

P14 – S paralelních kanálů

3.4 Exponenciální model s paralelní obsluhou (S-kanálový)

V realitě se častěji než s obsluhou probíhající pouze v jednom obslužném zařízení se systémy poskytující současně obsluhu v konečném počtu homogenních kanálů. Výhodou těchto systémů je, že může zpravidla přizpůsobit kapacitu obsluhy intenzitě vstupního proudu požadavků.

Demonstrujme situaci na otevřeném systému majícím nanejvýš S homogenních paralelně obsluhujících zařízení, z nichž každé má intenzitu obsluhy μ . Jsou-li v provozu dvě zařízení, budou mít dohromady intenzitu obsluhy 2μ atd. Nejvýše je možné zvýšit intenzitu obsluhy na $S\mu$. Fronta se začíná vytvářet až při vstupu (S+1)-požadavku.

Předpokládám, že rozdělení intervalů mezi příchody, jakož i rozdělení dob trvání obsluhy v každém zařízení je opět exponenciální. Dále se vychází z toho, že požadavky vstupující do systému s konstantní intenzitou λ a čekají při obsazení všech obslužných zařízení trpělivě na odbavení. Počet míst ve frontě je neomezený a obsluha probíhá v pořadí, v jakém požadavky do systému přišly.

Matrice pravděpodobností přechodu zde bude mít tvar

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu\Delta t & 1-(\lambda+2\mu)\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-(\lambda+(s-1)\mu)\Delta t & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S\mu\Delta t & 1-(\lambda+S\mu)\Delta t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S\mu\Delta t & \dots \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě jednoduchého exponenciálního MHO máme

$$(3.21) \quad p(t+\Delta t) = p(t)P, \text{ kde}$$

$$(3.22) \quad p(t) = [p_0(t) \ p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_k(t) \ \dots],$$

Ze vztahu (3.22) dostaneme postupně

$$(3.23A) \quad p_0(t+\Delta t) = [1-\lambda\Delta t]p_0(t) + \mu\Delta t p_1(t)$$

$$(3.23B) \quad p_k(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{k-1}(t) + [1-\lambda\Delta t - k\mu\Delta t]p_k(t) + (k+1)\mu\Delta t p_{k+1}(t) \text{ pro } 1 \leq k < S$$

$$(3.23C) \quad p_k(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{k-1}(t) + [1-\lambda\Delta t - S\mu\Delta t]p_k(t) + S\mu\Delta t p_{k+1}(t) \text{ pro } S \leq k$$

Po přechodu k limitám pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$(3.24A) \quad \dot{p}_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$(3.24B) \quad \dot{p}_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) + (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad \text{pro } 1 \leq k < S$$

$$(3.24C) \quad \dot{p}_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) + (\lambda + S\mu) p_k(t) + S\mu p_{k+1}(t) \quad \text{pro } S \leq k.$$

Získali jsem takto soustavu lineárních homogenních diferenciálních rovnic pro pravděpodobnosti $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_k(t)$, ...

Předpokládáme-li ustálení systému ve stabilizovaném stavu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Můžeme soustavu (3.24) přepsat do tvaru

$$(3.25A) \quad \lambda p_0(t) = \mu p_1(t)$$

$$(3.25B) \quad (\lambda + k\mu) p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad \text{pro } 1 \leq k < S$$

$$(3.25C) \quad (\lambda + S\mu) p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) + S\mu p_{k+1}(t) \quad \text{pro } S \leq k.$$

Jak patrně, pravděpodobnosti p_0 , p_1 , p_2 , ..., p_k , ... můžeme určit postupným dosazováním. Pro zjednodušení použijeme zápis $\rho = \lambda/\mu$ a dostaneme:

$$(3.26B) \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad \text{pro } 1 \leq k < S$$

$$(3.26C) \quad p_k = \frac{\rho^k}{S^k \cdot S} p_0 \quad \text{pro } S \leq k.$$

Veličinu p_0 dostaneme opět z podmínky $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$:

V konstruovaném součtu budou nyní dva typy výrazů, což odpovídá odlišným zápisům (3.26B), (3.26C). Obecně lze zapsat

$$(3.27) \quad p_0 \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=S}^{\infty} \frac{\rho^j}{S^j \cdot S} \right] = 1.$$

Druhý výraz na levé straně (3.27) lze upravit

$$(3.27A) \quad \sum_{j=S}^{\infty} \frac{\rho^j}{S^j \cdot S} p_0 = \frac{\rho^S}{S} \sum_{j=S}^{\infty} \left(\frac{\rho}{S} \right)^{j-S} p_0 = \frac{\rho^S}{S} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{S} \right)^i p_0 = \frac{\rho^S}{S} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{S}} p_0.$$

Proto dále máme

$$(3.28) \quad p_0 = \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^S}{S} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{S}} \right]^{-1}$$

V tomto systému je podmínka stabilizace ve tvaru

$$(3.29) \quad \rho_0 < 1 \Rightarrow \rho_0 = \frac{\lambda}{S} < 1$$

Stanovme nyní některé základní charakteristiky systému frontě apod.

Průměrný počet jednotek v systému

Platí-li pro **průměrný počet jednotek čekajících ve frontě**

$$(3.30) \quad \bar{n}_f = \sum_{k=S+1}^{\infty} (k-S) p_k$$

a pro **průměrný počet nevyužitých stanic obsluhy**

$$(3.31) \quad \bar{S} = \sum_{k=0}^S (S-k) p_k, \text{ bude}$$

$$(3.32) \quad \bar{n} - \bar{S} = \sum_{k=S+1}^{\infty} (k-S) p_k - \sum_{k=0}^S (S-k) p_k = \bar{n} - \bar{S}$$

průměrný počet jednotek \bar{n} v systému

$$(3.33) \quad \bar{n} = \bar{n}_f + \bar{S}, \text{ neboli}$$

průměrný počet jednotek v systému je roven součtu průměrného počtu jednotek ve frontě a průměrného počtu obsazených stanic obsluhy \bar{S}

Užijeme-li při stanovení průměrného počtu jednotek ve frontě vztah pro stacionární pravděpodobnosti, dostaneme

$$(3.34) \quad \bar{n}_f = \rho_0 \frac{\rho_0^{S+1}}{(1-\rho_0)^2} = \frac{\rho_0^{S+2}}{(1-\rho_0)^2}, \text{ kde}$$

Velikost ρ_0 je dána vztahem (3.28).

Protože předpokládáme konstantní intenzitu příchodů Λ , získáme **průměrnou dobu čekání ve frontě** ze vztahu

$$(3.35) \quad T_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda}$$

a **průměrnou dobu, kterou stráví požadavek v systému** lze určit jako

$$(3.36) \quad T = T_f + \frac{1}{\mu}, \text{ resp. } T = \frac{\bar{n}}{\lambda}.$$

Při konstantní intenzitě příchodů λ vstoupí během intervalu délky t do systému v průměru λt požadavků. Je-li průměrná doba obsluhy jednoho požadavku v kterémkoliv obslužném zařízení $\frac{1}{\mu}$, nezávislá na stavu systému, pak průměrná doba obsluhy λt požadavků je

(3.37)
$$\lambda t = \rho t$$

Je-li v systému místo S obslužných zařízení obsluhujících během intervalu délky t s intenzitou $S\mu$ v provozu jen jedno obslužné zařízení s intenzitou obsluhy μ , ovšem po dobu $S\mu$, pak průměrná doba, po kterou je toto zařízení obsazeno, je ρt , resp. $(1-\rho)t$ je **průměrná doba jeho nevyužití**.

Z předešlého vyplývá, že v systému je v průměru ρ obsazených obslužných linek, takže pro **průměrný počet nevyužitých obslužných linek** platí

(3.38)
$$S - \rho$$