P13 - Exponenciální model jednoduché obsluhy

3.2 Exponenciální model jednoduché obsluhy

Nejprve popíšeme nejjednodušší případ, kdy rozdělení četnosti náhodných, vzájemně nezávislých náhodných veličin, tj. dob obsluhy a dob mezi příchody má charakter exponenciálního rozdělení. Jedná se o otevřený systém s jednou stanicí obsluhy. Dále budeme předpokládat, že i režim fronty je jednoduchý a že v případě nepostačující kapacity obslužného zařízení budou požadavky trpělivě čekat ve frontě na obsluhu. Odbavování se provádí ve stejném pořadí, v jakém požadavky přicházejí.

Průměrný počet požadavků, které vstupují do systému za určitý časový interval neboli intenzita příchodů označíme λ a průměrný počet požadavků (zákazníků) obsloužených za časový interval (intenzitu obsluhy) označíme μ .

Za *předpokladu Poissonova rozdělení rozložení počtu vstupujících požadavků* je možno pravděpodobnost vstupu n jednotek v intervalu T = (0,t) vyjádřit ve tvaru

(3.1) $$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

Při konstrukci modelů hromadné obsluhy je nutno vždy testovat (nejlépe např. pomocí χ^2- testů dobré shody, zda zjištěná empirická rozdělení dob mezi příchody případně dob trvání obsluhy vyhovují předpokladu *exponenciálního rozdělení* popřípadě *Poissonova rozdělení pro počet vstupujících a obsloužených požadavků.*

Předpokládejme dále, že stav systému v libovolném časovém okamžiku t, který bude jednoznačně určen číslem n udávajícím počet jednotek v systému, nezávisí kromě stavu předcházejícího na žádném z dřívějších stavů, tudíž , že proces hromadné obsluhy má charakter Markovova procesu.

Znamená-li S_n stav, kdy v systému je právě n jednotek, pak v intervalu $(t, t+\Delta t)$ se mohou uskutečnit pouze tyto přechody:

$S_0 \longrightarrow$, $S_0 \longrightarrow$, $S_1 \longrightarrow$ pro výchozí stav

$S_n \longrightarrow$, $S_n \longrightarrow$, $S_n \longrightarrow$ pro $n >$.

Uvažujeme tedy pouze možnost setrvání ve stavu nebo přechod mezi sousedními stavy. To je důsledek toho, že pravděpodobnosti přechodů, za předpokladu exponenciálního rozdělení, mezi nesousedními stavy budou nekonečně malé. To odpovídá …., že pravděpodobnosti vstupu, resp. obsluhy více než jedné jednotky v časovém intervalu Δt jsou zanedbatelné. Nepodmíněnou pravděpodobnost, že systém se v okamžiku t nachází ve stavu S_n, tzn.že n-1 požadavků čeká ve frontě a jeden je v obsluze, označíme $p_n(t)$

Je-li $\lambda\Delta t$ pravděpodobnost příchodu jednotky v intervalu $(t,t+\Delta t)$ a $\mu\Delta t$ pravděpodobnost ukončení obsluhy v intervalu $(t,t+\Delta t)$, pak po uplynutí doby Δt se změní $p_n(t)$ v pravděpodobnost $p_n(t+\Delta t)$. Soustavu pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými stavy za dobu Δt našeho systému vyjádříme pro přehlednost maticí pravděpodobností přechodu v této podobě:

$$P=\begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \lambda\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \lambda\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t \end{pmatrix}$$

Intenzitu přechodu udávají tedy veličiny λ, μ. Na úhlopříčce matice jsou výrazy odpovídající pravděpodobnostem setrvání ve stavu, vpravo od ní pak pravděpodobnosti příchodu požadavku a vlevo pravděpodobnosti ukončení obsluhy požadavku. Ostatní prvky této matice jsou nulové, neboť jiná možnost přechodu mezi nesousedními stavy prakticky není možná.

Je-li v okamžiku t vektor nepodmíněných prstí $p_n(t)$ dán výrazem

(3.2) $$p(t)=\left(p_0(t)\ p_1(t)\ p_2(t)\ldots p_n(t)\ldots\right),$$

pak po uplynutí intervalu Δt bude platit

(3.3) $$p(t+\Delta t)=p(t)\cdot P.$$

Ze vztahu(3.3) dostaneme tudíž

(3.4A) $$p_0(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)\cdot p_0(t)+\mu\Delta t\cdot p_1(t) \quad \text{pro } k=0.$$

(3.4B) $$p_k(t+\Delta t)=\left(1-(\lambda+\mu)\Delta t\right)\cdot p_k(t)+\lambda\Delta t\cdot p_{k-1}(t)+\mu\Delta t\cdot p_{k+1}(t)$$

pro $k>0$

Po úpravě (převedení $p_k(t)$ na pravou stranu a vydělení Δt) dostaneme:

(3.5A) $$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)$$

(3.5B) $$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=-(\lambda+\mu)p_k(t)+\mu p_{k+1}(t)+\lambda p_{k-1}(t)$$

Jak patrno, levá strana v limitě pro $\Delta t\to 0$ dává derivaci $p_k(t)$:

(3.6A) $$p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)$$

Podobně máme pro $k>0$

(3.6B) $$p_k'(t)=-(\lambda+\mu)p_k(t)+\mu p_{k+1}(t)+\lambda p_{k-1}(t)$$

Získáme tím soustavu n+1 lineárních homogenních diferenciálních rovnic pro pravděpodobnosti $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots, p_k(t)$. Tato soustava se někdy nazývá *Erlangova soustava*. Jejím řešením je možné určit pravděpodobnosti $p_k(t)$ jako funkce parametrů λ, μ.

I když integrování této soustavy je v principu možné, může být spojeno s nemalými výpočtovými obtížemi. Z důvodu zjednodušení výpočtů budeme proto zkoumat, zda se uvažovaný systém hromadné obsluhy po nějaké dost dlouhé době nestabilizuje, tj. přestane být závislý na čase t a na výchozích podmínkách.

Podmínkou stabilizace zkoumaného systému je platnost vztahu

$$\lim_{t \to \infty} p_k(t) = p_k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

přičemž aspoň jedno z p_k musí být různé od nuly.

Protože Markovův řetězec odpovídající matici pravděpodobností přechodu P je ergodický (a neperiodický), existují pro všechny pravděpodobnosti $p_k(t)$ limity p_k a sice buď všechny kladné nebo všechny nulové[1].

Je-li splněna podmínka pro stabilizaci systému hromadné obsluhy, pak pro $t \to \infty$ se budou derivace v rovnicích (3.)blížit k nule, takže můžeme psát:

(3.7A) $\lambda p_0 = \ldots \qquad k = \ldots$

(3.7B) $\ldots + \ldots = \ldots + \ldots \qquad k > \ldots$

Postupným rozepsáním těchto rovnic dostaneme

$$p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

....

(3.8) $$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \, .$$

Protože platí $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, můžeme psát: $1 = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$. pro $\lambda < \mu$

(3.9) $1 = p_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$, takže $p_0 = \ldots$.

---

[1] Druhá možnost může nastat jen u nekonečného počtu stavů

Výraz $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ udává **stupeň vytíženosti systému hromadné obsluhy**. Nazýváme ho **průměrná intenzita provozu**. Použijeme-li výraz pro vyjádření limitní, tj. stacionární pravděpodobnosti, dostaneme

(3.10) $$p_k = (1-\rho)\rho^k \quad k \geq 0$$

Pro otevřený systém můžeme předpokládat, že řada ρ^k na pravé straně vztahu (3.10) bude klesající, tj. s rostoucím n konverguje k nule, takže platí $|\rho| < 1$.

V případě, že by platilo $|\rho| > 1$, systém se nestabilizuje a posloupnost ρ^n neohraničeně roste. Pravděpodobnost toho, že náhodná veličina N představující počet jednotek v systému bude větší než n vyjádříme pro $|\rho| < 1$ takto:

(3.11) $$P(N > n) = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots = (1-\rho)\rho^{n+1}(1+\rho+\rho^2+\ldots) = \rho^{n+1}$$, takže

Např. pravděpodobnost, že jednotka bude muset čekat, která je dána pravděpodobností, že v systému je alespoň jeden požadavek, lze vyjádřit

$$P(N > 0) = \rho .$$

3.3 Základní charakteristiky systému

Známe-li rozdělení stacionárních pravděpodobností p_k vyjadřující pravděpodobností počtu jednotek nacházejících se v systému hromadné obsluhy, můžeme určit základní charakteristiky používané k posouzení efektivnosti SHO jak z hlediska obsluhovaných požadavků, tak z hlediska využití obslužných zařízení. Jedná se např. o *průměrný počet požadavků v systému*, *průměrný počet požadavků čekajících ve frontě*, *průměrné doby čekání v systému* či *ve frontě* apod.

3.2.1 Průměrný počet požadavků v systému

(3.12) $$\bar{n} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\rho(1+2\rho+3\rho^2+\ldots) = (1-\rho)\rho\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$ [2]

Vzhledem k tomu, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$ je derivací geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$, pak pokud platí $\rho < 1$, bude její součet roven derivaci součtu této geometrické řady, neboli

(3.13) $$\frac{\partial\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}{\partial \rho} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Dosazením (3.13) do (3.12) dostaneme pro průměrný počet požadavků v systému

---

[2] První člen v nekonečném součtu (pro k=0) je zřejmě nulový.

(3.14) $\bar{n} = \rho \ldots = \frac{\lambda}{\mu} \ldots = \lambda \ldots$ [3].

3.2.2 Průměrný počet požadavků ve frontě

Zákazníka vyžadujícího obsluhu zajímá i průměrný počet požadavků ve frontě $\bar{n}_f$: Střední hodnota náhodné veličiny $\bar{n}_f$ udávající velikost fronty[4] je dána výrazem

$$\bar{n}_f = 0 + \sum^{\infty} \ldots k = \sum^{\infty} \ldots = \sum^{\infty} \ldots = \ldots = \ldots \rho^2 \ldots = \ldots \lambda^2 \ldots \mu \ldots$$

3.2.3 Průměrná doba strávená v systému

Tuto dobu vypočteme podle *Littleovy formule*: $\bar{n} \ldots T$. Z ní dostaneme:

$$T = \bar{n} \ldots 1 = 1 \ldots \rho \ldots 1 = \mu \ldots \lambda \ldots = 1 \ldots = 1 \ldots 1$$ [5]

3.2.3 Průměrná doba čekání ve frontě

Pro režim fronty, kdy požadavky jsou obsluhovány v pořadí příchodů (FIFO), je tato doba dána rozdílem průměrné doby strávené v systému T a průměrné doby obsluhy jednoho požadavku $\frac{1}{\mu}$:

$$T_f = \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots = \lambda \ldots \mu \ldots$$

3.2.4 Pravděpodobnost výskytu fronty nenulové délky

K vytvoření fronty dojde tehdy, jsou-li v systému nejméně 2 požadavky. Jeden je obsluhován, druhý čeká ve frontě

$$P(k > \ldots) = \ldots = \ldots 1 \ldots =$$

3.2.5 Pravděpodobnost výskytu minimálně r požadavků v systému

Obdobně předchozímu vypočteme jako

$$P(k \geq \ldots) = \sum^{\infty} \ldots = \ldots \rho \sum^{\infty} \ldots = \ldots \rho \ldots 1 \ldots 1 \ldots =$$

---

[3] Z podmínky $\rho < \ldots$ vyplývá, že jmenovatel $\mu \ldots$ bude kladný. Je patrné, že zvyšující se intenzita vstupních požadavků λ nepřevyšující μ bude znamenat růst průměrného počtu požadavků v systému.

[4] Počet požadavků ve frontě je dán počtem požadavků v systému zmenšeným o 1 (o právě obsluhovaný požadavek).

[5] Opět je přirozené, že zvyšující se rozdíl v intenzitě výstupu oproti intenzitě vstupu $\mu \ldots$ bude znamenat zkrácení doby, po kterou požadavek setrvá v systému.

Při modelování MHO se uplatňují ze stochastických procesů především *Markovovy procesy se spojitým časem a s diskrétními stavy*. Zpravidla jde o poměrně jednoduché procesy, neboť přechody mezi stavy jsou dost omezené. Předpokládá se,že přechody z libovolného stavu S_k jsou možné pouze do sousedních stavů S_{k-1}, S_{k+1}. Přechod ze stavu S_k do stavu S_{k+1} znamená příchod jednoho požadavku do systému a obdobně S_k do stavu S_{k-1} znamená odbavení požadavku v systému po skončení obsluhy.

Nachází-li se v systému obsluhy v libovolném okamžiku právě k požadavků (systém je ve stavu S_k), pravděpodobnosti přechodů mezi sousedními stavy jsou nezávislé na čase a závisí jen na stavu S_k (jde-li o homogenní proces).