P11 – Kolmogorovovy rovnice

2.6 – Chapman-Kolmogorovovy rovnice pro spojité MP

Rozdělení pravděpodobnosti spojitého Markovova procesu je určeno počátečním rozdělením a pravděpodobnostmi přechodu. Zapišme pro množinu časových okamžiků $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ a konečnou množinu stavů $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \in I$

(2.51)
$$P(X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2, \ldots, X_{t_n}=i_n) = \sum_{j \in I} P(X_0=j)\, P(X_{t_1}=i_1 \mid X_0=j) \cdot P(X_{t_2}=i_2 \mid X_0=j, X_{t_1}=i_1) \ldots P(X_{t_n}=i_n \mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) =$$
$$\sum_{j \in I} p_j(0)\, p_{j i_1}(0,t_1)\, p_{i_1 i_2}(t_1,t_2)\, p_{i_2 i_3}(t_2,t_3) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},t_n) =$$
$$p_{i_1}(t_1)\, p_{i_1 i_2}(t_1,t_2)\, p_{i_2 i_3}(t_2,t_3) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},t_n)$$

kde jsme označili vektor absolutních pravděpodobností $p_k(t)=P(X_t=k)$

Tvrzení 1 Chapman-Kolmogorovovy rovnice pro pravděpodobnosti přechodu

(2.52A)
$$p_{ik}(r,t) = \sum_{j \in I} p_{ij}(r,s)\, p_{jk}(s,t) \qquad i,k \in I \quad \text{pro} \quad 0 \le r \le s \le t < \infty$$

ověření:
$$p_{ik}(r,t) = \sum_{j \in I} P\left(X_s=j, X_t=k \mid X_r=i\right) =$$
$$\sum_{j \in I} P\left(X_s=j \mid X_r=i\right) P\left(X_t=k \mid X_r=i, X_s=j\right) = \sum_{j \in I} p_{ij}(r,s)\, p_{jk}(s,t)$$

Zapíšeme-li matici pravděpodobností přechodu jako

$$P(s,t) = \left\| p_{ik}(s,t) \right\|_{i,k \in I},$$

můžeme Chapman-Kolmogorovovy rovnice psát ve tvaru

(2.52B)
$$P(r,t) = P(r,s)\, P(s,t) \qquad 0 \le r \le s \le t < \infty$$

Dále přijměme následující předpoklady:

Předpoklad A. Vztah mezi pravděpodobnostmi a intenzitami přechodu:

Funkce $p_{ij}(s,t)\; i,j \in I$ jsou spojitými funkcemi $s,t,\; 0 \le s \le t < \infty$. Platí

(2.53A)
$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(t,t+h)}{h} = q_i(t) \qquad i \in I, \qquad \text{(intenzita setrvání)}$$

(2.53B)
$$\lim_{h \to 0+} \frac{p_{ik}(t,t+h)}{h} = q_{ik}(t) \qquad i,k \in I, i \ne k \qquad \text{(intenzita přechodu)}$$

lokálně stejnoměrně v $t \in \langle 0, \infty)$.

Předpoklad B Platí

(2.54) $$\sum_{k\neq i} q_{ik}(t)=q_i(t) \quad i\in I, t\geq 0$$

Platnost (2.54) znamená možnost záměny limity a sumace v rovnosti

(2.55) $$\sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(t,t+h)}{h}=\frac{1-p_{ii}(t,t+h)}{h} \quad i\in I,$$

a je proto vždy splněno, pokud I je konečná množina.

Poznámky:

a) Pro Poissonův proces s konstantní intenzitou q máme

$$q_i(t)=q_{i,i+1}(t)=q \quad q_{ik}(t)=0 \quad k\neq i, k\neq i+1$$

b) Pro ústřednu s nekonečným počtem linek máme

$$q_i(t)=q+ir, \; q_{i,i-1}(t)=ir, \; q_{i,i+1}(t)=q, \; q_{ik}(t)=0, \text{ pokud } |k-i|>1$$

(k je počet obsazených linek, q je konstanta udávající intenzitu příchodu nového hovoru, r je konstanta udávající intenzitu ukončení hovoru) .

Z předpokladu lokální stejnoměrné konvergence v (2.51),(2.52) vzhledem k *t* plyne rovněž soustava „levostranných derivací“

(2.56A) $$\lim_{h\to 0+} \frac{1-p_{ii}(t,t-h)}{h}=q_i(t) \quad i\in I,$$

(2.56B) $$\lim_{h\to 0+} \frac{p_{ik}(t-h,t)}{h}=q_{ik}(t) \quad i,k\in I, i\neq k$$,lokálně stejnoměrně v $t\in\langle 0,\infty)$.

2.7 – Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro spojité MP

Tvrzení 1 **Kolmogorovova retrospektivní soustava rovnic**

Za předpokladů A a B platí pro všechna $k\in I$:

(2.57A) $$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial s}=q_i(s)p_{ik}(s,t)-\sum_{j\neq i}q_{ij}(s)p_{jk}(s,t) \qquad i\in I,\ 0<s\le t<\infty$$

(2.57B) $$p_{ik}(t,t)=\delta_{ik} \qquad i\in I,\ 0\le t<\infty$$

Ověření: **Použijeme Tvrzení 1 Chapman-Kolmogorovovu rovnice: podle (2.51A)**

$$p_{ik}(s-h,t)=\sum_j p_{ij}(s-h,s)p_{jk}(s,t)\ ,\quad h>0\ ,$$ **z něhož dostaneme:**

(2.58)
$$h^{-1}(p_{ik}(s-h,t)-p_{ik}(s,t))=h^{-1}(p_{ii}(s-h,s)-1)p_{ik}(s,t)+h^{-1}\sum_{j\neq i}p_{ij}(s-h,s)p_{jk}(s,t)$$

Dále máme podle definice intenzit

(2.59) $$\lim_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(s-h,s)}{h}=q_{ij}(s) \qquad i\neq j$$

Tento limitní přechod lze v provést za sumačním znaménkem, neboť pro $n\ge 1$ máme pro I nekonečně velké odhad

$$0\le h^{-1}\sum_{j=n+1}^{\infty}p_{ij}(s-h,s)p_{jk}(s,t)\le h^{-1}\sum_{j=n+1}^{\infty}p_{ij}(s-h,s)=h^{-1}(1-p_{ii}(s-h,s)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_{ij}(s-h,s))$$

Pravá strana při neomezeně se zmenšujícím h konverguje k výrazu

(2.60) $$q_i(s)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_{ij}(s)\ .$$

Z předpokladu B plyne, že poslední výraz lze učinit libovolně malým, volíme-li n dost velké. Limitním přechodem pro $h\to 0+$ dostáváme nalevo v (2.58) derivaci $\frac{\partial}{\partial s}$ a celkem vztah (2.57), neboť spojitá derivace zleva je oboustrannou derivací. Podmínka (2.57B) je zřejmá. □ .

K vyvození druhé soustavy Kolmogorovových rovnic potřebujeme další podmínku:

Předpoklad C

Při pevném k je limitní přechod v (2.53B) stejnoměrný vzhledem k $i\in I$.

Tvrzení 2 **Kolmogorovova prospektivní soustava rovnic**

Za předpokladů A, B a C platí pro všechna $l \in I$:

(2.60) $$\frac{\partial p_{lk}(s,t)}{\partial t} = -p_{lk}(s,t)\,q_k(t) + \sum_{j \neq k} p_{lj}(s,t)\,q_{jk}(t) \qquad k \in I,\ 0 \le s \le t < \infty\,.$$

Důkaz:

Z rovnosti

$$p_{lk}(s,t+h) = \sum_j p_{lj}(s,t)\,p_{jk}(t,t+h)\,,\quad h > 0$$ plyne

$$h^{-1}\big(p_{lk}(s,t+h) - p_{lk}(s,t)\big) = p_{lk}(s,t)\,h^{-1}\big(p_{kk}(t,t+h) - 1\big) + h^{-1}\sum_{j \neq k} p_{lj}(s,t)\,p_{jk}(t,t+h)$$

Limitní přechod pro $h \to 0+$ lze s ohledem na Předpoklad C provést za znamením sumace. Z (53A) a (53B) tak dostáváme (60). □ .

Použijeme-li notace $Q(t) = \|q_{ik}(t)\|_{i,k \in I}$ s intenzitami přechodu $q_{ik}(t)$ a připomeneme-li, že klademe $q_{ii}(t) = -q_i(t)$, můžeme Kolmogorovovy diferenciální rovnice psát v maticovém zápisu:

prospektivní soustava rovnic

(2.61) $$\frac{\partial P(s,t)}{\partial s} = -Q(s)P(s,t) \qquad s \le t\,,\quad P(t,t) = I$$

retrospektivní soustava rovnic

(2.62) $$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = P(s,t)\,Q(t) \qquad s \le t\,,\quad P(s,s) = I$$, kde I je jednotková matice .

Homogenní Markovovy procesy mají konstantní přechodové intenzity, protože jejich pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na rozdílu časových argumentů.

$$Q(t) = Q = \|q_{ik}\|_{i,k \in I}$$

Kolmogorovovy rovnice pro $P(t) = P(s,s+t)$ jsou

(2.63A,B) $$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t) \qquad \frac{dP(t)}{dt} = P(t)\,Q \qquad P(0) = I$$

Poznámka: K vysvětlení změny znaménka v prvé soustavě – (2.61)- je třeba si uvědomit, že zde máme $P(s,t) = P(t-s)$.