P5 - Absorpční stavy

1.14 Absorpční stavy

Definice 16 (Trvalý) **Stav k je nazýván absorpční** [absorbing state], **jestliže platí**

(1.36) $$p_{kk} = 1$$

což znamená, že pokud někdy proces navštíví stav k, zůstane v něm již navždy. Jestliže k je absorpční stav, potom pravděpodobnost přechodu [passage probability] **ze stavu i do stavu k je nazývána *pravděpodobností absorpce v* k,** pokud vycházíme ze stavu i.

Když v řetězci existují dva nebo více absorpčních stavů a když je zřejmé, že proces bude dříve či později absorbován v jednom z těchto stavů, je žádoucí nalézt tyto pravděpodobnosti absorpce.Tyto pravděpodobnosti lze nalézt řešením soustavy lineárních rovnic.

Předpokládejme, že Markovův řetězec je takový, že se s určitostí jednoho z jeho absorpčních stavů dosáhne. Jestliže stav k je absorpční, potom množina absorpčních pravděpodobností f_{ik} vyhovuje soustavě rovnic:

(1.37) $$f_{ik} = \sum_{j=0}^{M} p_{ij} f_{jk}$$ **pro** $i = 1,2,\dots,M$, **tedy**

(1.37A) $$f_{ik} = 1 + \sum_{j=0,\, j\neq k}^{M} p_{ij} f_{jk}$$ **pro** $i = 1,2,\dots,M$

za podmínek $f_{kk} = 1$, $f_{ik} = 0$ **, jestliže stav i je trvalý a jestliže $i \neq k$.**

Absorpční pravděpodobnosti jsou důležité mj. v „náhodných procházkách“. Náhodná procházka je Markovův řetězec s vlastností, že když je proces ve stavu i, potom během jednoho přechodu proces buď zůstane v i nebo se přemístí do jednoho ze stavů, které jsou bezprostředně sousedící s i.

Příklad: Předpokládáme dva hráče, každý mající 2 dolary, kteří se domluvili na odehrání hry a sázejí po 1 dolaru v každé hře do té doby, než je jeden z nich bez peněz. Peněžní obnos, který má hráč A po odehrání n partií hry vytváří Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

očíslování stavů

(1.38)
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Jestliže p představuje pravděpodobnost hráče A k výhře v jedné partii, potom pravděpodobnost absorpce ve stavu 0 (kdy hráč A prohraje všechny své peníze) může být získána z předešlé soustavy rovnic (1.37). Lze ukázat, že tyto rovnice pak vyústí v alternativní výrazy (obecnější, než je pro M = 4 jako v tomto příkladě).

Stanovme pravděpodobnosti přechodu u jednotlivých stavů:

p_{00} : $p_{00}{}^{(1)} = 1$, $p_{00}{}^{(2)} = 1$, ..., $p_{00}{}^{(n)} = 1$, perioda $d_0 = 1$ *neperiodický stav.*

$f_{00}{}^{(1)} = 1$, $f_{00}{}^{(2)} = 0$ $f_{00}{}^{(n)} = 0$ pro $n \geq 2$, zřejmě $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{00}{}^{(n)} = 1$ (přijímáme $f_{00}{}^{(0)} = 0$

Zřejmě platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{00}{}^{(n)} = +\infty$ stav *0* je tedy trvalý .

p_{55} : $p_{55}{}^{(1)} = 1$, $p_{55}{}^{(2)} = 1$, ..., $p_{55}{}^{(n)} = 1$, perioda $d_0 = 1$ *neperiodický stav.*

$f_{55}{}^{(1)} = 1$, $f_{55}{}^{(2)} = 0$ $f_{55}{}^{(n)} = 0$ pro $n \geq 2$, zřejmě $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{00}{}^{(n)} = 1$ (přijímáme $f_{55}{}^{(0)} = 0$

Stavy 0 a 5 jsou zřejmě absorpční, tedy *trvalé, nenulové neperiodické* tj. *ergodické*

p_{11}: $p_{11}{}^{(1)} = 0$, $p_{11}{}^{(2)} = pq$, $p_{11}{}^{(3)} = 0$, $p_{11}{}^{(4)} = 2p^2q^2$...., $p_{11}{}^{(5)} = 0$,

$f_{11}{}^{(1)} = 0$, $f_{11}{}^{(2)} = pq$, $f_{11}{}^{(3)} = 0$, $f_{11}{}^{(4)} = p^2q^2$ $f_{11}{}^{(2k)} = 0$ pro $k \geq 2$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{11}{}^{(n)} = pq + p^2q^2 + p^3q^3 + .. = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n q^n = \dfrac{1}{1-pq} < 1$ stav 1 je *přechodný*

(přijímáme konvencí $f_{11}{}^{(0)} = 0$)

p_{22}: $p_{22}{}^{(1)} = 0$, $p_{22}{}^{(2)} = pq$, $p_{22}{}^{(3)} = 0$, $p_{22}{}^{(4)} = p^2q^2$...., $p_{11}{}^{(5)} = 0$,

Shodně by tomu bylo pro pravděpodobnosti přechodu p_{33} , p_{44}

stavy 1,2,3,4 jsou stavy přechodné

Stavy 1,2,3,4: (největší společný dělitel sudých čísel je 2) **perioda** $d_0 = 2$ ***periodický stav.***

****

$p_{11}^{(n)} = p^n q^n = p^n (1-p)^n$

(1.39) $$1 - f_{i0} = \frac{\sum_{m=0}^{i-1} \rho^m}{\sum_{m=0}^{M-1} \rho^m} \quad \text{pro } i = 1,2,\ldots,M \text{ , kde } \rho = \frac{1-p}{p}$$

Pro případ $M = 4$ a $i = 2$ je pravděpodobnost konečné prohry hráče A dána podílem

(1.40) $$f_{20} = \frac{\rho^2 + \rho^3}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3} \quad .$$

Pro případ $M = 6$ a $i = 2$ je pravděpodobnost konečné prohry hráče A dána podílem

(1.40) $$f_{20} = \frac{\rho^2 + \rho^3}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5} \quad .$$

1.15 Pravděpodobnosti přechodu do absorpčních stavů

Absorpčními řetězci **nazveme ty *Markovské řetězce*, v nichž se vedle *přechodných stavů* vyskytují *absorpční stavy*, tj. takové, pro které je pravděpodobnost setrvání v daném stavu rovna 1[1]. Abychom vytvořili v matici pravděpodobností přechodu P absorpčního řetězce kompaktní bloky, přečíslujeme jednotlivé stavy tak, že vhodným způsobem změníme pořadí řádků a sloupců matice pravděpodobností přechodu příslušného absorpčního řetězce.**

Dostaneme tak blokově vyjádřenou MPP ve tvaru

(1.41) $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \text{, v dimenzích } P = \begin{bmatrix} I_r & 0_{[r,s]} \\ R_{[s,r]} & Q_{[s,s]} \end{bmatrix} \qquad M = r + s$$

Je-li celkový počet stavů M, počet přechodných stavů s a počet absorpčních stavů r , potom I je jednotková matice řádu r. Q je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými stavy o rozměru $[s;s]$, 0 je nulová matice o rozměrech $[r;s]$ a R je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými a absorpčními stavy o rozměru $[s;r]$

Střední počet průchodů přechodnými stavy

U absorpčních řetězců často sledujeme charakteristiky, které lze vyvodit pomocí *fundamentální matice* mající tvar

(1.42) $$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \text{ , v dimenzích } N_{[s,s]} = (I_{[s,s]} - Q_{[s,s]})^{-1}$$

---

[1] **Předpokládáme zde, že jde o konečný řetězec neobsahující jiné trvalé stavy než absorpční.**

Inverzní matice v (1.42) existuje, konverguje-li maticová posloupnost Q^n s neomezeně rostoucím n k nulové matici a lze-li pro ni psát

(1.43) $$(I-Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

Prvky fundamentální matice takto udávají, *kolikrát se proces v průměru ocitne v přechodných stavech.* Označíme-li jednotlivé prvky fundamentální matice $N = \{n_{ij}\}$, pak n_{ij} bude vyjadřovat střední hodnotu počtu průchodů stavem j, pokud proces na počátku vyšel ze stavu i, kde i, j jsou oba přechodné stavy.

Budeme-li předpokládat, že se průchody přechodnými stavy uskutečňují v jednotkových časových intervalech, můžeme zkoumat průměrné doby strávené v jednotlivých přechodných stavech.[2] Tyto doby obecně závisí na tom, z jakého stavu proces na počátku vyšel.

Pokud proces vyšel ze stavu absorpčního, je tato doba zřejmě nulová.[3]

Vyjde-li proces z i-tého přechodného stavu, můžeme střední dobu (střední počet průchodů) strávenou v přechodných stavech vyjádřit jako $m_i(t_i)$, kde doba

$t_i = \sum_j n_{ij}$ vyjadřuje počet průchodů všemi přechodnými stavy dosažitelnými ze stavu i. Soustavu veličin $m_i(t_i)$ pro různá i lze vyjádřit sloupcovým vektorem $m(t)$ Tento sloupcový vektor je tvořen řádkovými součty prvků fundamentální matice N definované v (1.42). Vektor $m(t)$ získáme také vynásobením fundamentální matice N zprava sloupcovým vektorem složeným ze samých jedniček Označíme-li ho ζ, pak lze psát $m(t) = N.\zeta$, v dimenzích $m(t)_{[s;1]} = N_{[s;s]}.\zeta_{[s;1]}$

(1.44) $$m(t) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots\dots & n_{1M} \\ n_{12} & n_{22} & \dots\dots & n_{2M} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ n_{n1} & n_{1n2} & \dots\dots & n_{MM} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jedním z cílů sledování může být určení pravděpodobností přechodu do absorpčních stavů. Přechod z přechodných do absorpčních stavů může být uskutečněn přímo nebo může proběhnout přes řadu přechodných stavů.

Jako b_{ij} označíme pravděpodobnost přechodu z přechodného stavu i do absorpčního stavu j. Můžeme ji vyjádřit jako

---

[2] Zde opět musíme mít na mysli situaci do té doby, než proces vstoupí do některého z trvalých stavů.

[3] Formulace musí být upravena takto: Pokud se proces nacházel na počátku v absorpčním stavu, je pravděpodobnost vstupu do přechodného stavu nulová a tudíž střední doba průchodu stavem je nulová.

(1.45) $b_{ij} = p_{ij} + \sum_{s_k \in T} p_{ik}.b_{kj}$, **zde T označuje množinu přechodných stavů.**

kde p_{ij} **značí přímý přechod do absorpčního stavu, druhý člen pak označuje všechny možné přechody nepřímé** (přes jiné přechodné stavy).

V maticové formě můžeme tyto pravděpodobnosti $B = \{b_{ij}\}$ **vyjádřit vztahem**

$$B = R + Q.B \quad , \quad B_{[s,r]} = R_{[s,r]} + Q_{[s,s]}.B_{[s,r]}$$

resp. po úpravě

(1.46) $$B = (I - Q)^{-1} R = N.R \quad , \quad B = (I - Q)^{-1}{}_{[s,s]} R_{[s,r]} = N_{[s,s]}.R_{[s,r]} \quad .$$

Řádkové součty matice B, která vyjadřuje pravděpodobnosti přechodu ze stavů přechodných do stavů absorpčních, jsou rovny jedné. Je to zřejmé z povahy absorpčních stavů, ve kterých (resp. v jednom z nich) **musí proces skončit.**

V absorpčním řetězci nás také **mohou zajímat pravděpodobnosti** (dočasného) **setrvání v okruhu přechodných stavů. Pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy můžeme v maticovém tvaru vyjádřit jako**

(1.47) $$H = (N - I)\tilde{N}^{-1} \; , \; H_{[s,s]} = \left(N_{[s,s]} - I_{[s,s]}\right)\tilde{N}^{-1}{}_{[s,s]} \quad , \quad \text{kde}$$

H je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodnými stavy a $\tilde{N}^{-1}$ **je inverzní matice k fundamentální matici, obsahující pouze diagonální prvky.**