jak patrno, levá strana v limitě pro $\Delta t\to 0$ dává derivaci $p_k(t)$:

(2.44A) $$p_k'(t)=-(\lambda_k+\mu_k)p_k(t)+\mu_{k+1}p_{k+1}(t)+\lambda_{k-1}(t)p_{k-1}(t)$$

Podobně máme v případě nultého stavu:

(2.43B) $$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t)$$ neboli v limitě

(2.44B) $$p_0'(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t)$$

Soustava těchto rovnic představuje popis dynamiky procesu množení a zániku z pravděpodobnostní stránky. Pro tento proces je možné nalézt též limitní řešení.

Budeme-li předpokládat, že $\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$, pak derivace $p_k(t)$ po dostatečně dlouhém čase t jsou nulové a soustava přechází v soustavu diferenčních rovnic pro p_k.

(2.45A) $$0 = -(\lambda_k + \mu_k)p_k + \mu_{k+1}p_{k+1} + \lambda_{k-1}p_{k-1}$$

(2.45B) $$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

Veličinu p_k můžeme interpretovat jako pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném okamžiku (dostatečně vzdáleném od počátku procesu) má uvažovaná populace právě k členů.

Soustavu (2.45AB) můžeme upravit do vhodnějšího výpočetního tvaru:

(2.46A) $$p_{k+1} = \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_{k+1}} p_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} p_{k-1} \text{ pro } k \geq 1 \text{, resp.}$$

(2.46B) $$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \text{ pro } k = 0$$

Soustavu rovnic (2.46A) můžeme řešit postupně: Z (2.46A) při *k=0* dostáváme:

(2.47) $$p_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} p_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$ [1]

Pro *k=2* dostáváme vztah

$$p_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} p_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} p_1 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

Metodou úplné indukce dospějeme k obecnému tvaru

(2.48) $$p_k = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\dots\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\mu_3\mu_2\mu_1} p_0 .$$

Kromě vztahu (2.48) pak musí pro stacionární pravděpodobnosti p_k platit vztah

(2.49) $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{, tj. } 1 = p_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\dots\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\mu_3\mu_2\mu_1} \right] .$$

Pravděpodobnost p_0 můžeme tedy vyjádřit jako

(2.50) $$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\dots\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\mu_3\mu_2\mu_1} \right]^{-1} .$$

[1] Využili jsme přitom i vztah (2.46B).