P9A - Spojité MŘ – Poissonův proces

2.3 Poissonův proces

Značný význam v aplikacích mají i jednoduché Markovovy procesy, ve kterých pracujeme jen s omezenou množinou možností přechodu mezi jednotlivými stavy.

Nechť $X(t)$ je počet výskytů nějakého jevu v čase $(0,t)$. Jestliže přitom jde jen o samotný výskyt jevů, které se vzájemně liší jen různým umístěním v čase, mluvíme o tzv. bodovém procesu. Jde o posloupnost jevů, které se vyskytují za sebou v určitých náhodných časových okamžicích. Předpokládáme přitom, že počet výskytů jevu $X(t)$ může nabývat jen nezáporné celočíselné hodnoty $i = 0,1,2,3,\ldots$ a jeho přírůstky $X(t_2) - X(t_1)$ pro libovolné $t_1, t_2\ (t_1 < t_2)$ mohou také nabývat jen hodnoty $0,1,2,3,\ldots$.

Za takový bodový proces můžeme pokládat *počet nakupujících v určitém obchodě*, *počet hovorů přicházející do telefonního přístroje*, *výskyt poruch na zařízení*, počet vozidel přijíždějících ke křižovatce apod.

Poissonův proces je charakteristický těmito vlastnostmi:

A. Proces $\{X(t)\}$ má nezávislé přírůstky: Jevy, které se vyskytnou v nepřekrývajících se časových okamžicích, jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Znamená to, že počet jevů připadajících na určitý interval nezávisí na počtu jevů v jakémkoliv jiném intervalu. Jde tedy o *vlastnost nezávislosti*.

B. Proces $\{X(t)\}$ má homogenní přírůstky. Intenzita vyskytujících se jevů , tj. střední hodnota počtu těchto jevů za časovou jednotku (označme ji λ) je konstantní. Tato vlastnost se označuje jako stacionarita a příslušné procesy se nazývají *homogenní Poissonovy procesy*. V případě, že by intenzita výskytu jevů závisela na čase (s obecným značením $\lambda(t)$), bychom mluvili o *nehomogenních Poissonových procesech.*

C. Pro Δt dostatečně malé a při neměnné hodnotě λ jsou pravděpodobnosti přechodu ze stavu k do stavu $k+1$ během intervalu $(t, t+\Delta t)$ rovny

(2.20A) $$p_{k,k+1}(t, t+\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Pro pravděpodobnosti setrvání ve stejném stavu během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ platí

(2.20B) $$p_{k,k}(t, t+\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Pravděpodobnosti jiných přechodů jsou v porovnání s předchozími zanedbatelné, tedy s vyjádřením

(2.20C) $$\sum_{j=k+2}^{\infty} p_{kj}(t, t+\Delta t) = o(\Delta t)$$

Z přijatých předpokladů vyplývá, že matice intenzit přechodu Poissonova procesu má tvar:

(2.21) $$A=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pro pravděpodobnosti přechodu p_k tj. pravděpodobnosti, že systém bude v období $(t,t+\Delta t)$ ve stavu k, budou dány vztahy

(2.22A) $$p_0(t+\Delta t)=[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]p_0(t) \quad \text{pro } k=0$$

(2.22B) $$p_k(t+\Delta t)=[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]p_k(t)+[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]p_{k-1}(t)+o(\Delta t) \quad \text{pro } k>0$$

Z těchto definičních vztahů dostaneme po úpravě

(2.23A) $$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

(2.23B) $$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Limitním přechodem pro $\Delta t\to 0$ dostaneme

(2.24A) $$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)$$

(2.24B) $$\frac{dp_k(t)}{dt}=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)$$

Počáteční podmínky popisující Poissonův proces jsou dány jako

$$p_k(0)=1 \quad \text{pro } k=0$$

$$p_k(0)=0 \quad \text{pro } k>0.$$

Rovnice (2.24) představují *rekurentní soustavu diferenciálně-diferenčních rovnic.* Její řešení získáme integrováním a postupným dosazováním pro $k=0,1,2,\dots$.

Řešení obdobně odvoditelné pomocí vytvořujících funkcí **této soustavy lze psát jako**

(2.25) $$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

což je *tvar hustoty Poissonova rozdělení ve vztahu k počtu změn za časový interval* t . Člen $p_0(t)=e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost toho, že za období délky t nedojde k žádné změně.

Je-li rozdělení počtu změn systému za určitou dobu Poissonovo, pak je pro tentýž proces rozdělení dob mezi změnami exponenciální.

Matice pravděpodobností přechodu Poissonova procesu má tvar:

(2.26)
$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t \\ .... & .... & .... & .... \end{pmatrix}$$