

## P4 - Rozložitelné a nerozložitelné Markovovy řetězce

### 1.12 Rozložitelné Markovovy řetězce

Skupinu vzájemně sousledných stavů nazýváme uzavřenou třídou = podřetězcem. Jestliže je v řetězci taková třída pouze jedna, nazýváme tento řetězec nerozložitelný (irreducibilní) [irreducible chain]. Tvoří-li všechny stavy řetězce uzavřenou třídu a jsou-li tyto **stavy ergodické**, nazýváme tento **řetězec regulární** [regular chain].

#### Definice 14

Markovův řetězec se nazývá **rozložitelný** [reducible chain], jestliže v něm existuje více než jedna množina (podřetězec) takovýchto sousledných stavů.

Je-li řetězec nerozložitelný, znamená to, že v matici pravděpodobností přechodu  $P$  lze nalézt dílčí submatice s nulovými prvky.

Často se lze u **konečných rozložitelných řetězců** setkat s těmi podobami matice  $P$  :

$$(A) \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \text{ kde } P_1, P_2 \text{ jsou čtvercové submatice}$$

Oba podřetězce jsou zde tvořeny oddělenými skupinami stavů, kdy stavy jednoho podřetězce nejsou dosažitelné ze stavů druhého podřetězce (a tedy ani nemohou být s nimi sousledné).<sup>1</sup>

$$(B) \quad P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ R & S \end{bmatrix}, \text{ kde } Q, S \text{ jsou čtvercové submatice}$$

Zde matice  $Q$  obsahuje trvalé stavy a matice  $S$  přechodné stavy. Matice  $R$  zde představuje matici pravděpodobností přechodu ze stavů přechodných do stavů **trvalých** (opačná cesta není přirozeně možná, což je indikováno nulovou maticí v pravém horním poli).

Je-li matice  $P$  rozložitelná na tvar

$$(C) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ kde obě „0“ jsou nulové čtvercové submatice,}$$

bude systém oscilovat **po každém kroku** mezi dvěma množinami stavů a příslušná matice  $P$  bude popisovat periodický řetězec.

Není-li matice  $P$  rozložitelná, jedná se o **regulární** řetězec, kde všechny jeho stavy tvoří uzavřený celek<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> V maticích  $P_1$  a  $P_2$  mohou být vedle trvalých stavů přítomny rovněž stavy přechodné.

<sup>2</sup> Každý stav řetězce je dosažitelný z každého jiného stavu.

## 1.13 Regulární Markovovy řetězce

**Definice 15** Matici pravděpodobnosti přechodu nazveme **regulární**, je-li  $P^n$  pro určité konečné  $n$  bez nulových prvků. Zároveň platí, že matice  $P$  je regulární, jestliže není rozložitelná na tvary (A), (B), (C).

Lze dokázat, že matice  $P$  konverguje při  $n \rightarrow \infty$  k limitní matici typu

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_M \end{bmatrix},$$

jejíž řádky tvoří shodné řádkové vektory  $a = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_M)$ , které nazýváme **limitní stacionární vektory**

**Věta 9** Pro regulární matici  $P$  platí tyto základní vlastnosti:

1. Je-li  $P$  regulární,  $A$  je limitní matice  $a$  a je limitní vektor, pak s rostoucím  $n$  se  $p.P^n$  blíží k  $a$ , ať je výchozí vektor  $p$  jakýkoliv:  $\lim_{n \rightarrow \infty} p.P^n = a$ .
2. vektor  $a$  jediný, pro který platí  $a.P = a$ ; je tedy určen jednoznačně.
3. Platí, že  $P.A = A.P = A$ .

Limitní vektor  $a$  je možné určit následujícím způsobem:

Předpokládáme-li, že se v případě regulárních řetězců mohou všechny stavy v budoucnosti stále vyskytovat, tj. platí  $0 < p_{ij} < 1$ , existuje limitní rozdělení absolutních pravděpodobností vektoru  $p(n)$ . Potom platí

$$(1.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n-1) = a, \text{ kde}$$

vektor  $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M)$  je limitní stacionární vektor. Složky vektoru  $a$  lze interpretovat, jako podíly (z celku 1) z celkové doby, kterou systém stráví ve stavech 1,2,...,M v průběhu dost dlouhého časového období.

Protože platí

$$(1.35A) \quad p(n) = p(n-1).P,$$

můžeme po limitním přechodu tento vztah psát ve tvaru

$$(1.35B) \quad a = a.P.$$

Rovnice této soustavy o  $M$  neznámých  $a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M$  jsou lineárně závislé a proto nelze bez dalšího nalézt jediné řešení. Nalézt jednoznačné řešení nicméně umožňuje zavedení další přirozené podmínky, která plyne z toho, že stacionární pravděpodobnosti stavů tvoří úplnou soustavu jevů, tj. podmínky  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

Výpočty stacionárních pravděpodobností  $a_1, a_2, \dots, a_M$  získáme tedy řešením soustavy rovnic

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_M) = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_M) \cdot \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0} & p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix}, \text{ resp.}$$

$$(1.35C) \quad a_i = \sum_{j=0}^M a_j p_{ji} .$$

s dodatečnou podmínkou  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  .

V příkladě se zásobami kamer<sup>3</sup> lze ukázat, že matice pravděpodobností přechodu po 8 krocích  $P^{(8)}$  má tvar:

$$P^{(8)} = P^8 = P^4 \cdot P^4 = \begin{pmatrix} 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \end{pmatrix} .$$

Zaznamenejme pozoruhodnou skutečnost, že každý ze čtyř řádků má identické prvky. To znamená, že pravděpodobnost toho, že systém je po 8 týdnech ve stavu  $j$  se zdá být nezávislá na počátečním stavu zásob ! Jinými slovy, jeví se, že existuje nějaká limitní pravděpodobnost, že systém bude ve stavu  $j$  po velkém počtu přechodů a že takováto pravděpodobnost je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobností stavů. Tento důležitý výsledek vztahený k dlouhodobému chování **Markovových řetězců s konečným počtem stavů** nyní ukážeme:

Markovova řetězce a **jsou rovna převráceným hodnotám středních dob návratu**, tj.

$$(1.36) \quad \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} \text{ pro } j=0,1,\dots,M.$$

Pojem stacionární v tomto případě znamená, že pravděpodobnost toho, že se proces nachází v určitém stavu, řekněme  $j$ , po velkém počtu přechodů směřuje k hodnotě  $\pi_j$ , která je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobnosti výskytu stavů. Je důležité dodat, že stacionární pravděpodobnost neznamená, že se proces usídí v jednom stavu. Naopak, proces pokračuje v uskutečňování přechodů ze stavu do stavu a v jakémkoliv kroku  $n$  je pravděpodobnost přechodu ze stavu do stavu stále  $p_{ij}$ .

<sup>3</sup> V této části textu jsou stacionární pravděpodobnosti výše zavedené jako  $a_j$  značeny  $\pi_j$  .

Limitní  $\pi_j$  mohou být také interpretovány jako stacionární pravděpodobnosti (nezaměňovat se stacionárními pravděpodobnostmi přechodu). Jestliže počáteční absolutní pravděpodobnost toho, že jsme ve stavu  $j$  je  $\pi_j$  (tj.  $P\{X_0 = j\} = \pi_j$  pro všechna  $j$ , pak absolutní pravděpodobnost výskytu procesu ve stavu v čase  $n=1,2,\dots$  je také dána těmito  $\pi_j$  tj.  $P\{X_n = j\} = \pi_j$

Zmiňme, že stacionární pravděpodobnosti sestávají z  $M+2$  rovnic pro  $M+1$  neznámých. Protože existuje jediné řešení, přinejmenším jedna rovnice musí být redundantní a může tedy být škrtnuta. Nemůže to ale být rovnice

$$\sum_{i=0}^M \pi_i = 1,$$

protože řešení  $\pi_j = 0$  by evidentně také vyhovovalo ostatním  $M+1$  rovnicím. Dále: řešení jiných  $M+1$  stacionárních rovnic je jednoznačné až na multiplikativní konstantu, a právě díky zmíněné poslední rovnici je toto řešení „tlačeno“ k tomu, aby šlo o pravděpodobnostní rozdělení.

V příkladě se zásobami kamer mohou být rovnice stacionárního stavu vyjádřeny jako

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot p_{00} + \pi_1 \cdot p_{10} + \pi_2 \cdot p_{20} + \pi_3 \cdot p_{30}$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot p_{01} + \pi_1 \cdot p_{11} + \pi_2 \cdot p_{21} + \pi_3 \cdot p_{31}$$

$$\pi_2 = \pi_0 \cdot p_{02} + \pi_1 \cdot p_{12} + \pi_2 \cdot p_{22} + \pi_3 \cdot p_{32}$$

$$\pi_3 = \pi_0 \cdot p_{03} + \pi_1 \cdot p_{13} + \pi_2 \cdot p_{23} + \pi_3 \cdot p_{33}$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Dosazení hodnot za  $p_{ij}$  do těchto pěti rovnic vede ke vztahům

$$\pi_0 = (0,080)\pi_0 + (0,632)\pi_1 + (0,264)\pi_2 + (0,080)\pi_3$$

$$\pi_1 = (0,184)\pi_0 + (0,368)\pi_1 + (0,368)\pi_2 + (0,184)\pi_3$$

$$\pi_2 = (0,368)\pi_0 + \quad \quad \quad + (0,368)\pi_2 + (0,368)\pi_3$$

$$\pi_3 = (0,368)\pi_0 + \quad \quad \quad + (0,368)\pi_3$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

(Algebraické) řešení těchto čtyř rovnic vede k simultánnímu řešení

$$\pi_0 = 0,285 \quad \pi_1 = 0,285 \quad \pi_2 = 0,264 \quad \pi_3 = 0,166$$

kterýžto výsledek je (téměř) shodný s výpočtem matice  $P^{(8)}$ . Takže po mnoha týdnech se pravděpodobnosti výskytu žádné, jedné, dvou a tří kamer v prodejně budou přibližovat k hodnotám 0,285, 0,285, 0,264 a 0,166. Odpovídající střední doby návratu [expected recurrence times] jsou :

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3,51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3,51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3,79 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6,02 \text{ týdnů}$$