

## P 12 – základy teorie hromadné obsluhy (front)

### 3.1 Základní prvky a charakteristiky systémů/modelů hromadné obsluhy

Při popisu chování MHO (SHO) matematickým popisem je třeba vyjít z analýzy jeho chování. V první etapě je především nutno zkoumat příčinné oboustranné vazby základních prvků systému, tj. specifikovat vstupní proud požadavků, způsob a mechanismus jejich obsluhy, včetně počtu a uspořádání obsluhujících zařízení (tzv. **režim obsluhy**), disciplínu čekání ve frontě, dále pořadí, v němž vstupují požadavky do zařízení obsluhy (tzv. **režim fronty**) a charakter dob trvání obsluhy. Na základě logické analýzy a klasifikace zkoumaného SHO lze teprve formulovat odpovídající matematicko-ekonomický model.

Důležitou fází modelování MHO je statistická analýza jeho jednotlivých prvků. Spočívá v získání a zpracování adekvátních dat charakterizujících např. *rozdělení počtu požadavků vyžadujících obsluhu za určitý časový interval*, popř. *rozdělení dob mezi vstupujícími požadavky* nebo *rozdělení dob trvání obsluhy*. Zároveň je nutno (nebo aspoň patřičně) statisticky testovat výchozí hypotézy o charakteru rozdělené odpovídajících veličin předpoklady o režimu fungování zkoumaného systému.

#### Vstupní proud požadavků

Vlastnosti a intenzita vstupního proudu mají rozhodující vliv na činnost SHO a na jeho základní charakteristiky. Vstupní proud požadavků lze obecně charakterizovat jako stochastický proces, neboť požadavky přicházejí do systému obsluhy obvykle v náhodných okamžicích, takže délky intervalů mezi nimi představují hodnoty spojitých náhodných veličin.

Empirické údaje získané ze systému obsluhy např. na základě časového snímku vstupního proudu vyhovují velmi často *předpokladu Poissonova rozdělení počtu vstupních požadavků za určitý interval*. Tomuto rozdělení počtu požadavků odpovídá *exponenciální rozdělení intervalů mezi jejich příchody*, takže **modely s Poissonovým vstupním proudem se také nazývají exponenciální systémy**.

V praxi s lze však setkat i s jinými zákony rozdělení vstupního proudu, jako jsou např. *Erlangovo rozdělení*, *logaritmicko.-normální rozdělení*, *hyperexponenciální rozdělení*. Řešení modelů SHO s jiným než Poissonovským proudem vstupních požadavků je však analyticky obtížnější.

Je-li zdroj, z něhož přicházejí požadavky do SHO omezený (*konečný*), jde o uzavřený systém, v opačném případě jde o otevřený systém. Zdroj požadavků po pokládá v praktických úlohách za neomezený i v případě, že nelze s jistotou určit, kolik požadavků si může vyžádat obsluhu.

## Doba trvání obsluhy

Obdobně jako u vstupního proudu je třeba při modelování SHO popsat i dobu trvání obsluhy jednotlivých požadavků. Dobu obsluhy ovlivňuje řada náhodných faktorů, takže ji lze také pokládat za náhodnou veličinu. **Empiricky zjištěná rozdělení dob trvání obsluhy se obvykle řídí také exponenciálním zákonem rozdělení.**

## Disciplína čekání ve frontě

Podle trpělivosti požadavků vyžadujících obsluhu se dělí SHO na **systemy bez čekání a systemy s čekáním**. V prvním případě požadavek do systému, jehož všechna zařízení obsluhy jsou obsazena, nevstoupí a na obsluhu rezignuje. V systému druhého typu každý vstupující požadavek buď trpělivě čeká, takže opustí systém až po ukončení obsluhy nebo aspoň nějakou dobu čeká, a teprve pokud není v této době obsloužen, opouští systém.

Mezi systémy obsluhy s čekáním patří jednak **systemy s neomezenou délkou fronty, jednak systemy s omezenou délkou fronty (systému)**. Je-li počet míst ve frontě a v systému omezen, patří při jejich plném obsazení není již dalším požadavkům přicházejícím do fronty obsluha poskytnuta. Při neomezené délce fronty jsou naopak všechny požadavky, které přicházejí do systém a jsou ochotny čekat, obslouženy.

**SHO, ve kterých nejsou z různých důvodů obsloužena všechny přicházející požadavky, se nazývají systemy se ztrátami**. Jde tudíž o systémy bez čekání a o systémy s čekáním avšak s omezenou kapacitou nebo s netrpělivostí požadavků během čekání ve frontě.

## Režim fronty

Způsob, jakým se požadavky vstupující do systému řadí do fronty, popř. pořadí, v němž jsou čekající požadavky obsluhovány, charakterizují tzv. **režim fronty**. Správně volený režim fronty je mj. významným faktorem ovlivňujícím efektivnost obsluhy.

### **Systemy s uspořádanou frontou:**

FIFO : obsluha v pořadí podle pořadí příchodu do systému

LIFO : obsluha v obráceném pořadí než je pořadí příchodu do systému

### **Systemy s prioritami:**

PRI: obsluha v pořadí podle stanovených priorit

### **Systemy s neuspořádanou frontou**

SIRO: obsluha v náhodném bez předem daných pravidel (selection in random order)

Jsou-li jednotlivé druhy priorit známy před vstupem požadavků do systému, jde o **apriorní priority**. Přiřazuje-li priority samotný systém v průběhu čekání požadavků na obsluhu, jde o **aposteriorní priority**.

V některých systémech s prioritami se dále rozlišují

**Priority absolutní** – znamená to, že preferovaný požadavek je okamžitě obslužen i za cenu případného přerušování již probíhající obsluhy jiného požadavku s nižší prioritou.

**Priority relativní** – zajišťují zvýhodněným požadavkům přednostní obsluhu před požadavky s nižší prioritou nebo bez priority. Požadavek s určitým stupněm relativní priority je při všech obsazených zařízeních obslužen, jakmile se uvolní některé místo v obsluze.

### Počet front

Z hlediska počtu front, které se v systému vytvářejí, rozlišujeme ještě

**systemy s jedinou frontou** pro všechna zařízení obsluhy

**systemy s více frontami**, kdy pro každé obslužné zařízení existuje zpravidla samostatná fronta. V takovýchto případech je možné během čekání na obsluhu přecházet z jedné fronty do jiné.

### Režim obsluhy

Počet a uspořádání obslužných zařízení je dalším faktorem, na kterém závisí efektivnost provozu SHO. Probíhá-li obsluha pouze v jednom obslužném zařízení, hovoříme o systému

**systemu s jednoduchou obsluhou (jednokanálový systém obsluhy)**

Lze-li obsluhovat současně několik požadavků, jde o

**system s vícenásobnou obsluhou (vícekanálový systém obsluhy)**

### Řazení kanálů obsluhy

**Paralelně řazené kanály**

**Sériově řazené kanály** – vyskytují se řidčeji, v systémech s vícefázovým neboli s Erlangovým režimem obsluhy, kde požadavky procházejí postupně několika různorodými zařízeními obsluhy.

V reálných situacích přibývají k předchozímu ještě okolnosti vyžadující specifikaci dalších individuálních rysů systému HO: měnící se trpělivost požadavků v závislosti na době čekání ve frontě, proměnlivá průměrná intenzita vstupního proudu, nestejnorodost požadavků nebo obsluhujících zařízení, skupinově vstupující požadavky apod. Stanovení základních charakteristik kvality a efektivnosti složitějších SHO analytickým způsobem je zpravidla obtížné a často je nutné přistoupit k postupům založeným na simulačních metodách.

V praktických úlohách rozlišujeme, zda je zkoumaný SHO již v provozu nebo se teprve projektuje. V prvním případě půjde o to, abychom na základě analýzy zkvalitnili fungování SHO neboli zlepšili jeho organizaci a řízení, takže např.

snížíme celkové ztráty v systému nebo zkrátíme dobu obsluhy jedné jednotky spod. V druhém případě se snažíme odhadnout s určitou prstí kvalitativní charakteristiky systému, přičemž vycházíme z různých variant jeho budoucí kapacity a z podmínek, ve kterých bude fungovat.- Zároveň je třeba zkoumat prst vzniku nežádoucích situací v SHO jako jsou např. růst fronty nebo čekací doby ve frontě nad předem stanovenou hranici.

### Klasifikace systémů hromadné obsluhy

Konkrétní SHO popsané podrobně na základě specifikace jejich základních prvků , lze klasifikovat z různých hledisek. Nejčastěji užívanými kritérii jsou charakter a typ rozdělení vstupního proudu požadavků, charakter a typ rozdělení dob obsluhy, režim a struktura obsluhy, disciplína čekání a počet míst ve frontě a režim fronty.

Základní klasifikace navržená D.G.Kendallem:

**Třímístný kód** ve formě **A/B/s**, kde označuje

**A** – rozdělení intervalů mezi příchody požadavků

**B** - označení rozdělení dob trvání obsluhy

**s** – počet paralelních zařízení obsluhy v systému.

Pro „parametry“ A, B jsou nejčastější užívané symboly tyto:

**D** – deterministické rozdělení

**M** – exponenciální rozdělení

**Ek** – Erlangovo k-fázové rozdělení

**GI** – obecné nezávislé rozdělení

**G** – obecné (nikoliv nezávislé) nezávislé rozdělení

**Nejjednodušší příklady:**

**M/M/1** - SHO s exponenciálním rozdělením intervalů mezi příchody požadavků i dob obsluhy s jedním obsluhujícím zařízením

**D/E2/1** - SHO s jednokanálovým s pravidelným (deterministickým) vstupním proudem požadavků a s dvoufázovým Erlangovým rozdělením dob trvání obsluhy.

Vedle třímístného kódu se někdy užívá i rozšířený pětímístný kód tvaru

**A/B/s/x/y** , kde navíc

**X** - označuje maximální počet míst ve frontě

**Y** - označuje velikost zdroje požadavků

**Poznámka:** Pokud je **X** nebo **Y** vynecháno, předpokládá se, že jeho hodnota je nekonečně velká.

**Erlangovo k-fázové rozdělení** má hustotu

Prst, že člověk potká infikované individuum

$$f(x, k, \lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad \text{pro } x > 0, k \text{ celé}, k \geq 1$$

$$f(x, k, \theta) = \frac{\theta^k x^{k-1} e^{-\theta x}}{(k-1)!} \quad \text{pro } x > 0, k \text{ celé}, k \geq 1, \theta = \frac{1}{\lambda}$$

Jeho zobecněním je gamma –rozdělení (pro reálná kladná k)

**Agner Krarup Erlang [1878-1929]** (dánský průkopník statistických metod v analýze v telefonních sítích)

Při modelování MHO se uplatňují ze stochastických procesů především Markovovy procesy se spojitým časem a s diskretními stavy. Zpravidla jde o poměrně jednoduché procesy, neboť přechody mezi stavy jsou dost omezené. Předpokládá se, že přechody z libovolného stavu  $S_k$  jsou možné pouze do sousedních stavů  $S_{k-1}$ ,  $S_{k+1}$ . Přechod ze stavu  $S_k$  do stavu  $S_{k+1}$  znamená příchod jednoho požadavku do systému a obdobně  $S_k$  do stavu  $S_{k-1}$  znamená odbavení požadavku v systému po skončení obsluhy.

Nachází-li se v systému obsluhy v libovolném okamžiku právě k požadavků (systém je ve stavu  $S_k$ ), pravděpodobnosti přechodů mezi sousedními stavy jsou nezávislé na čase a závisí jen na stavu  $S_k$  (jde-li o homogenní proces).