P2 – Základní charakteristiky stavů Markovova řetězce

1.4 Pravděpodobnost průchodu stavem, resp. přechodu do jiného stavu

Významnou úlohu při popisu vlastností markovských řetězců hraje doba průchodu daným stavem (též doba návratu) (po jednom, resp. po n krocích), resp. doba přechodu do tohoto stavu z jiného stavu (po jednom, resp.n krocích).

Podle dříve zavedeného značení příslušných pravděpodobností přechodu po n krocích, resp. návratu do stavu po n krocích značíme (pro j-tý stav) $p_{ij}^{(n)}$, resp. $p_{jj}^{(n)}$. Jak dále ukážeme, tyto charakteristiky mají velkou důležitost při klasifikaci stavů řetězce. S ohledem na již zavedené pojmy připomeňme, že

Pravděpodobnost návratu do stavu i po n krocích je

(1.11A) $$p_{ii}^{(n)} = \Pr\{X_n = i | X_0 = i\}\text{ , přičemž } p_{ii}^{(0)} = 1 \quad \text{(konvence)}$$

Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j po n krocích je

(1.11B) $$p_{ij}^{(n)} = \Pr\{X_n = j | X_0 = i\}\text{ , přičemž } p_{ij}^{(0)} = 0 \quad \text{(konvence)}$$

Výpočet těchto pravděpodobností se provádí na základě znalosti matice pravděpodobností přechodu po jednom P resp. n krocích P^n.

Charakter jednotlivých stavu je významně ovlivněn, jak dále ukážeme, chováním posloupnosti $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$,resp. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$. Poznamenejme současně, že ani u poměrně jednoduchých tvarů matic pravděpodobností přechodu nemusí být takový výpočet snadnou záležitostí, zvláště existuje-li větší počet možností přechodů.

1.5 Pravděpodobnost prvního průchodu stavem, resp. prvního přechodu do jiného stavu

Velmi často je důležité vyslovit tvrzení též o počtu přechodů, které proces uskuteční při přechodu ze stavu i do stavu j poprvé. Tato délka je nazývána dobou prvního přechodu ze stavu i do stavu j. Jestliže $i = j$, pak je tato doba právě rovna počtu přechodů, které se uskuteční, než se proces vrátí do výchozího stavu i. V tomto případě se mluví o době návratu [reccurence time] .

Obecně jsou doby prvního přechodu náhodnými veličinami a mají tedy s tímto spojená pravděpodobnostní rozdělení. Tato pravděpodobnostní rozdělení přirozeně závisí na pravděpodobnostech přechodu procesu ze stavu do stavu.

Definice 5

Uvažujme libovolný , pevně zvolený stav i . Definujme pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ hodnotu

(1.12A) $$f_{ii}^{(n)} = \Pr\{X_n = i, X_v \neq i, v = 1,2,...,n-1 | X_0 = i\}$$

Jinými slovy $f_{ii}^{(n)}$ je pravděpodobnost toho, že - vycházeje ze stavu i - první návrat do stavu i se uskuteční právě po n krocích. Pro n=0 přijímáme konvenci $f_{ii}^{(0)} = 0$

Uvažujme libovolné dva pevně zvolené stavy i, j. Definujme pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ hodnotu

(1.12B) $$f_{ij}^{(n)} = \Pr\{X_n = j, X_v \neq j, v = 1,2,\dots,n-1 | X_0 = i\}$$

Jinými slovy $f_{ij}^{(n)}$ je pravděpodobnost toho, že - vycházeje ze stavu i - první přechod ze stavu i do stavu j se uskuteční právě po n krocích. Pro n=0 přijímáme konvenci $f_{ij}^{(0)} = 0$

Mějme nyní pevně dán stav i. Mezi oběma veličinami $p_{ii}^{(n)}$ a $f_{ii}^{(n)}$ lze nalézt rekurzívní vztah, přičemž další $f_{ii}^{(n)}$ mohou být spočteny jako

(1.13) $$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)}.p_{ii}^{(n-k)} \quad \text{pro } n \geq 1 \ ,$$

s dodefinováním $f_{ii}^{(0)} = 0$ pro všechna i. Rovnice (1.13) je odvozena rozkladem události, ze které se spočte $p_{ii}^{(n)}$ podle času prvního návratu do stavu i. Opravdu: uvažujme všechny možné realizace procesu, pro které $X_0 = i, X_n = i$ a první návrat do stavu i se vyskytne právě v k-tém přechodu. Nazvěme tuto událost E_k. Události E_k (k=1,2,...,n) jsou zřejmě vzájemně neslučitelné.[1] Pravděpodobnost události, že první návrat je v *k*-tém přechodu je podle definice $f_{ii}^{(k)}$. Ve zbývajících ***n-k*** přechodech se zabýváme pouze těmi realizacemi, pro které $X_n = i$. S využitím Markovské vlastnosti (1.3) dostaneme pro $1 \leq k \leq n$ vztah (1.14)

$$\Pr\{E_k\} = \Pr\{\text{první návrat je v } k-\text{tém prechodu} | X_0 = i\}.\Pr\{X_n = i | X_k = i\} = f_{ii}^{(k)}.p_{ii}^{(n-k)}$$

Připomeňme, že přijímáme konvenci $p_{ii}^{(0)} = 1$. Můžeme proto psát

(1.15) $$\Pr\{X_n = i | X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{n} \Pr\{E_k\} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)}.p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)}.p_{ii}^{(n-k)}$$. Odtud

$$f_{ii}^{(1)} = p_{ii}^{(1)} = p_{ii}$$

$f_{ii}^{(2)} = p_{ii}^{(2)} - f_{ii}^{(1)}.p_{ii}$,(neboť zřejmě $p_{ii}^{(2)} = f_{ii}^{(2)} + f_{ii}^{(1)}.p_{ii}$) až

(1.16) $$f_{ii}^{(n)} = p_{ii}^{(n)} - f_{ii}^{(1)}.p_{ii}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)}.p_{ii}^{(n-2)} - \dots f_{ii}^{(n-1)}.p_{ii}^{(1)}$$

[1] Zřejmě, jestliže se první návrat do téhož stavu uskuteční po k-tém kroku, nemůže již tento první návrat následovat v žádném z pozdějších kroků.

Analogicky k (1.13) lze ukázat, že i pravděpodobnosti $f_{ij}^{(n)}$ vyhovují následujícím rekursívním vztahům:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)}.p_{jj} \quad \text{, (neboť zřejmě } p_{ij}^{(2)} = f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(1)}.p_{jj} \text{)}$$

....

(1.17) $$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)}.p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}^{(2)}.p_{jj}^{(n-2)} - \ldots.f_{ij}^{(n-1)}.p_{jj}^{(1)}$$

$$\text{(neboť zřejmě } p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + f_{ij}^{(1)}.p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)}.p_{jj}^{(n-2)} + \ldots.f_{ij}^{(n-1)}.p_{jj}^{(1)} \text{)}$$

Znamená to, že pravděpodobnost doby prvního přechodu ze stavu i do stavu j po n $f_{ij}^{(n)}$ krocích lze spočíst rekurzívně pomocí jednokrokových pravděpodobností přechodu $p_{ij}^{(n)}$ (známe-li je)**.**

1.6 Střední doba čekání (na přechod), střední doba prvního návratu

V analýze Markovových řetězců hrají důležitou roli dvě další charakteristiky, které umožňují mj. blíže kategorizovat jednotlivé stavy, jak uvidíme v další části.

Definice 6 Označme μ_{ij} střední dobu čekání (na přechod ze stavu i do stavu j)
Ta je definována následovně:

(1.18A) $$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{ij}^{(n)} \quad \text{, pokud} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1,$$

(1.18B) $$\mu_{ij} = \infty \quad \text{, pokud} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1,$$

Poznámka/tvrzení: Kdykoliv, když platí pro součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, pak μ_{ij} vyhovuje jednoznačně rovnici $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}.\mu_{kj}$.

Druhým indikátorem povahy náhodného procesu představovaného Markovovým řetězcem, je doba prvního návratu do daného stavu určená jako počet kroků, po kterých lze z výchozího stavu opět do tohoto stavu dospět. Vzhledem k tomu, že nezřídka existuje více způsobů, jak se do daného stavu (průchodem přes ostatní stavy systému) **opět dostat, je užitečné definovat**

Definice 7 Když $i = j$, pak průměrná doba prvního průchodu stavem se nazývá střední doba návratu.

Střední dobou prvního **návratu** μ_{jj} **pro daný stav j rozumíme střední hodnotu počtu kroků, po kterých lze ze stavu j do tohoto stavu opět dospět** (s příslušnými pravděpodobnostmi $f_{jj}^{(n)}$), **tedy**

(1.19) $$\mu_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} n.f_{jj}^{(n)} \;.$$

Přímý výpočet μ_{jj} **tedy předpokládá znalost všech pravděpodobností** $f_{jj}^{(n)}$ **po libovolném počtu kroků.** To ale nemusí být obecně nijak snadné.

V dalším nicméně ukážeme, že v některých případech, kdy existují limitní (stacionární) pravděpodobnosti po ustálení procesu, lze tuto dobu vypočíst vcelku snadno právě z hodnot těchto limitních pravděpodobností.

1.7 Chapman-Kolmogorovovy rovnice

V předchozím byly zavedeny n-krokové pravděpodobnosti přechodu (po n-krocích) $p_{ij}^{(n)}$. **Tyto pravděpodobnosti přechodu mohou být užitečné tehdy, jestliže proces je ve stavu** ***i*** **a pravděpodobnost, že proces bude po n obdobích ve stavu** ***j*****, je žádoucí znát.**

Chapman-Kolmogorovovy rovnice **poskytují metodu pro výpočty těchto pravděpodobností přechodu po n-krocích:**

(1.21) $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(v)} p_{kj}^{(n-v)} \text{ pro všechna i,j,n a } 0 \le v \le n \;.$$

Tyto rovnice pouze **ukazují, že během cesty ze stavu** i **do stavu** j **v** n **krocích bude proces v nějakém** mezilehlém **stavu** k **přesně po** v (menším než n) **krocích. Takže** $p_{ik}^{(v)} p_{kj}^{(n-v)}$ **je právě podmíněná pravděpodobnost toho, že – vycházeje ze stavu** j **– proces dospěje do stavu** k **po** v **krocích a potom do stavu** j **po** $n-v$ **krocích. Tedy, shrneme-li tyto podmíněné pravděpodobnosti přes všechna možné stavy k musíme dospět k hodnotě** $p_{ij}^{(n)}$)

Speciální případy $v=1$ **a** $v=n-1$ **vedou k výrazům:**

(1.22) $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$$

(1.23) $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}^{1} \text{ pro všechna } i,j,n.$$

Tím se stává zřejmým, že pravděpodobnosti přechodu po n-krocích mohou být získány z jednokrokových **pravděpodobností přechodu** $p_{ij}^{(1)}$ **rekurzivně.**

Pro speciální případ *n* = *2* dostaneme:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}$$

Všimněme si, že $p_{ij}^{(2)}$ jsou prvky matice P^2. Avšak musíme rovněž zmínit, že tyto prvky

$$\sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}$$

získáme tak, že násobíme matici přechodu po 1 kroku P samu se sebou:

(1.24) $$P^{(2)} = P.P = P^2 \quad .$$

Obecněji pro libovolné konečné n dostaneme

(1.25) $$P^{(n)} = P.P.....P = P^n = P.P^{n-1} = P^{n-1}.P \quad .$$

Takže matici pravděpodobností přechodu po n krocích $P^{(n)}$ dostaneme jako výpočet n-té mocniny matice pravděpodobností přechodu P po jednom kroku. Pro hodnoty n, které nejsou příliš velké, může být matice pravděpodobností přechodu po *n* krocích spočtena způsobem zde popsaným. Avšak, pokud je *n* hodně velké, mohou být takové výpočty často obtížné a navíc, v důsledku zaokrouhlovacích chyb může dojít nepřesnostem.